MJEN MANAS Journal of Engineering
http://journals.manas.edu.kg

MJEN 1 (1) (2013) 51–58

Trigonometrik Denklem Sistemlerinin Çözümünde Görsel ve Analitik Uygulama Üzerine Bir Çalışma

Ahmet Doğan
Kırgızistan-Türkiye Manas Ü. Fen Fak. Mat.Bl., Bişkek-Kırgızistan, ahmet.dogan@usak.edu.tr
Tel.: +996-0557-007-332

Elmira Abdildaeva
Kırgızistan-Türkiye Manas Ü. Fen Fak. Mat.Bl., Bişkek-Kırgızistan, efa_69@mail.ru

Received:29.05.2013; Reviewed:13.06.2013; Accepted:23.09.2013

Özet Trigonometrik denklem sistemlerinin çözümünde, diyagram ve grafik şeklindeki görsel imajlar hem problemin daha iyi anlaşılmasını hem de bilgilerin kalıcı olmasını sağlayan stratejilerdir. Grafiksel yaklaşım, denklem sisteminin çözümüne geniş bir bakış açısı kazandırır, kavramsal öğrenmeyi ve bilgi transferini kolaylaştırır. Bu çalışmada; $f(cos\theta, sin\theta) = 0,\ g(cos\theta, sin\theta) = 0$ olarak verilen iki denklemli bir trigonometrik denklem sisteminde analitik dönüşümler yapılarak $f(x, y) = 0,\ g(x, y) = 0$ eşitlikleri oluşturuldu. Bu yeni bağıntıların grafikleri ile birim çemberin grafiği aynı dik koordinat sisteminde çizilerek ortak noktaları arandı. Grafiklerin ortak noktasına karşılık gelen açı, çözüm kümesinin elemanı olarak alındı. Bu çalışmanın amacı; trigonometrik denklem sistemlerinin çözüm sürecinde, görsel ve analitik düşünce stratejilerini birleştirerek kavramsal öğrenmeyi kolaylaştırmaktır. Bu çalışmada grafik ile çözümde yeni bir bakış açısı ortaya konulmakta ve matematik dünyasına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Anahtar sözcükler: *Trigonometri, Denklem Sistemi, Açı, Grafik, Görsellik*

Study on the Visual and Analytical Application for Solution of Trigonometric Equation Systems

Abstract Solving trigonometric equations, diagrams, and graphics and visual images in the form of a better understanding of the problem as well as strategies for providing the information to be permanent. The graphical approach to the solution of equation system gives a wider perspective, conceptual learning, and facilitates the transfer of information. In this study, *f (cosθ, sinθ) = 0, g (cosθ, sinθ) = 0*, the two-equation system analytical transformations made a trigonometric equation *f (x, y) = 0, g (x, y) = 0* equations created. These new correlations perpendicular to the same coordinate system, drawing graphics, graph the unit circle with the common points searched. Graphs corresponding to the common point of the angle, the solution was taken as an element of the set. In this study, it was showed to facilitate conceptual learning with, the process of solution of trigonometric equations, combining visual and analytical thinking strategies. It was also considered to contribute to the world of mathematics.

Keywords *Trigonometry, Equation System, Angle, Graphics, Visualization.*

1. GİRİŞ

Bilginin hızlı bir değişim gösterdiği çağımızda, kavramlar bilgisinin ögrenimi büyük önem taşımaktadır. Özellikle trigonometrik denklem çözümlerinde öğrenciler; kavramsal öğrenmeyi olgunlaştırmadan, cebirsel yapılara bağlı olarak ezberledikleri bir takım formüllerle (analitik olarak) çözüm yapmaya alışmış olduklarından (Doğan,2001) işlemsel öğrenmeyle yetinerek kavramsal öğrenmeden uzaklaşmakta ve bu nedenle yanlış kavram imajları (kavramın zihindeki kodlanışı) geliştirebilmektedirler. Nesibov ve Yetim (2008), lise seviyesinde ileri matematik konularının genelikle hiçbir teoriye dayanmadan pratik olarak bir kaç formülle anlatıldığını, verilen bağıntılara ait örnekler çözülerek işlem pratikliği kazandırılmaya çalışıldığını ve bunun doğru bir öğretim şekli olmadığını belirtmişlerdir. Doğan (2001), Trigonometrik kavram yanılgıları ve trigonometri konularına karşı öğrenci tutumları üzerine yaptığı çalışmada; öğrencilerin sadece formüle dayalı işlemlerde başarılı olduklarını belirlemiş, formül ezberleyerek matematik öğrenilemeyeceğini vurgulamıştır.

