

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}} \right\}; y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}} \right\}$$

Maksimumlu fark denklem sisteminin çözümleri

Dağıstan ŞİMŞEK

Kırgızistan Türkiye Manas Üniversitesi, Bişkek, Kırgızistan; Selçuk Üniversitesi, Konya, Türkiye
dagistan.simsek@manas.edu.kg

Mustafa ERÖZ

Sakarya University, Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences, Sakarya, Türkiye,
mustafaeroz@gmail.com

Received: 30.06.2015; Accepted: 16.10.2015

Öz *Aşağıdaki fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği ve davranışları incelenmiştir.*

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}} \right\}; y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}} \right\} \quad (1)$$

Başlangıç şartları pozitif reel sayılardır.

Anahtar Sözcükler: Fark Denklemi, Maksimum Operatörü, Yarı Dönmeler, Periyodiklik

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}} \right\}; y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}} \right\}$$

Solutions of the system of maximum difference equations

Abstract *The behaviour and periodicity of the solutions of the following system of difference equations is examined*

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}} \right\}; y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}} \right\} \quad (1)$$

where the initial conditions are positive real numbers.

Keywords *Difference Equation, Maximum Operations, Semicycle, Periodicity*

GİRİŞ

Son zamanlarda, lineer olmayan fark denklemlerinin periyodikliği ile ilgili ilginç çalışmalar yapılmaktadır. Özellikle fark denklem sisteminin periyodikliği, pozitif ve negatif yarı dönmeleri gibi çözümlerin davranışları incelenmektedir. Birçok araştırmacı, son yıllarda özellikle maksimumlu fark denklemleri ve maksimumlu fark denklem sistemleri ile ilgili araştırma yapmışlardır. Örneğin [1-31].

Tanım 1 : $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s})$ $n = 0, 1, 2, \dots$ için (2)

fark denkleminde $\bar{x} = f(\bar{x}, \dots, \bar{x})$ oluyorsa \bar{x} ye denge noktası denir.

Tanım 2 : \bar{x} , (2) denkleminin pozitif bir denge noktası olsun. (2) denkleminin bir $\{x_n\}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ terimlerinin bir dizisinden oluşur ve bunların hepsi \bar{x} denge noktasına eşit veya büyük bütün terimlerdir. Öyle ki $l \geq 0$ ve $m \leq \infty$ olur ve burada ya $l = 0$ ya da $l > 0$ ve $x_{l-1} < \bar{x}$; ve, ya $m = \infty$ ya da $m < \infty$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$ dir.

Tanım 3 : \bar{x} , (2) denkleminin negatif bir denge noktası olsun. (2) denkleminin bir $\{x_n\}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ terimlerinin bir dizisinden oluşur ve bunların hepsi \bar{x} denge noktasından daha küçük terimlerdir. Öyle ki $l \geq 0$ ve $m \leq \infty$ olur ve burada ya $l = 0$ ya da $l > 0$ ve $x_{l-1} \geq \bar{x}$ veya $m = \infty$ ya da $m < \infty$ ve $x_{m+1} \geq \bar{x}$ dir.

Tanım 4 : Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi P periyotludur denir ve P bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

ANA SONUÇLAR

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\} \quad (1)$$

Şimdi (1) denkleminin pozitif denge noktasını bulalım.

$$\bar{x} = \max\left\{\frac{1}{\bar{x}}, \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right\}; \bar{y} = \max\left\{\frac{1}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right\} \text{ olur. Buradan}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}} \text{ veya } \bar{x} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}; \bar{y} = \frac{1}{\bar{y}} \text{ veya } \bar{y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \text{ elde edilir. } (\bar{x})^2 = 1 \text{ ve } (\bar{y})^2 = 1 \text{ bulunur. Buradan da}$$

$$\bar{x} = 1 \text{ ve } \bar{y} = 1 \text{ elde edilir.}$$

Lemma 1 : (1) denklemini için $1 < x_0 < y_{-1} < y_0 < x_{-1}$, $1 < x_0 < y_0 < x_{-1} < y_{-1}$, $1 < x_0 < y_0 < y_{-1} < x_{-1}$, $1 < y_0 < x_{-1} < x_0 < y_{-1}$, $1 < y_0 < x_0 < x_{-1} < y_{-1}$, $1 < y_0 < x_0 < y_{-1} < x_{-1}$ başlangıç şartlarına göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

a) X_n ve Y_n çözümleri için her pozitif yarı dönme üç terimden oluşur.

- b) X_n ve Y_n çözümleri için her negatif yarı dönme iki terimden oluşur.
- c) X_n ve Y_n çözümleri için üç uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi iki uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder.
- d) X_n ve Y_n çözümleri için iki uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi üç uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder.

İspat: $1 < x_0 < y_{-1} < y_0 < x_{-1}$, $1 < x_0 < y_0 < x_{-1} < y_{-1}$, $1 < x_0 < y_0 < y_{-1} < x_{-1}$, $1 < y_0 < x_{-1} < x_0 < y_{-1}$, $1 < y_0 < x_0 < x_{-1} < y_{-1}$, $1 < y_0 < x_0 < y_{-1} < x_{-1}$ başlangıç şartlarına göre

