

Adveksiyon difüzyon denklemi için sektik B-spline Galerkin metodu

Evren TOPCU^{1,*}, Dursun IRK²

¹Eskişehir Fatih Fen Lisesi, Eskişehir.

² Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü, Meşelik Kampüsü, Eskişehir.

Geliş Tarihi (Received Date): 19.08.2018

Kabul Tarihi (Accepted Date): 18.10.2018

Özet

Bu çalışmada sektik B-spline Galerkin metodu adveksiyon difüzyon denkleminin yaklaşık çözümü için önerilmiştir. Önerilen metotta zaman parçalanması için doğruluğu iki, üç ve dört olan tek adımlı yöntemler kullanılmıştır. Doğruluğu iki olan yöntem Crank-Nicolson yöntemi olarak ta bilinmektedir. İki sayısal örnek kullanılarak önerilen yöntemlerin etkinliği ve doğruluğu kontrol edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Adveksiyon difüzyon denklemi, Sektik B-spline, Galerkin yöntemi.

Sextic B-spline Galerkin method for advection diffusion equation

Abstract

In this study, sextic B-spline Galerkin finite element method is proposed for numerical solution of the advection diffusion equation. In the method, second, three and fourth order single step methods are used for the time integration. Second order single step method is also known as Crank Nicolson method. Two numerical examples are studied to illustrate the accuracy and the efficiency of the proposed methods.

Keywords: Advection diffusion equation, sextic B-spline, Galerkin method.

* Evren TOPCU, evrentopcu2001@hotmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-8087-7130>

Dursun IRK, dirk@ogu.edu.tr, <https://orcid.org/0000-0002-3340-1578>

1. Giriş

Konveksiyon difüzyon denklemi olarak ta bilinen bir boyutlu sabit katsayılı adveksiyon difüzyon denklemi (AD denklemi)

$$u_t + \alpha u_x - \mu u_{xx} = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (1)$$

formunda olup

$$\begin{aligned} u(a,t) = u(b,t) = 0, \\ u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0, \end{aligned} \quad , t \in [0, T] \quad (2)$$

sınır şartlarına ve

$$u(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3)$$

başlangıç koşuluna sahiptir. Denklemdaki α sabit katsayısı bir akışkanın hızına ve μ ise sabit difüzyon katsayısına karşılık gelmektedir. Ayrıca denklemdaki u ise konum ve zaman karşılık gelen x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyondur.

Birçok bilim dalındaki problemler AD denklemi ile modellenebilmektedir[1]. Bu tip problemlerin birçoğu keyfi sınır ve başlangıç koşullar altında tam olarak çözülemediğinden problemlerin yaklaşık çözümleri için sayısal yöntemler önerilmektedir. Dolayısıyla AD denkleminin yaklaşık çözümü için de sonlu farklar [2,3] ve sonlu elemanlar [4,5,6,7,8] gibi birçok sayısal yöntem önerilmiştir. AD denklemi veya kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için önerilen yöntemlerin birçoğunda öncelikle denklem zamana ve konuma göre parçalanmaktadır. Zamana göre parçalanma işlemi yapılırken ise genellikle doğruluğu 2 olan Crank-Nicolson yöntemi kullanılmaktadır.

Bu çalışmada AD denkleminin yaklaşık çözümü yapılırken zaman parçalanması işleminde doğruluğu 2, 3, ve 4 olan 3 farklı yöntem önerilecektir. Konum parçalanması için ise sektik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılacaktır. Sonlu elemanlar yöntemi uygulamalı matematik ve mühendislikteki bir çok sayısal simülasyon için yaygın olarak kullanılan bir yöntem olup ilk kez 1960 yılında Clough [9] tarafından kullanılmıştır. Bununla beraber yöntem fikri daha eskilere dayanmaktadır. 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında Ritz [10] ve Rayleigh [11,12] tarafından varyasyonel problemlerin çözümleri için yapılan çalışmalar mevcuttur. Galerkin [13] de sınır değer problemlerinin çözümleri için sonlu elemanlar metodu üzerinde çalışmalar yapmıştır. Sonlu elemanlar yönteminde problemin tanım kümesi öncelikle sonlu eleman adı verilen alt aralıklara bölünür. Daha sonra her bir alt aralıkta sürekli fonksiyonların cebirsel polinomların bir lineer birleşimi olarak yazılabileceği fikrinden yararlanılarak yaklaşım fonksiyonları oluşturulur. Son olarak cebirsel bağıntılardaki bilinmeyen katsayıların değerleri çözümü aranan denklemi bölünme noktalarında sağlayacak şekilde elde edilirler. Sonlu elemanlar metodu Galerkin, kolokasyon, en küçük kareler vb metodlarını içermektedir. Bu çalışmada AD denkleminin yaklaşık çözümü araştırılırken ağırlık fonksiyonu olarak yaklaşım için kullanılan taban fonksiyonun

kullanıldığı bir sonlu elemanlar yöntemi olan Galerkin metodu kullanılacaktır [14]. Yaklaşım fonksiyonu olarak ise sektik B-spline fonksiyonlar kullanılacaktır.