Matematik kavramlarının çoğu üst düzeyde bilişsel etkinlikler gerektiren soyut kavramlardır (Baki,2000). Soyut kavramların somutlaştırılmasında ise görsellikler önemlidir. Görselleştirmeyi, soyut kavramların somut olarak ifade edilebileceği geometrik yapılar olarak söyleyebiliriz. Görselleştirmenin matematik ve matematik eğitimindeki yerine ilişkin çok yönlü araştırmalar yapılmıştır. Borba ve Villarreal (2005) görselleştirmeyi, öğrencinin kavrayışı ile dışsal bir araç arasında ikili yol izleyen bilişsel bir süreç olarak ifade etmektediler. Arcavi (2003), bu sürecin iki yönlü işlediğini (Kavrayış ↔ Dışsal araç) ve bu ikisi arasında geçiş yapmakta esnek olan ögrencilerin daha başarılı olduğunu belirtmiştir. Sweller (2002) görsel hafıza üzerine yaptığı bir çalışmada Görsel Kavramanın, insan bilişinin merkezi olduğunu ifade etmiştir. Boz (2005) matematik kavramların daha iyi anlaşılması için bilgisayar ortamında görselleştirmenin önemli olduğunu söylemektedir. Stylianov (2002) ise, soyut ve kompleks ifadelerin daha anlaşılır hale gelmesi için grafik çiziminin bir yöntem olduğunu savunmuştur. Analizde görsel düşünmenin ilk şartı şekillerden belirli özellikleri görmektir. Cebir ve geometrinin matematiksel düşünceleri anlamada alternatif diller olduğu ve kuralları anlamanın grafiklerle ilgili bulunduğu belirtilmiştir (George, 1997). Esasen bir trigonometrik denklemin çözümünde analitik düşünme (Cebirsel yaklaşım) ile görsel stratejiyi (grafiksel yaklaşım) birlikte kullanmanın kavramayı kolaylaştıracağı açıktır. Farklı stratejileri bir arada kullanmanın matematiksel anlamayı kolaylaştırdığı, özellikle görsel stratejinin hem kavramsal öğrenmede, hem de kalıcı öğrenme de önemli olduğu çeşitli araştırmalarda vurgulanmıştır (Özdemir, Duru, Akgün, 2005; Hegarty ve Koshevnikov, 1999; Presmeg, 1986a).

Trigonometrik denklemlerin ve trigonometrik denklem sistemlerinin çözümünde, analitik düşünce ile birlikte grafiklere dayalı görsel stratejinin kullanılması; öğrencinin çok yönlü düşünmesini ve bilgi transferini kolaylaştırdığı gibi kavramsal bilginin ve doğru kavram imajının oluşumunu da kolaylaştırır. Kavram imajı; kişinin bir kavrama ilişkin bilgileri zihninde kodladığı durumdur. Bu kodlama ile oluşan zihisel yapılar;grafik, tablo, şekil, matematiksel semboller olabilir. Kişi; kavram ile ilgili birden fazla kavram imajına sahip olabilir. Matematikte bir kavram, diğer matematik kavramlarla ilişkendirildiğinde anlamlı hale gelir.