$$\begin{array}{ll}
 x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{y_0}{x_{-1}}\right\} = \frac{y_0}{x_{-1}} < \bar{x} & y_1 = \max\left\{\frac{1}{y_{-1}}, \frac{x_0}{y_{-1}}\right\} = \frac{x_0}{y_{-1}} < \bar{y} \\
 x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{y_1}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_{-1}}\right\} = \frac{1}{x_0} < \bar{x} & y_2 = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{x_1}{y_0}\right\} = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = \frac{1}{y_0} < \bar{y} \\
 x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{y_2}{x_1}\right\} = \max\left\{\frac{x_{-1}}{y_0}, \frac{x_{-1}}{y_0^2}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_0} > \bar{x} & y_3 = \max\left\{\frac{1}{y_1}, \frac{x_2}{y_1}\right\} = \max\left\{\frac{y_{-1}}{x_0}, \frac{y_{-1}}{x_0^2}\right\} = \frac{y_{-1}}{x_0} > \bar{y} \\
 x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{y_3}{x_2}\right\} = \max\{x_0, y_{-1}\} = y_{-1} > \bar{x} & y_4 = \max\left\{\frac{1}{y_2}, \frac{x_3}{y_2}\right\} = \max\{y_0, x_{-1}\} = x_{-1} > \bar{y} \\
 x_5 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \frac{y_4}{x_3}\right\} = \max\left\{\frac{y_0}{x_{-1}}, y_0\right\} = y_0 > \bar{x} & y_5 = \max\left\{\frac{1}{y_3}, \frac{x_4}{y_3}\right\} = \max\left\{\frac{x_0}{y_{-1}}, x_0\right\} = x_0 > \bar{y} \\
 x_6 = \max\left\{\frac{1}{x_4}, \frac{y_5}{x_4}\right\} = \max\left\{\frac{1}{y_{-1}}, \frac{x_0}{y_{-1}}\right\} = \frac{x_0}{y_{-1}} < \bar{x} & y_6 = \max\left\{\frac{1}{y_4}, \frac{x_5}{y_4}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{y_0}{x_{-1}}\right\} = \frac{y_0}{x_{-1}} < \bar{y} \\
 x_7 = \max\left\{\frac{1}{x_5}, \frac{y_6}{x_5}\right\} = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = \frac{1}{y_0} < \bar{x} & y_7 = \max\left\{\frac{1}{y_5}, \frac{x_6}{y_5}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_{-1}}\right\} = \frac{1}{x_0} < \bar{y} \\
 x_8 = \max\left\{\frac{1}{x_6}, \frac{y_7}{x_6}\right\} = \max\left\{\frac{y_{-1}}{x_0}, \frac{y_{-1}}{x_0^2}\right\} = \frac{y_{-1}}{x_0} > \bar{x} & y_8 = \max\left\{\frac{1}{y_6}, \frac{x_7}{y_6}\right\} = \max\left\{\frac{x_{-1}}{y_0}, \frac{x_{-1}}{y_0^2}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_0} > \bar{y} \\
 x_9 = \max\left\{\frac{1}{x_7}, \frac{y_8}{x_7}\right\} = \max\{y_0, x_{-1}\} = x_{-1} > \bar{x} & y_9 = \max\left\{\frac{1}{y_7}, \frac{x_8}{y_7}\right\} = \max\{x_0, y_{-1}\} = y_{-1} > \bar{y} \\
 x_{10} = \max\left\{\frac{1}{x_8}, \frac{y_9}{x_8}\right\} = \max\left\{\frac{x_0}{y_{-1}}, x_0\right\} = x_0 > \bar{x} & y_{10} = \max\left\{\frac{1}{y_8}, \frac{x_9}{y_8}\right\} = \max\left\{\frac{y_0}{x_{-1}}, y_0\right\} = y_0 > \bar{y} \\
 \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots
 \end{array}$$

elde edilir.

$$x_1 < \bar{x}, x_2 < \bar{x}, x_3 > \bar{x}, x_4 > \bar{x}, x_5 > \bar{x}, x_6 < \bar{x}, x_7 < \bar{x}, x_8 > \bar{x}, x_9 > \bar{x}, x_{10} > \bar{x}, \dots$$

buradan da görüldüğü gibi X_n çözümleri NNNPPPNNPPP... şeklindedir.

$$y_1 < \bar{y}, y_2 < \bar{y}, y_3 > \bar{y}, y_4 > \bar{y}, y_5 > \bar{y}, y_6 < \bar{y}, y_7 < \bar{y}, y_8 > \bar{y}, y_9 > \bar{y}, y_{10} > \bar{y}, \dots$$

buradan da görüldüğü gibi Y_n çözümleri NNPPPNNPPP... şeklindedir.

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\}$$

ŞİMŞEK, ERÖZ, Maksimumlu fark denklem
sisteminin çözümleri

X_n ve Y_n çözümleri için her pozitif yarı dönmenin üç terimden oluştuğu görülmektedir.

X_n ve Y_n çözümleri için her negatif yarı dönmenin iki terimden oluştuğu görülmektedir.

Üç uzunluğundaki her pozitif yarı dönme iki uzunluğundaki negatif yarı dönmenin takip ettiği X_n ve Y_n çözümlerinden görülmektedir.

İki uzunluğundaki her negatif yarı dönme üç uzunluğundaki pozitif yarı dönmenin takip ettiği X_n ve Y_n çözümlerinden görülmektedir.

Böylece Lemmanın ispatı gösterilmiştir.

Lemma 2 : (1) denklemi için $1 < x_{-1} < x_0 < y_{-1} < y_0$, $1 < x_{-1} < x_0 < y_0 < y_{-1}$, $1 < x_{-1} < y_0 < x_0 < y_{-1}$, $1 < x_0 < x_{-1} < y_{-1} < y_0$, $1 < x_0 < x_{-1} < y_0 < y_{-1}$, $1 < x_0 < y_{-1} < x_{-1} < y_0$ başlangıç şartlarına göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- $n \geq 2$ için X_n ve tüm Y_n çözümlerinde her pozitif yarı dönme iki ve dört terimden oluşur.
- X_n ve Y_n çözümleri için her negatif yarı dönme iki terimden oluşur.
- $n \geq 2$ için X_n ve tüm Y_n çözümleri için iki veya dört uzunluğundaki her pozitif yarı dönme iki uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder.
- X_n ve Y_n çözümleri için iki uzunluğundaki her negatif yarı dönme iki veya dört uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder.