2. Metodun uygulanması

Sayısal çözüm aranırken konum zaman düzlemi Δt zaman adımı ve h konum adımı uzunluklarında parçalanacaktır. Bu durumda bölünme noktalarındaki bilinmeyen fonksiyonun tam değeri $x_m = a + mh$, $t_n = n\Delta t$ olmak üzere

$$u(x_m, t_n) = u_m^n, \quad m = 0, 1, \dots, N; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak gösterilecektir. U_m^n notasyonu ise u_m^n tam çözümünün yaklaşık değerine karşılık gelecektir.

2.1. Zaman parçalanması

Adveksiyon difüzyon denklemi

$$u_t = \mu u_{xx} - \alpha u_x \quad (4)$$

olarak düzenlenir ve

$$u^{n+1} = u^n + \theta_1 u_t^{n+1} + \theta_2 u_t^n + \theta_3 u_{tt}^{n+1} + \theta_4 u_{tt}^n \quad (5)$$

tek adımlı metodu önerilirse

- (5) metodunda $\theta_1 = \theta_2 = \Delta t / 2, \theta_3 = \theta_4 = 0$ seçimi yapıldığında zaman parçalanması için doğruluk 2 olacaktır (M1). Ayrıca M1 metodu Crank-Nicolson metodu olarak ta bilinmektedir.
- (5) metodunda $\theta_1 = \frac{2\Delta t}{3}, \theta_2 = \frac{\Delta t}{3}, \theta_3 = -\frac{(\Delta t)^2}{6}, \theta_4 = 0$ seçimi yapıldığında zaman parçalanması için doğruluk 3 olacaktır (M2).
- (5) metodunda $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\Delta t}{2}, \theta_3 = -\frac{(\Delta t)^2}{12}, \theta_4 = \frac{(\Delta t)^2}{12}$ seçimi yapıldığında zaman parçalanması için doğruluk 4 olacaktır (M3).

(5) yöntemi ile birlikte (4) formundaki adveksiyon difüzyon denklemi kullanılırsa

$$u^{n+1} - \theta_1 (\mu u_{xx} - \alpha u_x)^{n+1} - \theta_3 (\mu^2 u_{xxxx} - 2\alpha \mu u_{xxx} + \alpha^2 u_{xx})^{n+1} = u^n + \theta_2 (\mu u_{xx} - \alpha u_x)^n + \theta_4 (\mu^2 u_{xxxx} - 2\alpha \mu u_{xxx} + \alpha^2 u_{xx})^n \quad (6)$$

olarak (4) adveksiyon difüzyon denkleminin zaman parçalanması elde edilmiş olur.

2.2. Konum parçalanması

$[a, b]$ konum aralığı $h = x_m - x_{m-1} = (b - a) / N$, $m = 1, \dots, N$ olmak üzere,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

olarak parçalanırsın. Bu parçalanma üzerinde φ_m , $m = -3, \dots, N + 2$ sektik B-spline fonksiyonları $g(x_m) = (x - x_m)^6$ olmak üzere

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} g(x_{m-3}), & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ g(x_{m-3}) - 7g(x_{m-2}), & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ g(x_{m-3}) - 7g(x_{m-2}) + 21g(x_{m-1}), & [x_{m-1}, x_m] \\ g(x_{m-3}) - 7g(x_{m-2}) + 21g(x_{m-1}) - 35g(x_m), & [x_m, x_{m+1}] \\ g(x_{m+4}) - 7g(x_{m+3}) + 21g(x_{m+2}), & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ g(x_{m+4}) - 7g(x_{m+3}), & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ g(x_{m+4}), & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (7)$$

şeklinde tanımlanır [15,16]. Problemin tanım aralığı üzerinde $u(x,t)$ tam çözümü için $U(x,t)$ yaklaşık çözümü sektik B-spline fonksiyonların bir lineer birleşimi olarak

$$U(x,t) = \sum_{j=-3}^{N+2} \delta_j \varphi_j \quad (8)$$

formunda yazılabilir. Yaklaşımında verilen δ_j zamana bağlı bilinmeyen parametredir. (7-8) kullanılarak bölünme noktalarında ki bilinmeyen fonksiyon ve ilk 5 türevi için yaklaşımlar

$$U_m = U_N(x_m) = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \quad (9)$$

$$U'_m = U'_N(x_m) = \frac{6}{h} (\delta_{m+2} + 25\delta_{m+1} + 40\delta_m - 40\delta_{m-1} - 25\delta_{m-2} - \delta_{m-3}), \quad (10)$$

$$U''_m = U''_N(x_m) = \frac{30}{h^2} (\delta_{m+2} + 9\delta_{m+1} - 10\delta_m - 10\delta_{m-1} + 9\delta_{m-2} + \delta_{m-3}), \quad (11)$$