2.YÖNTEM:

Bu çalışma literatür taramasına dayalı (Nitel Analiz Yöntemi) bir araştırmadır. Öncelikle; trigonometri ve trigonometrik denklem sistemleri ile ilgili literatür incelendi (Ademek,Penkalski,Valentine,2005; Aksoy,1972; Aufmann,Barker ve Nation,1997 ; Ayres ve Moyer,1998). Konu ile ilgili makale ve bildirilere ulaşıldı (Aldag,2005 ; Elmek,2007; Nasibov ve Yetim,2008 ; Obrukçu ve Gönülateş,2002). Problem çözme stratejileri incelendi (Ergin,1964 ; Fleming ve Varberg,1980 ; Larson ve Hostetler,1997). Görsellik yardımı ile soyut kavramların somutlaştırılması düşünüldü. Trigonometrik denklem sistemlerinin çözüm sürecinde, cebirsel yapılar ve temel algolitmaların kullanımı (Kenda ve Stacey,1997 ; Zimmermann ve Cunningham,1991) dışında nitel (Grafiksel) yaklaşım(Tasar,İngeç ve Güneş,2002) ele alındı. Trigonometrik fonksiyon tanımından hareketle düzlemde, birim çember üzerindeki (x, y) noktasının $(cos\theta, sin\theta)$ ile eşleştiği (Doğan,1984) dikkate alınarak bütün trigonometrik denklemlerin dik koordinatlarda $f(x, y) = 0$ olarak yazılabileceği düşünüldü. Bunun için trigonometrik denklem sisteminin çözüm sürecinde; $x = cos\theta$ ve $y = sin\theta$ dönüşümleri yapıldı ve grafikler çizilerek görsellik stratejisi kullanıldı.

3.TARTIŞMA VE BULGULAR:

3.1. Genel Açıklamalar: Bu çalışmada ;

$$\begin{aligned} f(cos\theta, sin\theta) &= 0 \\ g(cos\theta, sin\theta) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

eşitkileri ile verilen trigonometrik denklem sistemini çözerken görsel stratejinin kullanımı açıklanmış ve cebirsel yapı ile grafik bilgisi birleştirilmiştir. Böylece problem çözme sürecinde sonucu daha kolay görebilmek amaçlanmıştır. Dik koordinat sisteminde yatay eksen (x-ekseni) kosinüs ekseni, düşey eksen (y - ekseni) de sinüs ekseni olarak düşünüldüğü için $x = cos\theta$, $y = sin\theta$ dönüşümleri (I) sistemine uygulandığında ; $f(cos\theta, sin\theta) = 0 \;\Rightarrow\; f(x, y) = 0$ ve $g(cos\theta, sin\theta) = 0 \;\Rightarrow\; g(x, y) = 0$ eşitkileri bulunur. Aynı zamanda bir trigonometrik denklemi sağlayan açı, mutlaka birim çember üzerinde bir nokta ile eşleşir (Aksoy,1972 ; Doğan,1984). Buna göre ;

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

denklem sistemi oluşur. Her eşitliğe karşılık gelen grafik aynı dik eksen sisteminde çizilerek ortak bir noktalarının olup olmadığı görülür. Ancak bu grafikler ölçülü ve hassas olmalıdır. Eğer ortak nokta yok sa, (I) sisteminin çözüm kümesi boş küme ($Ç = \emptyset$) olur. Ortak nokta varsa, bu ortak nokta ile eşleşen açı (I) sisteminin çözüm elemanı olur. Ortak nokta ile eşleşen açılar sayılamaz çokluktadır (Stewar,Redline ve Watson,2001 ; Wells ve Tilson,1998). Bu açıların esas ölçüsü θ ise, çözüm kümesi $Ç = \{\theta + 2k\pi\}$, ($k \in Z$) olur. (I) Sisteminde denklemlerin kaçıncı derece olduğu önemli değildir. Biz bu çalışmamızda iki trigonometrik denklemden oluşan sistemin çözüm sürecini açıklayacağız. Dahaçok denklemli trigono metrik denk lem sistemlerinin çözümü de aynı yolla yapılabilir.

3.2. Birinci dereceden Bir Bilinmeyenli Trigonometrik Denklem Sisteminin Çözümü

Bir bilinmeyenli, birinci dereceden, iki trigonometrik denklemden oluşan bir sistemi düşünelim

$$\begin{aligned} a_1 cos\theta + b_1 sin\theta &= C_1 \\ a_2 cos\theta + b_2 sin\theta &= C_2 \end{aligned} \qquad \text{(III)}$$

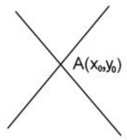
Bu denklem sisteminde ; $x = cos\theta$, $y = sin\theta$ dönüşümlerini yapalım.
$cos^2\theta + sın^2\theta = 1$ olduğu için $x^2 + y^2 = 1$ olduğu açıktır. Böylece, verilen (III) sistemi ;