İspat: Lemma 2 nin ispatı Lemma 1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 3 : (1) denklemi için $1 < x_{-1} < y_{-1} < x_0 < y_0$, $1 < x_{-1} < y_{-1} < y_0 < x_0$, $1 < x_{-1} < y_0 < y_{-1} < x_0$, $1 < y_{-1} < x_{-1} < x_0 < y_0$, $1 < y_{-1} < x_{-1} < y_0 < x_0$, $1 < y_{-1} < x_0 < x_{-1} < y_0$ başlangıç şartlarına göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- $n \geq 2$ için X_n ve Y_n çözümlerinde her pozitif yarı dönme üç terimden oluşur.
- X_n ve Y_n çözümleri için her negatif yarı dönme iki terimden oluşur.
- $n \geq 2$ için X_n ve Y_n çözümleri için üç uzunluğundaki her pozitif yarı dönme iki uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder.
- X_n ve Y_n çözümleri için iki uzunluğundaki her negatif yarı dönme üç uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder.

İspat: Lemma 3 ün ispatı Lemma 1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 4 : (1) denklemi için $1 < y_0 < x_{-1} < y_{-1} < x_0$, $1 < y_0 < y_{-1} < x_{-1} < x_0$, $1 < y_0 < y_{-1} < x_0 < x_{-1}$, $1 < y_{-1} < x_0 < y_0 < x_{-1}$, $1 < y_{-1} < y_0 < x_{-1} < x_0$, $1 < y_{-1} < y_0 < x_0 < x_{-1}$ başlangıç şartlarına göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- X_n ve $n \geq 2$ için Y_n çözümlerinde her pozitif yarı dönme iki veya dört terimden oluşur.
- X_n ve Y_n çözümleri için her negatif yarı dönme iki terimden oluşur.

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\}$$

ŞİMŞEK, ERÖZ, Maksimumlu fark denklem
sisteminin çözümleri

- c) X_n ve $n \geq 2$ için Y_n çözümleri için iki veya dört uzunluğundaki her pozitif yarı dönme iki uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder.
- d) X_n ve Y_n çözümleri için iki uzunluğundaki her negatif yarı dönme iki veya dört uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder.

İspat: Lemma 4 ün ispatı Lemma 1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 5 : (1) denklemini için 0 ile 1 açık aralığındaki tüm başlangıç şartlarına göre, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- a) X_n ve Y_n çözümleri için her pozitif yarı dönme üç terimden oluşur.
- b) X_n ve Y_n çözümleri için her negatif yarı dönme iki terimden oluşur.
- c) X_n ve Y_n çözümleri için üç uzunluğundaki her pozitif yarı dönme iki uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder.
- d) X_n ve Y_n çözümleri için iki uzunluğundaki her negatif yarı dönme üç uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder.

İspat: Lemma 5 in ispatı Lemma 1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 1 : (1) denkleminin $(x_n; y_n)$ çözümleri $1 < x_0 < y_{-1} < y_0 < x_{-1}$, $1 < x_0 < y_0 < x_{-1} < y_{-1}$, $1 < x_0 < y_0 < y_{-1} < x_{-1}$, $1 < y_0 < x_{-1} < x_0 < y_{-1}$, $1 < y_0 < x_0 < x_{-1} < y_{-1}$, $1 < y_0 < x_0 < y_{-1} < x_{-1}$ başlangıç şartlarına göre aşağıdaki şekilde ve 10 periyotludur:

$$x(n) = \left\{ \frac{y_0}{x_{-1}}; \frac{1}{x_0}; \frac{x_{-1}}{y_0}; y_{-1}; y_0; \frac{x_0}{y_{-1}}; \frac{1}{y_0}; \frac{y_{-1}}{x_0}; x_{-1}; x_0; \dots \right\}$$

$$y(n) = \left\{ \frac{x_0}{y_{-1}}; \frac{1}{y_0}; \frac{y_{-1}}{x_0}; x_{-1}; x_0; \frac{y_0}{x_{-1}}; \frac{1}{x_0}; \frac{x_{-1}}{y_0}; y_{-1}; y_0; \dots \right\}$$

İspat: Bu teoremin ispatını n nin değerleri için gösterelim.

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{y_0}{x_{-1}}\right\} = \frac{y_0}{x_{-1}}$$

$$y_1 = \max\left\{\frac{1}{y_{-1}}, \frac{x_0}{y_{-1}}\right\} = \frac{x_0}{y_{-1}}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{y_1}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_{-1}}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$y_2 = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{x_1}{y_0}\right\} = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = \frac{1}{y_0}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{y_2}{x_1}\right\} = \max\left\{\frac{x_{-1}}{y_0}, \frac{x_{-1}}{y_0^2}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_0}$$

$$y_3 = \max\left\{\frac{1}{y_1}, \frac{x_2}{y_1}\right\} = \max\left\{\frac{y_{-1}}{x_0}, \frac{y_{-1}}{x_0^2}\right\} = \frac{y_{-1}}{x_0}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{y_3}{x_2}\right\} = \max\{x_0, y_{-1}\} = y_{-1}$$

$$y_4 = \max\left\{\frac{1}{y_2}, \frac{x_3}{y_2}\right\} = \max\{y_0, x_{-1}\} = x_{-1}$$

$$x_5 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \frac{y_4}{x_3}\right\} = \max\left\{\frac{y_0}{x_{-1}}, y_0\right\} = y_0$$

$$y_5 = \max\left\{\frac{1}{y_3}, \frac{x_4}{y_3}\right\} = \max\left\{\frac{x_0}{y_{-1}}, x_0\right\} = x_0$$

$$x_6 = \max\left\{\frac{1}{x_4}, \frac{y_5}{x_4}\right\} = \max\left\{\frac{1}{y_{-1}}, \frac{x_0}{y_{-1}}\right\} = \frac{x_0}{y_{-1}}$$

$$y_6 = \max\left\{\frac{1}{y_4}, \frac{x_5}{y_4}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{y_0}{x_{-1}}\right\} = \frac{y_0}{x_{-1}}$$