$$U'''_m = U'''_N(x_m) = \frac{120}{h^3} (\delta_{m+2} + \delta_{m+1} - 8\delta_m + 8\delta_{m-1} - \delta_{m-2} - \delta_{m-3}), \quad (12)$$

$$U^{(4)}_m = U^{(4)}_N(x_m) = \frac{360}{h^4} (\delta_{m+2} - 3\delta_{m+1} + 2\delta_m + 2\delta_{m-1} - 3\delta_{m-2} + \delta_{m-3}), \quad (13)$$

$$U^{(5)}_m = U^{(5)}_N(x_m) = \frac{720}{h^5} (-\delta_{m+2} + 5\delta_{m+1} - 10\delta_m + 10\delta_{m-1} - 5\delta_{m-2} + \delta_{m-3}) \quad (14)$$

olarak hesaplanabilir. $\xi = x - x_m$ koordinat dönüşümü yapılırsa $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu aralığı $[0, h]$ aralığına dönüşecektir. Bu durumda $[0, h]$ aralığı üzerinde ξ -ye göre sektik B-spline şekil fonksiyonları

$$\varphi_{m-3}(\xi) = \left(\frac{h-\xi}{h}\right)^6, \quad (15)$$

$$\varphi_{m-2}(\xi) = \frac{(2h-\xi)^6 - 7(h-\xi)^6}{h^6}, \quad (16)$$

$$\varphi_{m-1}(\xi) = \frac{(3h-\xi)^6 - 7(2h-\xi)^6 + 21(h-\xi)^6}{h^6}, \quad (17)$$

$$\varphi_m(\xi) = \frac{(3h+\xi)^6 - 7(2h+\xi)^6 + 21(h+\xi)^6 - 35\xi^6}{h^6}, \quad (18)$$

$$\varphi_{m+1}(\xi) = \frac{(2h+\xi)^6 - 7(h+\xi)^6 + 21\xi^6}{h^6}, \quad (19)$$

$$\varphi_{m+2}(\xi) = \frac{(h+\xi)^6 - 7\xi^6}{h^6}, \quad (20)$$

$$\varphi_{m+3}(\xi) = \frac{\xi^6}{h^6} \quad (21)$$

olacak şekilde bulunabilir. φ_i şekil fonksiyonlarının lineer birleşimiyle

$$\delta_i, i = m-3, \dots, m+3$$

zaman parametresine göre $[0, h]$ aralığı için yaklaşım ise

$$U^e = U(\xi, t) = \sum_{j=m-3}^{m+3} \delta_j(t) \varphi_j(\xi) \quad (22)$$

olacaktır. $W(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere (6) denkleminde Galerkin metodu uygulandığında öncelikle

$$\begin{aligned} & \int_a^b W(x) \left(u^{n+1} - \theta_1 (\mu u_{xx} - \alpha u_x)^{n+1} \right. \\ & \left. - \theta_3 (\mu^2 u_{xxxx} - 2\alpha \mu u_{xxx} + \alpha^2 u_{xx})^{n+1} \right) dx = \\ & \int_a^b W(x) \left(u^n + \theta_2 (\mu u_{xx} - \alpha u_x)^n \right. \\ & \left. + \theta_4 (\mu^2 u_{xxxx} - 2\alpha \mu u_{xxx} + \alpha u_{xx})^n \right) dx \end{aligned} \quad (23)$$

elde edilecektir. Galerkin yönteminde $W(x)$ ağırlık fonksiyonu için sektik B-spline şekil fonksiyonları ve tam çözüm için ise (22) kullanıldığında (23) denklemin için $[0, h]$ aralığı üzerindeki yaklaşım

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=m-3}^{m+3} \left[\int_0^h (\varphi_i \varphi_j - \theta_1 \varphi_i (\mu \varphi_j'' - \alpha \varphi_j')) d\xi - \right. \\
& \left. \theta_3 \int_0^h (\mu^2 \varphi_i \varphi_j'''' - 2\alpha \mu \varphi_i \varphi_j'' + \alpha^2 \varphi_i \varphi_j'') d\xi \right] \delta_j^{n+1} - \\
& \sum_{j=m-3}^{m+3} \left[\int_0^h (\varphi_i \varphi_j + \theta_2 \varphi_i (\mu \varphi_j'' - \alpha \varphi_j')) d\xi + \right. \\
& \left. \theta_4 \int_0^h (\mu^2 \varphi_i \varphi_j'''' - 2\alpha \mu \varphi_i \varphi_j'' + \alpha^2 \varphi_i \varphi_j'') d\xi \right] \delta_j^n
\end{aligned} \tag{24}$$

olacaktır. Burada i ve j indisleri $m-3, \dots, m+3$ ve $m=0, 1, \dots, N-1$ değerlerini almaktadır. (24) yaklaşımı