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= C_1 \\ a_2 x + b_2 y &= C_2 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

denklem sistemine dönüşür. Doğruların ve birim çemberin grafiği çizilir ve ortak nokta aranır. Denklem sistemini sağlayan noktalar dik koordinat sisteminde işaretlenir. Ortak noktalara karşılık gelen açılar çözüm kümesini oluşturur. Eğer ortak nokta yoksa çözüm boş küme olur. Bu çalışmada ; trigonometrik denklemler , kutupsal koordinatlardan kartezyen koordinatlara dönüştürüldüğü için , grafik çizimlerinde kolaylık sağlanmaktadır.

Çözüm ile ilgili olası durumlar:

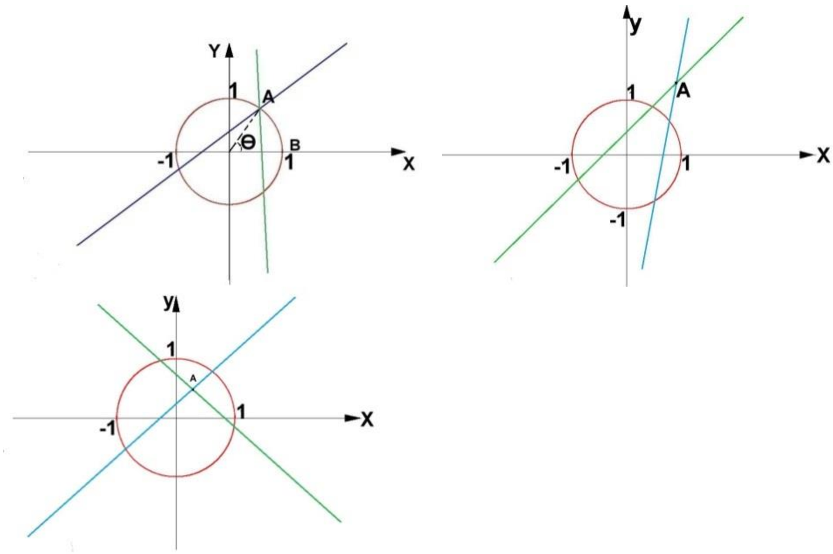
i) $$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= C_1 \\ a_2 x + b_2 y &= C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad a_1 b_2 \neq a_2 b_1$$



Bu durumda doğrular $A(x_0, y_0)$ noktasında kesişirler. A noktası, birim çemberin denklemini de sağlarsa $x_0{}^2 + y_0{}^2 = 1$ olur.

Şekil 1. Kesişen Doğrular

Böylece (IV) deki denklemlerin grafikleri çizilgiğinde her üç grafik de A noktasından geçer. Şekil.2.a da olduğu gibi $B\hat{O}A$ açısının ölçüsü $\boldsymbol{\theta}$ ise $Ç = \{\theta + 2k\pi\}$, $(k \in Z)$ olur. Eğer $x_0{}^2 + y_0{}^2 \neq 1$ ise denklem sisteminin çözümü boş küme olur (şekil.2.b ve şekil.2.c).



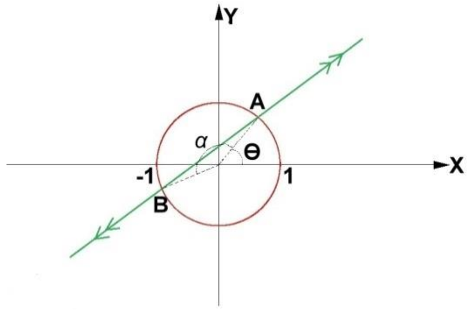
Şekil 2.a   Şeki 2.b   Şekil 2.c

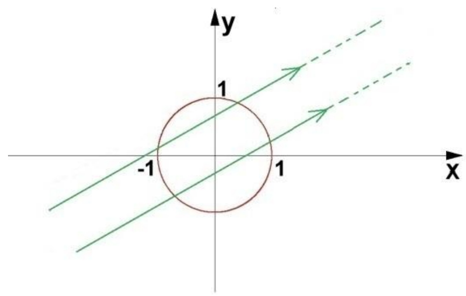
Şekil 2. Çözümün Grafikle Gösterilişi.