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\}$$

ŞİMŞEK, ERÖZ, Maksimumlu fark denklem
sisteminin çözümleri

$$\begin{aligned} x_7 &= \max\left\{\frac{1}{x_5}, \frac{y_6}{x_5}\right\} = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = \frac{1}{y_0} & y_7 &= \max\left\{\frac{1}{y_5}, \frac{x_6}{y_5}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1}{y_{-1}}\right\} = \frac{1}{x_0} \\ x_8 &= \max\left\{\frac{1}{x_6}, \frac{y_7}{x_6}\right\} = \max\left\{\frac{y_{-1}}{x_0}, \frac{y_{-1}}{x_0^2}\right\} = \frac{y_{-1}}{x_0} & y_8 &= \max\left\{\frac{1}{y_6}, \frac{x_7}{y_6}\right\} = \max\left\{\frac{x_{-1}}{y_0}, \frac{x_{-1}}{y_0^2}\right\} = \frac{x_{-1}}{y_0} \\ x_9 &= \max\left\{\frac{1}{x_7}, \frac{y_8}{x_7}\right\} = \max\{y_0, x_{-1}\} = x_{-1} & y_9 &= \max\left\{\frac{1}{y_7}, \frac{x_8}{y_7}\right\} = \max\{x_0, y_{-1}\} = y_{-1} \\ x_{10} &= \max\left\{\frac{1}{x_8}, \frac{y_9}{x_8}\right\} = \max\left\{\frac{x_0}{y_{-1}}, x_0\right\} = x_0 & y_{10} &= \max\left\{\frac{1}{y_8}, \frac{x_9}{y_8}\right\} = \max\left\{\frac{y_0}{x_{-1}}, y_0\right\} = y_0 \\ & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} x(n) &= \left\{ \frac{y_0}{x_{-1}}; \frac{1}{x_0}; \frac{x_{-1}}{y_0}; y_{-1}; y_0; \frac{x_0}{y_{-1}}; \frac{1}{y_0}; \frac{y_{-1}}{x_0}; x_{-1}; x_0; \dots \right\} \\ y(n) &= \left\{ \frac{x_0}{y_{-1}}; \frac{1}{y_0}; \frac{y_{-1}}{x_0}; x_{-1}; x_0; \frac{y_0}{x_{-1}}; \frac{1}{x_0}; \frac{x_{-1}}{y_0}; y_{-1}; y_0; \dots \right\} \end{aligned}$$

çözümlerinin 10 periyotlu olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2 : (1) denkleminin $(x_n; y_n)$ çözümleri $1 < x_{-1} < x_0 < y_{-1} < y_0$, $1 < x_{-1} < x_0 < y_0 < y_{-1}$, $1 < x_{-1} < y_0 < x_0 < y_{-1}$, $1 < x_0 < x_{-1} < y_{-1} < y_0$, $1 < x_0 < x_{-1} < y_0 < y_{-1}$, $1 < x_0 < y_{-1} < x_{-1} < y_0$ başlangıç şartlarına göre aşağıdaki şekilde ve 10 periyotludur:

$$\begin{aligned} x(n) &= \left\{ \frac{y_0}{x_{-1}}; \frac{1}{x_0}; \frac{x_{-1}}{y_0}; y_{-1}; y_0; \frac{x_0}{y_{-1}}; \frac{1}{x_{-1}}; \frac{y_{-1}}{x_0}; x_{-1}; x_0; \dots \right\} \\ y(n) &= \left\{ \frac{x_0}{y_{-1}}; \frac{1}{x_{-1}}; \frac{y_{-1}}{x_0}; x_{-1}; x_0; \frac{y_0}{x_{-1}}; \frac{1}{x_0}; \frac{x_{-1}}{y_0}; y_{-1}; y_0; \dots \right\} \end{aligned}$$

İspat: Teorem 2 nin ispatı Teorem 1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 3 : (1) denkleminin $(x_n; y_n)$ çözümleri $1 < x_{-1} < y_{-1} < x_0 < y_0$, $1 < x_{-1} < y_{-1} < y_0 < x_0$, $1 < x_{-1} < y_0 < y_{-1} < x_0$, $1 < y_{-1} < x_{-1} < x_0 < y_0$, $1 < y_{-1} < x_{-1} < y_0 < x_0$, $1 < y_{-1} < x_0 < x_{-1} < y_0$ başlangıç şartlarına göre aşağıdaki şekilde ve 10 periyotludur:

$$\begin{aligned} x(n) &= \left\{ \frac{y_0}{x_{-1}}; \frac{1}{y_{-1}}; \frac{x_{-1}}{y_0}; y_{-1}; y_0; \frac{x_0}{y_{-1}}; \frac{1}{x_{-1}}; \frac{y_{-1}}{x_0}; x_{-1}; x_0; \dots \right\} \\ y(n) &= \left\{ \frac{x_0}{y_{-1}}; \frac{1}{x_{-1}}; \frac{y_{-1}}{x_0}; x_{-1}; x_0; \frac{y_0}{x_{-1}}; \frac{1}{y_{-1}}; \frac{x_{-1}}{y_0}; y_{-1}; y_0; \dots \right\} \end{aligned}$$

İspat: Teorem 3 ün ispatı Teorem 1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}} \right\}; y_{n+1} = \max \left\{ \frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}} \right\}$$