$$\begin{aligned}
A_{ij}^e &= \int_0^h \varphi_i \varphi_j d\xi, & B_{ij}^e &= \int_0^h \varphi_i \varphi_j'' d\xi, \\
C_{ij}^e &= \int_0^h \varphi_i \varphi_j' d\xi, & D_{ij}^e &= \int_0^h \varphi_i \varphi_j'''' d\xi, \\
E_{ij}^e &= \int_0^h \varphi_i \varphi_j''' d\xi, & (\delta_j^{n+1})^e &= (\delta_{m-3}, \dots, \delta_{m+4})^T.
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left[A^e - \theta_1 (\mu B^e - \alpha C^e) \right. \\
& \left. - \theta_3 (\mu^2 D^e - 2\alpha \mu E^e + \alpha^2 B^e) \right] (\delta^{n+1})^e - \\
& \left[A^e + \theta_2 (\mu B^e - \alpha C^e) \right. \\
& \left. + \theta_4 (\mu^2 D^e - 2\alpha \mu E^e + \alpha^2 B^e) \right] (\delta^n)^e
\end{aligned} \tag{25}$$

eleman matrisleri kullanılarak matris formunda yazılabilir. $m=0, 1, \dots, N-1$ için tüm elemanların birleştirilmesi sonucunda δ zaman parametresine göre aşağıdaki lineer sistem elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left[A - \theta_1 (\mu B - \alpha C) - \right. \\
& \left. \theta_3 (-\mu^2 D - 2\alpha \mu E + \alpha^2 B) \right] \delta_j^{n+1} = \\
& \left[A + \theta_2 (\mu B - \alpha C) + \right. \\
& \left. \theta_4 (-\mu^2 D - 2\alpha \mu E + \alpha^2 B) \right] \delta_j^n
\end{aligned} \tag{26}$$

(26) sisteminin iterasyon ile çözülebilmesi için öncelikle $\delta_{-3}^0, \dots, \delta_{N+2}^0$ başlangıç değerleri

$$\begin{aligned}
 U(x_m, 0) &= \delta_{m-3}^0 + 57\delta_{m-2}^0 + 302\delta_{m-1}^0 + 302\delta_m^0 \\
 &\quad + 57\delta_{m+1}^0 + \delta_{m+2}^0, \quad m = 0, \dots, N \\
 U_x(x_0, 0) &= U_{xx}(x_0, 0) = U_{xxx}(x_0, 0) = 0, \\
 U_x(x_N, 0) &= U_{xx}(x_N, 0) = 0
 \end{aligned} \tag{27}$$

olarak verilen başlangıç şart ve sınır şartlar kullanılarak hesaplanmalıdır. x_m , $m = 0, \dots, N$ noktalarındaki U_m^{n+1} yaklaşık değeri ise $n\Delta t$ zamanında (26) sisteminden bulunan δ_m^n eleman parametreleri ve sektik B-spline yaklaşımı kullanılarak hesaplanabilir.

3. Test problemleri

Test problemlerinde önerilen üç metot için doğruluk

$$L_\infty = \max_m |u_m - U_m|, \tag{28}$$

$$\text{Yakınsaklık Oranı} = \frac{\log \left| \frac{(L_\infty)_{h_i}}{(L_\infty)_{h_{i+1}}} \right|}{\log \left| \frac{h_i}{h_{i+1}} \right|}, \tag{29}$$

formülü ile verilen yakınsaklık oranının (YO) hesaplanması ile kontrol edilecektir. YO hesaplanırken kullanılan $(L_\infty)_{h_i}$, h_i . konum artımı için bulunan L_∞ hata normuna karşılık gelmektedir.

2.2. Birinci test problemi

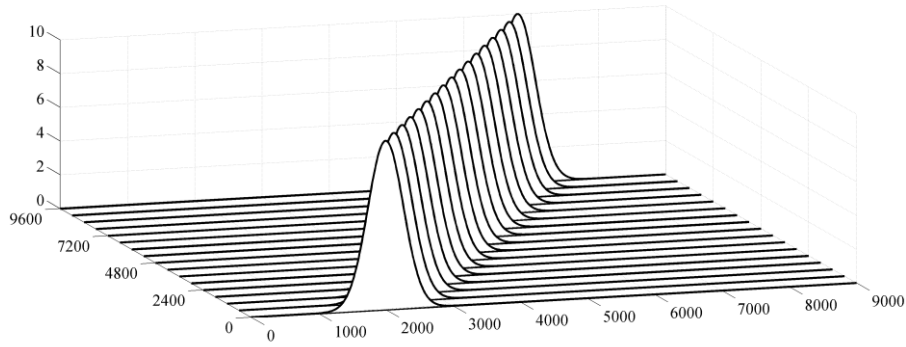
İlk test probleminde $\mu = 0$ seçimi yapılarak saf adveksiyon yayılımı çalışılacaktır. Bu durumda adveksiyon difüzyon denklemi

$$u(x, t) = 10 \exp \left(-\frac{(x - \tilde{x}_0 - \alpha t)^2}{2\rho^2} \right) \tag{30}$$