$$\text{ii)} \qquad \left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = C_1 \\ a_2x + b_2y = C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad a_1b_2 = a_2b_1$$

Bu durumda doğrular ya çakışıktır $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{C_1}{C_2}\right)$ ya da paraleldir $\left(\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{C_1}{C_2}\right)$. Çözüm kümesi;

Şekil.3.a daki gibi $Ç = \{\theta + 2k\pi, \alpha + 2k\pi\}$, $(k \in Z)$ olur veya şekil.3b. deki gibi boş küme $(Ç = \emptyset)$olur.



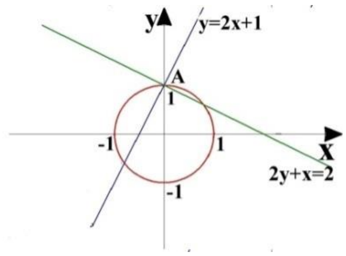


Şekil 3.a   Şekil 3.b

Şekil 3. Çözümün Grafikle Gösterilişi

Etkinlik.1: $sin\theta - 2cos\theta = 1$
$2sin\theta + cos\theta = 2$ sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Burada; $x = cos\theta, y = sin\theta$ dönüşümlerini yapalım.
$y - 2x = 1,\ 2y + x = 2,\ x^2 + y^2 = 1$ denklemleri oluşur. Bu eşitliklere ait grafikleri çizelim.

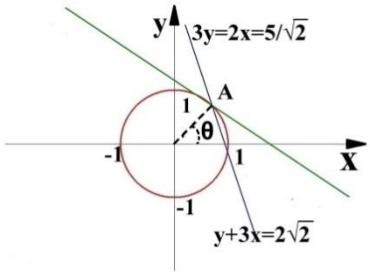


Şekil 4. Etkinlik.1. in Çözüm Grafiği

Her üç grafiğin de $A(0,1)$ noktasında kesiştiği görülüyor. A noktasına karşılık gelen açıların esas ölçüsü $\frac{\pi}{2}$ radyandır. Çözüm kümesi $Ç = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\},(k \in Z)$ olur.

Etkinlik.2: $3sin\theta + 2cos\theta = \frac{5}{\sqrt{2}}$
$sin\theta + 3cos\theta = 2\sqrt{2}$ denklem sisteminin çözüm kümesine bulunuz.

Verilen eşitliklerde ; $x = cos\theta, y = sin\theta$ dönüşümlerini yapalım.
$3y + 2x = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $y + 3x = 2\sqrt{2}$, $x^2 + y^2 = 1$ olur. Bu eşitkilere ait grafikleri çizelim.



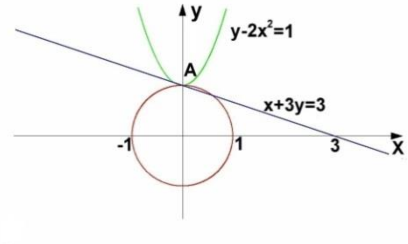
Şekil 5. Etkinlik.2.nin Çözüm Grafiği.

Birim çember üzerinde kesiştikleri ortak nokta A olup bu nokta ile eşleşen açı $\boldsymbol{\theta}$ ise $Ç = \{\theta + 2k\pi\},\ (k \in Z)$ olur. Görülüyorki, grafik çizerek görselleştirdiğimiz bu durum çözümün varlığı ile ilgili kesin bir değerlendirme yapmamızı kolaylaştırıyor. Ancak, A noktasına karşılık gelen açının ölçüsünü net olarak göremiyoruz. Bu durumda cebirsel yapılardan (analitik çözümden) faydalanmak zorundayız.

$$\left.\begin{aligned} 3y + 2x &= \frac{5}{\sqrt{2}} \\ y + 3x &= 2\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ bulunur. Ohalde *A* noktası $y = x$ doğrusu üzeride olduğundan $\boldsymbol{\theta}= \frac{\pi}{4}$ radyan olur. $Ç = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\},\ (k \in Z)$ olarak belirlenir. Anlaşılıyor ki bir tek strateji kullanımı bizi kesin çözüme götürmeyebiliyor. Analitik düşünce ile görsel stratejiyi birlikte kullanmakla çözümün daha kolay belirlenmesini ve bilgi transferinin oluşumunu sağlamış oluyoruz.