ŞİMŞEK, ERÖZ,
sisteminin çözümleri Maksimumlu fark denklem

Teorem 4 : (1) denkleminin $(x_n; y_n)$ çözümleri $1 < y_0 < x_{-1} < y_{-1} < x_0$, $1 < y_0 < y_{-1} < x_{-1} < x_0$, $1 < y_0 < y_{-1} < x_0 < x_{-1}$, $1 < y_{-1} < x_0 < y_0 < x_{-1}$, $1 < y_{-1} < y_0 < x_{-1} < x_0$, $1 < y_{-1} < y_0 < x_0 < x_{-1}$ başlangıç şartlarına göre aşağıdaki şekilde ve 10 periyotludur:

$$x(n) = \left\{ \frac{y_0}{x_{-1}}; \frac{1}{y_{-1}}; \frac{x_{-1}}{y_0}; y_{-1}; y_0; \frac{x_0}{y_{-1}}; \frac{1}{y_0}; \frac{y_{-1}}{x_0}; x_{-1}; x_0; \dots \right\}$$

$$y(n) = \left\{ \frac{x_0}{y_{-1}}; \frac{1}{y_0}; \frac{y_{-1}}{x_0}; x_{-1}; x_0; \frac{y_0}{x_{-1}}; \frac{1}{y_{-1}}; \frac{x_{-1}}{y_0}; y_{-1}; y_0; \dots \right\}$$

İspat: Teorem 4 ün ispatı Teorem 1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 5 : (1) denkleminin $(x_n; y_n)$ çözümleri 0 ile 1 açık aralığındaki tüm başlangıç şartlarına göre aşağıdaki şekilde ve 10 periyotludur:

$$x(n) = \left\{ \frac{1}{x_{-1}}; \frac{1}{y_{-1}x_0}; \frac{1}{y_0}; y_{-1}; y_0; \frac{1}{y_{-1}}; \frac{1}{x_{-1}y_0}; \frac{1}{x_0}; x_{-1}; x_0; \dots \right\}$$

$$y(n) = \left\{ \frac{1}{y_{-1}}; \frac{1}{x_{-1}y_0}; \frac{1}{x_0}; x_{-1}; x_0; \frac{1}{x_{-1}}; \frac{1}{y_{-1}x_0}; \frac{1}{y_0}; y_{-1}; y_0; \dots \right\}$$

İspat: Teorem 5 in ispatı Teorem 1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

ÖRNEKLER

ÖRNEK 1: Başlangıç şartları Lemma 1 ve Teorem 1 dekinde uygun bir şekilde seçilirse

$$x[-1] = 5; x[0] = 2; y[-1] = 3; y[0] = 4$$

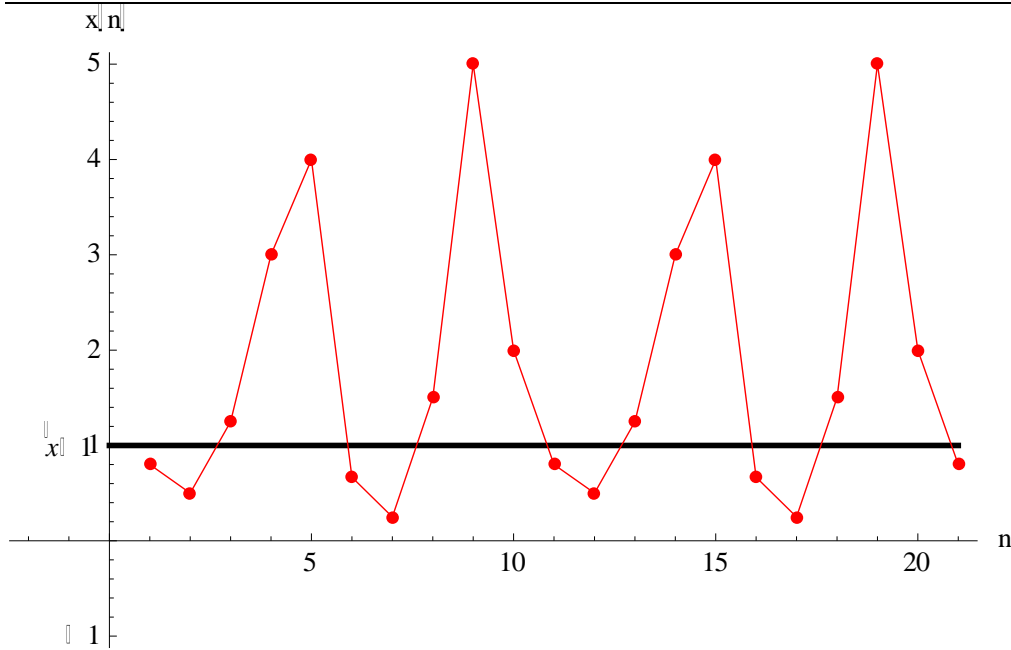
$$x(n) = \{0.8, 0.5, 1.25, 3, 4, 0.666667, 0.25, 1.5, 5, 2, 0.8, 0.5, 1.25, 3, 4, 0.666667, 0.25, 1.5, 5, 2, \dots\}$$

$$y(n) = \{0.666667, 0.25, 1.5, 5, 2, 0.8, 0.5, 1.25, 3, 4, 0.666667, 0.25, 1.5, 5, 2, 0.8, 0.5, 1.25, 3, 4, \dots\}$$