analitik çözümüne sahiptir. Sayısal çözüm için önerilen algoritmalar $[0, 9000]$ konum aralığında $\alpha = 0.5m/sn$ akış hızı, $\tilde{x}_0 = 2000m$ dalganın tepe noktasının konumu ve $\rho = 264$ seçimleri yapılarak $t = 9600sn$ zamanına kadar çalıştırılacaktır. Bu durumda problem

$$u(x, 0) = 10 \exp \left(-\frac{(x - \tilde{x}_0)^2}{2\rho^2} \right) \tag{31}$$

başlangıç koşuluna sahip bir dalganın $\alpha = 0.5m/sn$ akış hızıyla bir kanalda $t = 9600sn$ zamanına kadarki hareketini modellemektedir. Dolayısıyla dalga $96000sn$ içinde başlangıç noktasından $4800m$ uzağa hareket edecek ve bu esnada dalganın genliği 10 olarak sabit kalacaktır. İlk olarak $h = \Delta t = 20$ seçimleri yapılarak M3 programı $t = 9600sn$ zamanına kadar çalıştırılmış ve dalganın başlangıç durumu ve belirli zamanlardaki durumu Şekil 1 de çizilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi zaman boyunca dalganın şeklinde herhangi bir bozulma olmamaktadır.



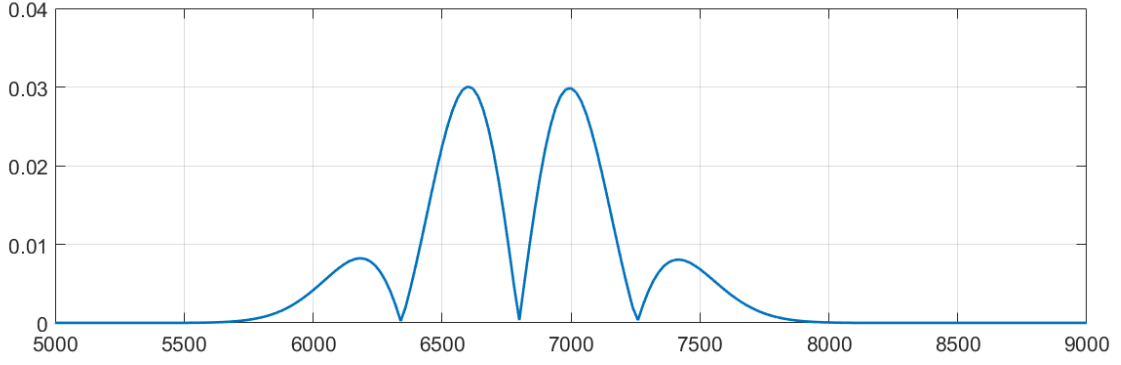
Şekil 1: $h = \Delta t = 20$ için dalganın hareketi.

Programlar $t = 9600sn$ zamanına kadar çalıştırılarak tüm yöntemler için L_∞ hata normları ve yakınsaklık oranları farklı zaman ve konum artımları için Tablo 1 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde en iyi sonucu M3 yönteminin verdiği ve YO' larının yöntemlerin teorik değerleri ile uyumlu olduğu görülebilir.

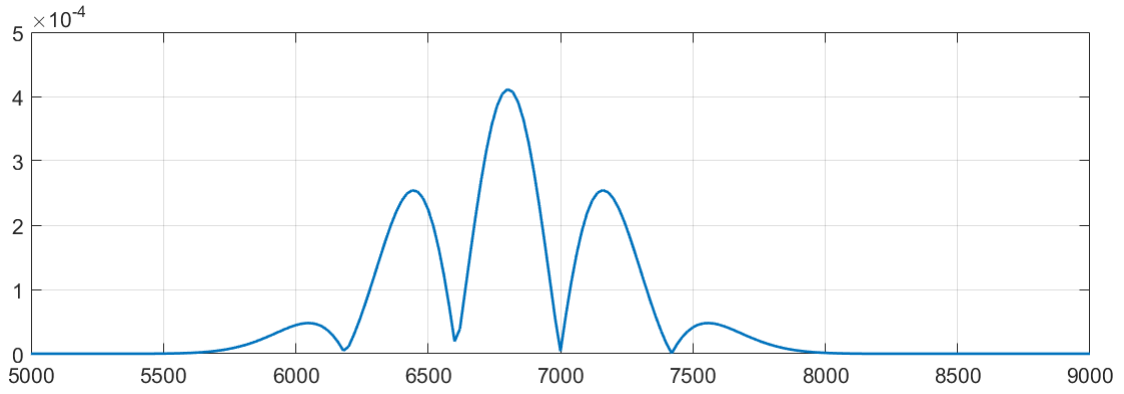
Tablo 1: L_∞ hata normları ve YO.