Etkinlik.3: $cos\theta + 3sin\theta = 3$
$sin\theta - 2cos^2\theta = 1$ sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

$x = cos\theta, y = sin\theta$ dönüşümlerini yapalım. $x + 3y = 3,\ y - 2x^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 1$ olur. Bu eşitkilere ait grafikleri çizelim.



Şekil 6. Etkinlik.3 ün Çözüm Grafiği

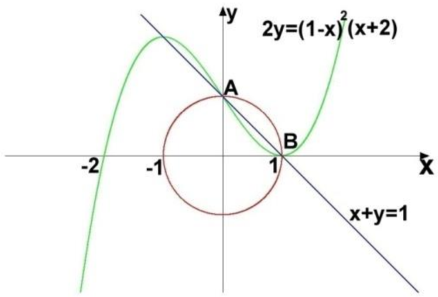
Görülüyorki her üç grafiğin ortak noktası *A* dır. Bu *A* noktası ile eşleşen açı $\frac{\pi}{2}$ radyandır. O halde çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}, (k \in Z)$ olur.

Etkinlik.4: $2sin\theta = (1 - cos\theta)^2(2 + cos\theta)$
$1 = sin\theta + cos\theta$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

$x = cos\theta, y = sin\theta$ dönüşümlerini yapalım

$$2y = (1 - x)^2(x + 2)$$
$$1 = x + y$$
$$1 = x^2 + y^2$$

Denklem sistemi oluşur. Her üç eşitliğe ait grafiği çizelim.



Şekil 7. Etkinlik.4 ün Çözüm Grafiği

Her üç grafikte de ortak olan noktalar *A* ve *B* dir. A noktası $\frac{\pi}{2}$ radyan ile, B noktası da 0^0 ile eşleşmektedir.
$Ç = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right\}, (k \in Z)$ olur.

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ; trigonometrik denklem sistemlerinin çözümünde , grafiklerle görselleştirmenin çözümü kolaylaştırdığı ve çözüm kümesinin daha kolay belirlenebildiği görülmektedir. Ayrıca; çözüm kümesinin boş küme olup olmadığının grafik üzerinden kolayca görülebildiği belirlenmiştir.Çözüm yapılırken verilen trigonometrik bağıntının grafiğinin değil , dönüşümlerle bulunan basit bağıntıların grafiği çizilmektedir. Ancak ; bazı trigonometrik denklem sistemlerinin çözüm kümesini belirlemek için grafik ile birlikte analitik çözüme de ihtiyaç duyulduğu görülmektedir. Böylece , bir problemin çözümünde bir tek strateji kullanımının yeterli olmayabileceği de vurgulanmıştır.

Sağlam ve Bülbül'e (2012) göre, görselleştirme sürecini desteklemeyen bir öğretimin sonucu olarak veya öğrencilerin bazı ilişkileri görsel anlamda yeterince sorgulamamış olmaları ve görselleştirme süreci konusundaki deneyimsizlikleri nedeniyle öğrenciler ; problem çözerken grafik çizmekte isteksiz davranıyorlar.Nitekim 2005 yılında; Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) tarafından öğretim programında yapılan yeni düzenlemede görselleştirmenin önemli olduğu vurgulanmaktadır. Görsel strateji kullanımı öğrencilerin yorum yapma ve farklı çözüm yolları üretme yeteneklerini de geliştirecektir. Bu çalışmada trigonometrik eşitlikler , dönüşümler yapılarak analitik eşitliklere dönüştürüldü. Zaten grafik çizmek istemeyen öğrenciler için trigonometrik bağıntıların grafiğini çizmek zordur ama analitik eşitliklerin grafiklerini çizmek daha kolaydır. Matematik Öğretiminin her aşamasında görsel ve analitik stratejiyi birlikte kullanmak, öğrenmeyi daha verimli hale getirecektir (Tasar,İngeç ve Güneş,2002). Görsel ve analitik stratejinin birlikte kullanımı hem kavramsal öğrenmeyi kolaylaştıracak, hem de işlem pratikliğine yardımcı olacaktır. Öğrencilerin bir trigonometrik denklem sistemini çözerken, trigonometrik dönüşümlerden faydalanıp sonuca gitmeleri zor olabilir. Aynı sistemin çözümünü grafik çizerek çok daha kolay bir şekilde görebilirler. Görsel strateji kullanıldığında kavramlarla ilgili eksikliklerin giderilerek bilgi transferinin kolaylaşması da sağlanmaktadır (Örnek,2007). Sağlam ve Bülbül (2012) yaptıkları bir araştırmada; sadece görsel süreçte değil , analitik süreçte de var olan bir takım kavramsal eksikliklerin giderilmesi konusunda görsel stratejilerin yararlı olduğunu belirlemişlerdir.