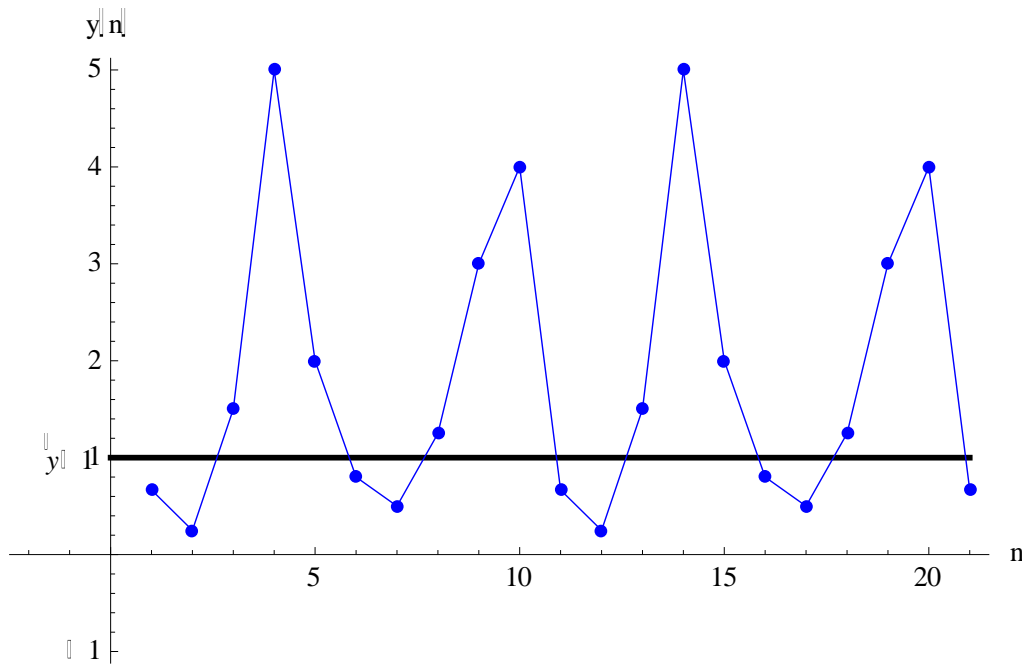
çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\}$$

ŞİMŞEK, ERÖZ, Maksimumlu fark denklem
sisteminin çözümleri



Şekil 1. $x(n)$ çözümlerinin grafiği.



Şekil 2. $y(n)$ çözümlerinin grafiği.

ÖRNEK 2: Başlangıç şartları Lemma 2 ve Teorem 2 dekine uygun bir şekilde seçilirse

$$x[-1] = 2; x[0] = 3; y[-1] = 4; y[0] = 5$$

$$x(n) = \{2.5, 0.333333, 0.4, 4, 5, 0.75, 0.5, 1.33333, 2, 3, 2.5, 0.333333, 0.4, 4, 5, 0.75, 0.5, 1.33333, 2, 3, \dots\}$$

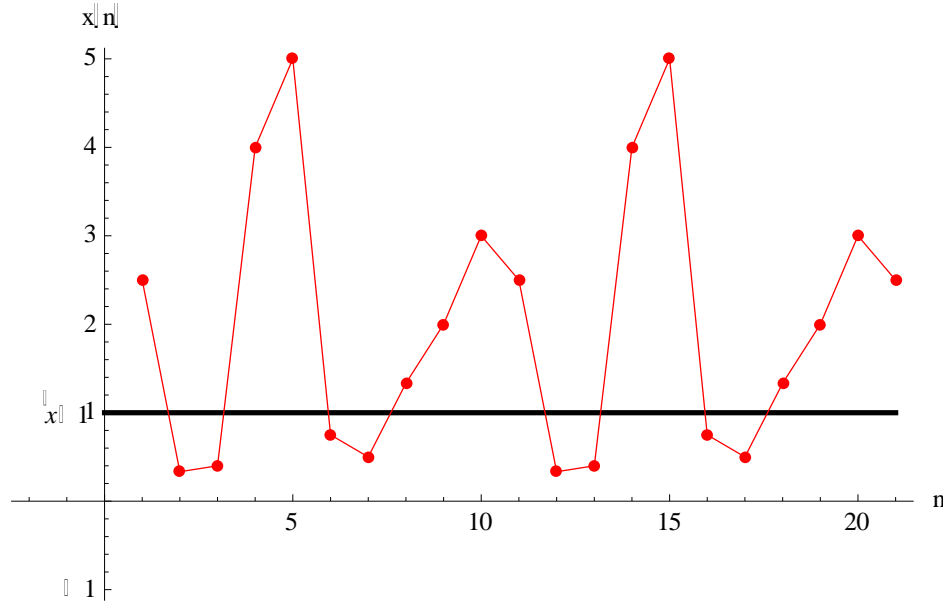
$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\}$$