M1			M2		M3	
$h = \Delta t$	L_∞	YO	L_∞	YO	L_∞	YO
200	2.32	1.66	0.326	2.73	0.0378	4.43
100	0.734	2.95	0.049	2.94	0.00175	3.92
50	0.190	2.01	0.00638	2.99	0.000116	3.99
20	0.0301		0.000411		0.00000300	

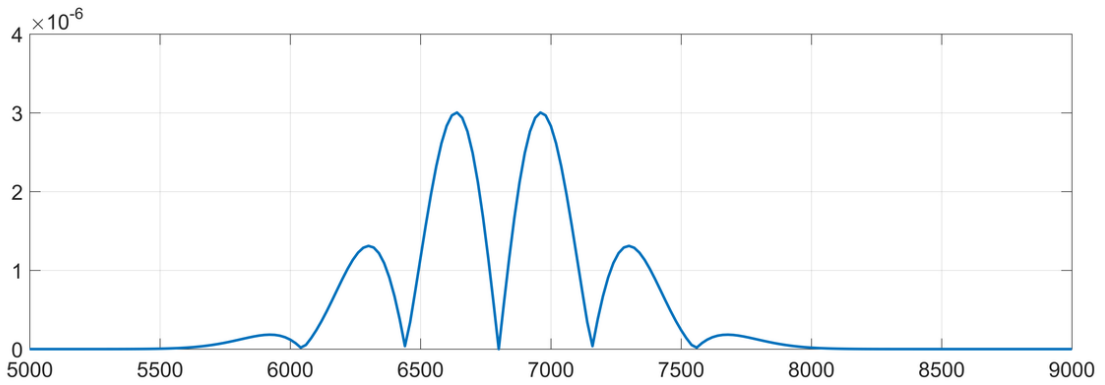
$t = 9600sn$ zamanında yaklaşık çözüm ile analitik çözüm arasındaki farkın mutlak değeri diğer bir ifade ile mutlak hata grafikleri her bir önerilen metot için Şekil 2 de çizilmiştir. Şekil 2 incelendiğinde her bir metot için maksimum hatanın konum aralığının orta noktalar civarında geldiği ve bu sebeple de sınır şartlarının uygulamasından kaynaklı bir hatanın oluşmadığı söylenebilir.



Şekil 2a: $h = \Delta t = 20$ için mutlak hata (M1).



Şekil 2b: $h = \Delta t = 20$ için mutlak hata (M2).



Şekil 2c: $h = \Delta t = 20$ için mutlak hata (M3).

2.2. İkinci test problemi

İkinci test probleminde adveksiyon ve difüzyon etkinin birlikte gerçekleştiği

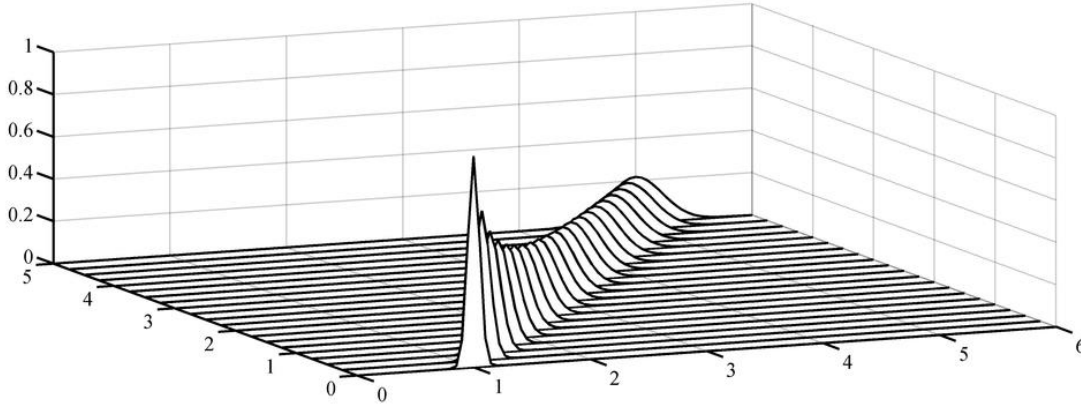
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x-\tilde{x}_0-\alpha t)^2}{\mu(4t+1)}\right) \quad (32)$$

analitik çözümü kullanılacaktır. Bu çözüm genliği $1/\sqrt{4t+1}$, başlangıçtaki tepe noktası

\tilde{x}_0 olup $[a, b]$ konum aralığının da sağa doğru genliğini kaybederek T zamanına kadar sabit bir α hızıyla hareket eden dalgayı modellemektedir. Problem için başlangıç şartı

$$u(x, 0) = \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x}_0)^2}{\mu}\right) \quad (33)$$

olacağından ikinci test problemi başlangıç anında yüksekliği 1 olan bir dalganın zaman içinde sönmelerini modellemektedir. Önerilen sayısal yöntemler $0 \leq x \leq 9$ konum aralığında $\alpha = 0.8m/sn$, $\mu = 0.005m^2/sn$ parametreleri ve $\tilde{x}_0 = 1$ başlangıç tepe noktası seçimi yapılarak programlar $t = 5$ zamanına kadar çalıştırılmıştır. $h = \Delta t = 0.005$ zaman ve konum artımları kullanılarak M3 yöntemi için başlangıç anındaki ve $t = 5$ zamanına kadarki bazı zamanlardaki dalgalar $[0, 9]$ konum aralığı boyunca Şekil 3 te gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi dalganın başlangıç noktasından 4 metre uzağa gittiği ve zaman boyunca dalganın genliğinde bir küçülme meydana geldiği görülebilir.