Her kademe matematik öğretiminde mutlaka görselleştirme kullanılmalı, öğrencilerin bu stratejide daha başarılı olacakları düşüncesine inanmaları sağlanmalıdır. Bu çalışmada sadece ; bir açıya bağlı, iki denklemden oluşan trigonometrik denklem sistemleri ele alınmıştır. Daha sonra yapılacak olan araştırmalarda denklem sayısı daha çok olan ve iki açıya bağlı denklem sistemlerinin çözümü de aynı düşünce ile incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Adamek,T., Penkalski,K., Valentine, G., “The History of Trigonometry, History of Mathematics”, www.math.rutgers.edu/~mjraman/ History Of Trig.pdf. (2005).

[2] Aksoy,Y. (1972). “Trigonometri”, İstanbul Devlet Mühendislik Mimarlık Akademisi Yayınları, İstanbul.

[3] Aldağ,H. (2005). “Öğrenmeve ÖğretmedeA. Paivio’nun Đkili Kodlama Kuramı”, Ç.Ü. Sosyal Bilimler Enst., 14(2):29-48.

[4] Arcavi,A. (2003). The role of vısual representatıons ın the learnıng of mathematics Educatıonal Studıes in Mathematics, 52, 215-241

[5] Aufmann,R.N., Barker,V.C.;Nation,R.D. (1997). “College Algebra and Trigonometry”, Third Edition, Houghton Mifflin Company, Boston, New York.

[6] Aufmann,R.N., Barker,V.C.;Nation,R.D. (1997). “College Algebra and Trigonometry”, Third Edition, Houghton Mifflin Company, Boston, New York.

[7] Ayres,F.Jr., Moyer,R.E. (1998). “Schaum’s Outline Of Theory and Problems Of Trigonometry: with calculator-based solutıons”, Third Edition, Mc Graw-Hill International Editions, Singapore.

[8] Baki,A.,(2000). Bilgisayar Donanımlı Ortamda matematik Öğrenme" Hacettepe Ünv. Eğt.Fak.Dergisi.19, 86-193

[9] Borba,M.C. Vevillarreal, M.E. (2005). Visualization, Matematics Education and computer enviroments. İn A.J.Bishop (Ed). Humans-Wıth-media and the reorganization of mathematical thinking. America:Springer Science + Business Media.

[10] Boz,N., (2005). Dynamic Visualization and Software Environments. The Turkish online journal of educational Technology-Tojet. Vol:4, 26-32.

[11] Doğan,A. (1984). “Çözümlü Modern Matematik”, DiltaşYayınları, Konya

[12] Doğan,A. (2001). “Genel Liselerde Okutulan Trigonometri Konularının Öğretiminde Öğrencilerin Yanılgıları,Yanlışlarıve Trigonometri Konularına Karşı Öğrenci Tutumları Üz Araştırma”, Doktora Tezi, Fen BilimleriEnstitüsü, Konya

[13] Doğan,A., Şenay,H.(2001). “Genel Liselerde Trigonometri Öğretimi Üzerine Matematik Öğrelerinin Görüşleri”, IV. Fen Bilimleri Eğitimi Kongresi, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

[14] Elmek,B. (2007). “DinamikModellemeİle Bilgisayar DestekliTrigonometri Öğretimi Lisans Tezi, Fen BilimleriEnst., Konya.