ŞİMŞEK, ERÖZ,
sisteminin çözümleri

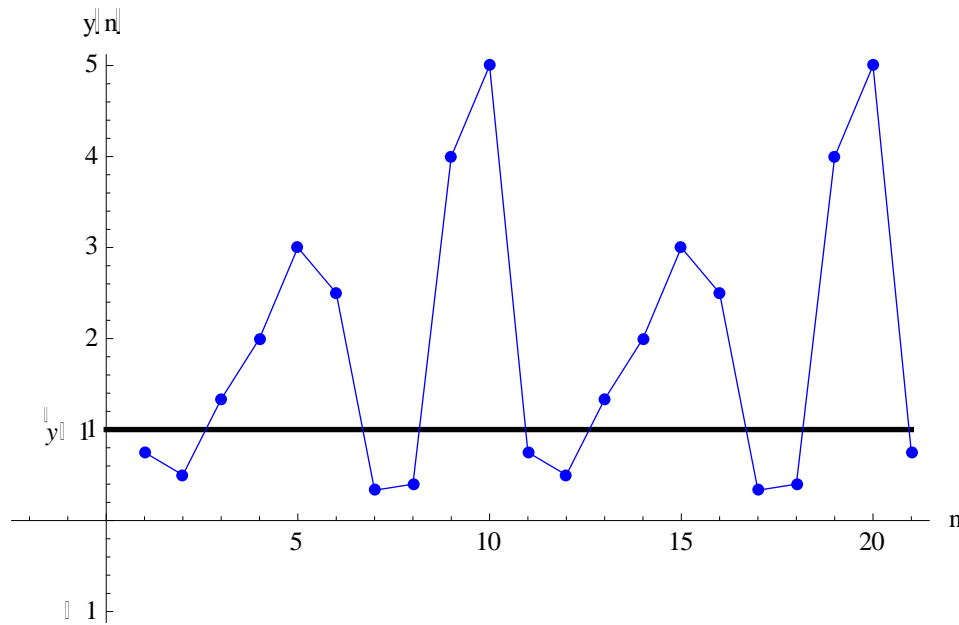
Maksimumlu fark denklem

$y(n) = \{0.75, 0.5, 1.33333, 2, 3, 2.5, 0.333333, 0.4, 4, 5, 0.75, 0.5, 1.33333, 2, 3, 2.5, 0.333333, 0.4, 4, 5, \dots\}$

çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3. $x(n)$ çözümlerinin grafiği.



Şekil 4 $y(n)$ çözümlerinin grafiği.

ÖRNEK 3: Başlangıç şartları Lemma 3 ve Teorem 3 dekine uygun bir şekilde seçilirse

$$x[-1] = 2; x[0] = 4; y[-1] = 3; y[0] = 5$$

$x(n) = \{2.5, 0.333333, 0.4, 3, 5, 1.33333, 0.5, 0.75, 2, 4, 2.5, 0.333333, 0.4, 3, 5, 1.33333, 0.5, 0.75, 2, 4, \dots\}$

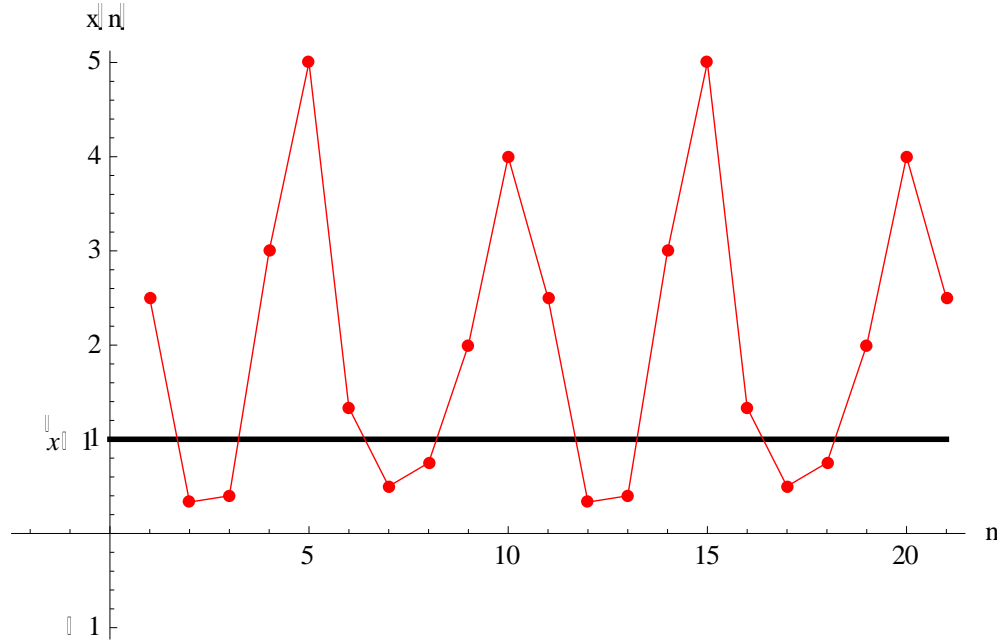
$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\}$$

ŞİMŞEK, ERÖZ,
sisteminin çözümleri

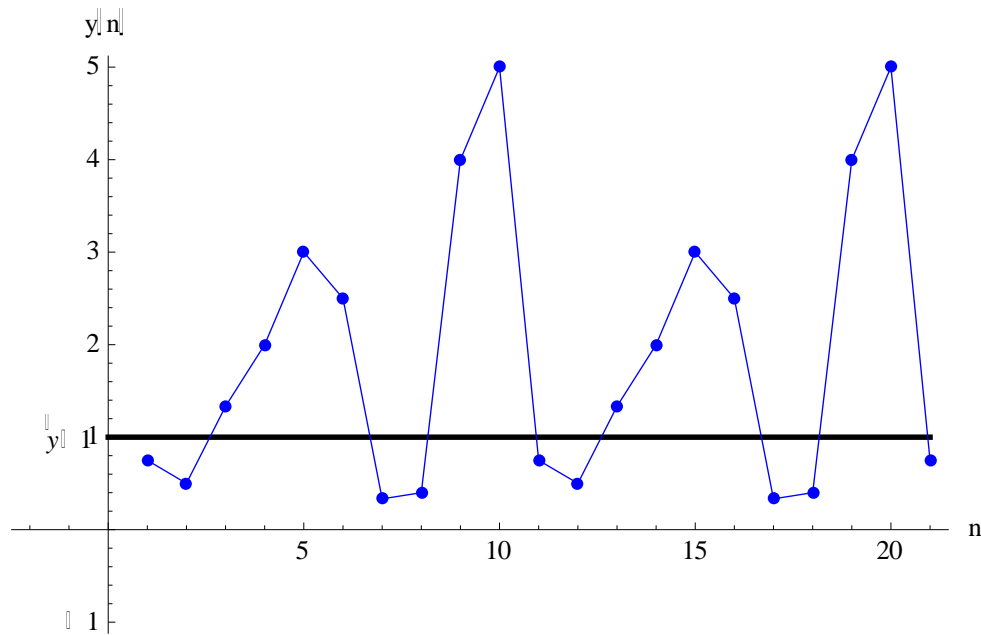
Maksimumlu fark denklem

$y(n) = \{ 1.33333, 0.5, 0.75, 2, 4, 2.5, 0.333333, 0.4, 3, 5, 1.33333, 0.5, 0.75, 2, 4, 2.5, 0.333333, 0.4, 3, 5, \dots \}$

çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 5. $x(n)$ çözümlerinin grafiği.