Şekil 3: $h = \Delta t = 0.005$ için dalganın hareketi.

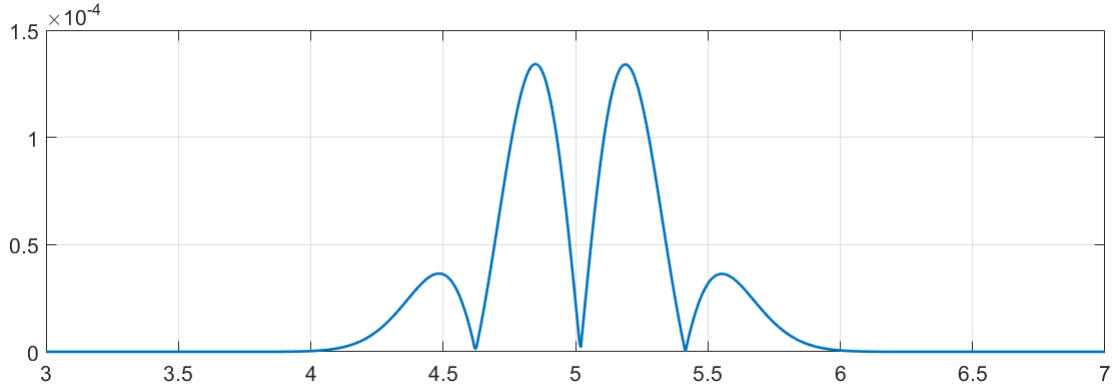
Programlar $t = 5sn$ zamanına kadar çalıştırılarak tüm yöntemler için L_∞ hata normları ve yakınsaklık oranları farklı zaman ve konum artımları için Tablo 2 de verilmiştir. Tablo incelendiğinde ilk test probleminde olduğu gibi en iyi sonucu M3 yönteminin verdiği ve YO'larının yöntemlerin teorik değerleri ile uyumlu olduğu görülebilir.

Tablo 2: L_∞ hata normları ve YO.

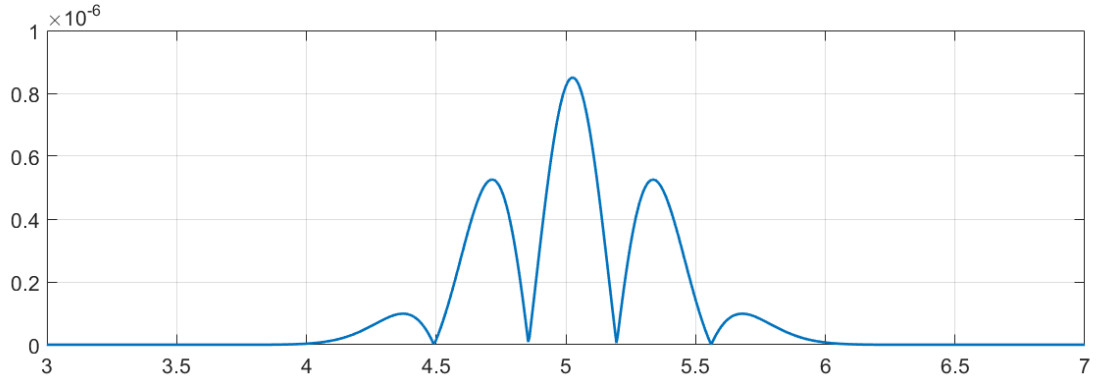
M1			M2		M3	
$h = \Delta t$	L_∞	YO	L_∞	YO	L_∞	YO
0.1	0.0549	1.96	0.00579	2.84	0.00278	4.78
0.05	0.0141	2.04	0.00081	2.96	0.00015	5.81
0.02	0.00217	2.01	0.0000539	2.99	0.00000073	3.99
0.010	0.000538	2.00	0.00000679	3.00	0.0000000459	3.99
0.005	0.000134		0.00000085		0.00000000287	

$t = 5sn$ zamanındaki mutlak hata grafikleri her bir önerilen metot için Şekil 4 de çizilmiştir. Şekil 4 incelendiğinde her bir metot için maksimum hatanın ilk test