[15] Ergin,H.F. (1964). “Çözülmüş Trigonometri Problemleri”, C.2, ŞafakKitabevi, İstanbul.

[16] Ersoy, Y. (2003). ”Teknoloji Destekli Matematik Eğitimi-1: Gelişmeler, Politikalar ve Strat İlköğretim Online 2(1), s. 18-27.
[17] Fleming, W., Varberg,D. (1980). “Algebra and Trigonometry”, Prentice-Hall Inc,Englewood Cliffs, New Jersey.
[18] George, E.A. (1997). Reasoning with visual representations: Student’s use of diagrams, figures and graphs in solving problems advanced placement calculus examination. Unpublished Phd Dissertation, The university of Pittsburgh, USA.
[19] Hegarty, M. ve Kozhevnikov, M. (1999).Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. Jurnal of Educatıonal Psychology. 91, 684-689
[20] Kendal, M., Stacey, K. (1997). “Teaching trigonometry”, http://staff.edfac.unimelb. edu.au/~kayecs/publications/1997/KendalStacey-Trig. pdf
[21] Larson, R.E., Hostetler, R.P. (1997). “Trigonometry”, 4th ed. Houghton Mifflin Company, Boston, New York.
[22] Nasibov, F.N. ve Yetim,S. (2008). "Elemanter matematik ve Yüksek matematik Kavramları Hakkında". Fırat Üniv.Fen ve Müh. Bil. Derğisi, 20(3), 423-431.
[23] Oprukçu,F., Gönülates,G. (2002). “Farklılaştırılmış Eğitimin Trigonometri Konusu Üze Uygulaması”, V. Ulusal Fen BilimleriVeMatematikEğitimiKongresi, ODTÜ, Ankara.
[24] Orhun,N. (2004). “Student’s mistakes and misconceptions on teaching oftrigonometry”, Journal of Curriculum Studies, Vol.32, http://math.unipa.it/~grim/AOrhun.
[25] Örnek,S. (2007). “Trigonometrik Kavramların Canlandırma Yöntemiyle Öğrenilmesinin Öğrencilerin Matematik Başarısına Etkisi”, Yüksek Lisans Tezi,EğitimBilimleriEnst., M.Ü., İstanbul.
[26] Özdemir, M.E., Duru, A. Ve Akgün,Z. (2005), İki ve üç boyutlu düşünme: iki ve üç boyutlu geometriksel şekillerle bazı özdeşliklerin görselleştirilmesi. Kastamonu. Eğitim Derğisi, 3(2),527-540.
[27] Presmeg,N.C. (1986a). Visualization and mathematical giftedness. Educational Studies in mathematics, 17, 297-311
[28] Sobel,M.A., Lerner,N.(1987). “Algebra and Trigonometry a Pre Calculus Approach”, 3rd ed. Prentice- Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.
[29] Stewar,J., Redline,L., Watson,S.(2001). ‘Algebra and trigonometry’, Books/Cole Thomson Learnıng,
[30] Sağlam,Y. veBülbül,A. (2012), Üniversite Öğrencilerinin görselve Analitik Stratejileri, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fak.Dergisi, 3,398-409.
[31] Stylianou,D.A., (2002). On the intraction of visualization and analysis: The negotiation of visual representation in expert problem solving, the journal Mathematical Behaviour, 21(3), 303-317.
[32] Sweller.J., (2002). Visualization and instructional Des’gn International Workshop on Dynamic Visualizations and Learning, Tübingen-Germany.
[33] Tasar,M.F., İngeç,S.K., Güneş,P.Ü. (2002). “GrafikÇizmeveAnlamaBecerisinSaptanmasV.Ulusal Fen bilimleri Ve Matematik Eğitimi Kongresi, ODTÜ, Ankara.
[34] Zimmermann, W.ve Cunningham, S. (1991). Editor’s Introductıon: What is mathematical visualization? In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds) Visualization in teaching and learning mathematics, 1-8 Mathematical Association of America, Washinggton Dc., America.
[35] Wells, D., Tilson.L.(1998). Algebra and Trigonometry. Prentice-Hall Inc, New Jersey