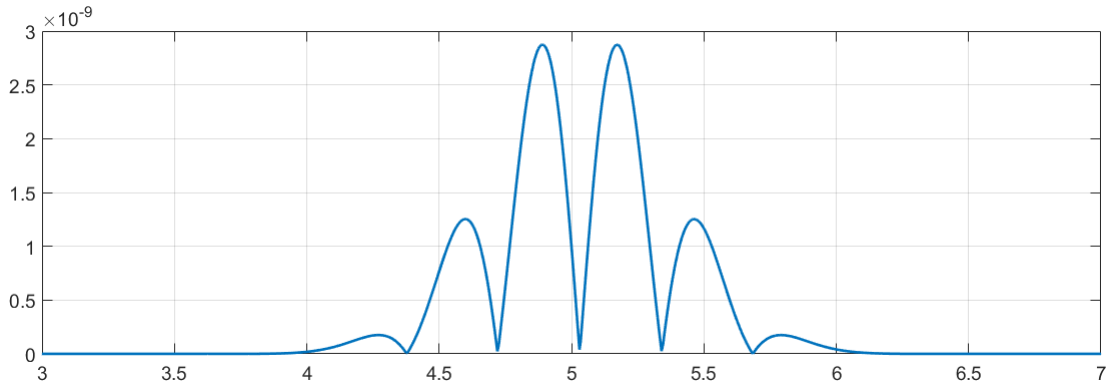
problemde olduğu gibi konum aralığının orta noktalar civarında geldiği görülebilir.



Şekil 4a: $h = \Delta t = 0.005$ için mutlak hata (M1).



Şekil 4b: $h = \Delta t = 0.005$ için mutlak hata (M2).



Şekil 4c: $h = \Delta t = 0.005$ için mutlak hata (M3).

4. Sonuçlar ve tartışma

Taylor seri açılımı yardımıyla elde edilen ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebeden doğruluğa sahip zaman parçalanması ile birlikte Galerkin sektik B-spline sonlu elemanlar yöntemi adveksiyon difüzyon denkleminin yaklaşık çözümü için önerilmiştir. Önerilen algoritmaların doğruluğunun kontrolü için iki test problemi kullanılmıştır.

Elde edilen sonuçlara göre önerilen yöntemlerin özellikle de zamana göre doğruluğu dört olan M3 yönteminin adveksiyon difüzyon denkleminin yaklaşık çözümü için uygun bir yöntem olduğu görülmüştür.

Kaynaklar

- [1] Karur, S.R. and Ramachandran, P.A., Augmented Thin Plate Spline Approximation in DRM, **Boundary Elements Communications**, 6, 55-58.(1995).
- [2] Dehghan, M., Weighted finite difference techniques for the one-dimensional advection-diffusion equation, **Applied Mathematics and Computation**, 147, 307-319 (2004).
- [3] Sari, M., Güraslan, G. and Zeytinoglu, A , High-Order finite difference schemes for solving the advection-diffusion equation, **Mathematical and Computational Applications**, 15 (3), 449-460 (2010).
- [4] Dağ, I., Irk, D. and Tombul M., Least-squares finite element method for the advection diffusion equation, **Applied Mathematics and Computation**, 173, 554-565 (2006).
- [5] Kapoor, S. and Dhawan, S., B-spline finite element technique for advection diffusion equation. **International Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, 6, 75-94 (2010).
- [6] Dağ, I. Canıvar, A. and Sahin, A., Taylor-Galerkin method for advection-diffusion equation, **Kybernetes** , 40, 762-777 (2011).
- [7] Dhawan, S., Kapoor, S. and Kumar, S., Numerical method for advection diffusion equation using FEM and B-splines, **Journal of Computational Science** 3,429-443 (2012).
- [8] Irk, D., Dağ, I. and Tombul, M., Extended cubic b-spline solution of the advection-diffusion equation, **KSCE Journal of Civil Engineering**, 19(4), 929-934 (2015).
- [9] Clough, R.W., The finite element method in plane stress analysis, **Proc. 2nd Conf. On Electronic Computation**, Pittsburgh (1960).
- [10] Ritz, W. Über eine neue methode zur lösung gewisser variations probleme der mathematischen physik, **J. Reine Angew. Math.**, 135, 1-61, (1908).
- [11] Rayleigh, J.W.S. On the theory of resonance, **Trans. Roy. Soc. (London)**, A161 77-118, (1870).
- [12] Rayleigh, J.W.S., **The Theory of Sound**, Dover Publications, 2nd Editon, (1945).
- [13] Galerkin, B.G., Stabe und Platten; Reihen in Gewissen Gleichgewichtspoblemen Elestischer Stabe und Platten, **Vestnik der Ingenieure**, 19 897-908, (1915).
- [14] Zienkiewicz, O.C and Morgan, K., **Finite Element and Approximation**, John Wiley & Sons, (1983).
- [15] Mohammadi, R., Sextic B-spline collocation method for solving Euler–Bernoulli Beam Models, **Applied Mathematics and Computation**, 241, 151-166, (2014)
- [16] Irk, D., Sextic B-spline collocation method for the modified burgers' equation, **Kybernetes**, 38(9) 1599-1620, (2009).