Şekil 6. $y(n)$ çözümlerinin grafiği.

ÖRNEK 4: Başlangıç şartları Lemma 4 ve Teorem 4 dekinde uygun bir şekilde seçilirse

$$x[-1] = 3; x[0] = 5; y[-1] = 4; y[0] = 2$$

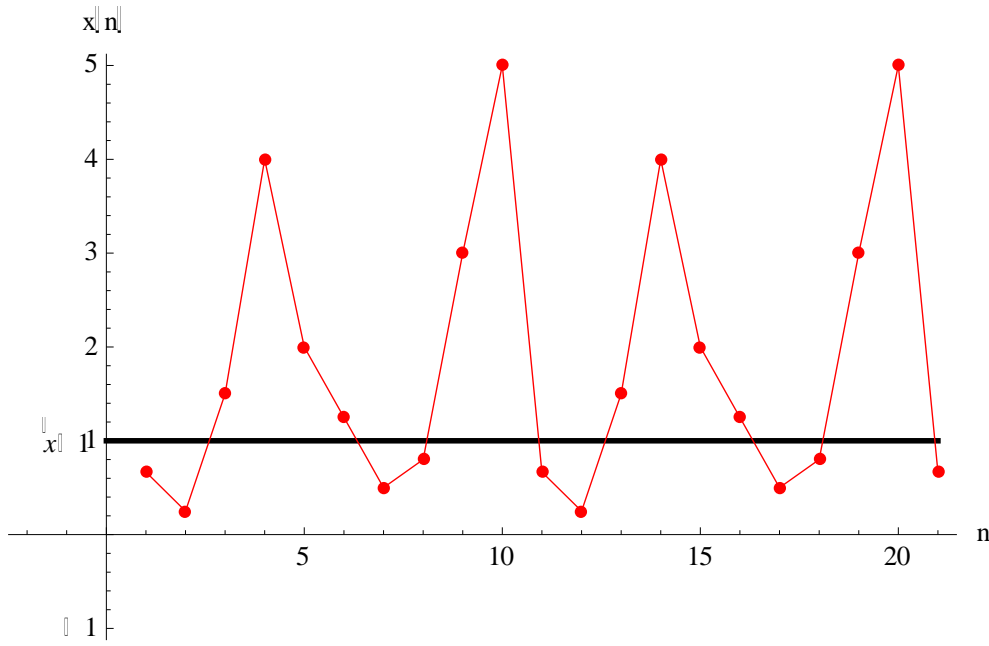
$x(n) = \{ 0.666667, 0.25, 1.5, 4, 2, 1.25, 0.5, 0.8, 3, 5, 0.666667, 0.25, 1.5, 4, 2, 1.25, 0.5, 0.8, 3, 5, \dots \}$

$y(n) = \{ 1.25, 0.5, 0.8, 3, 5, 0.666667, 0.25, 1.5, 4, 2, 1.25, 0.5, 0.8, 3, 5, 0.666667, 0.25, 1.5, 4, 2, \dots \}$

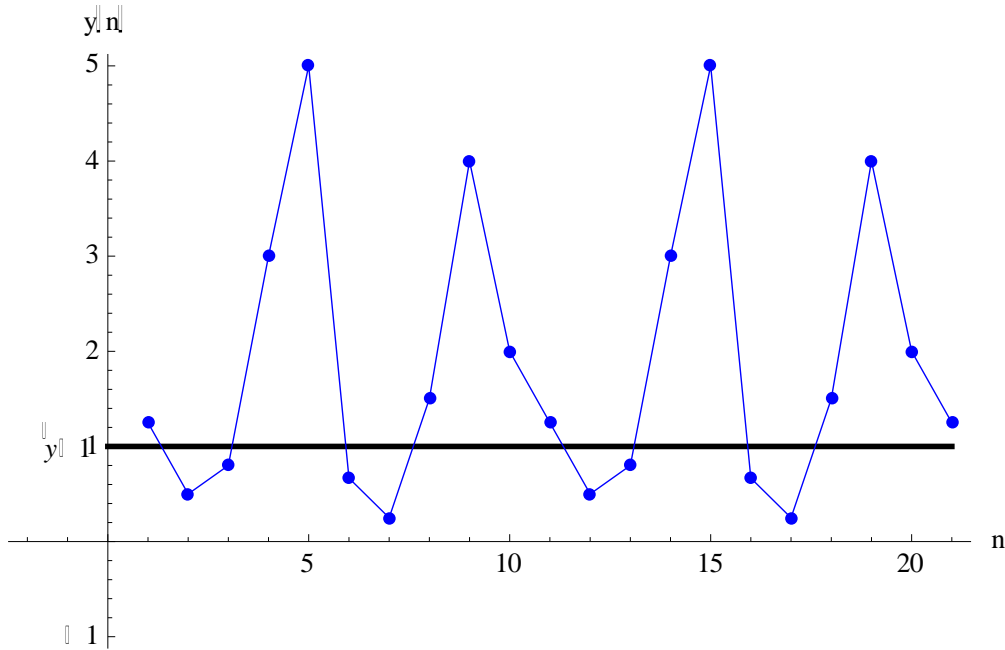
çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\}$$

ŞİMŞEK, ERÖZ, Maksimumlu fark denklem
sisteminin çözümleri



Şekil 7. x(n) çözümlerinin grafiği



Şekil 8. y(n) çözümlerinin grafiği.

ÖRNEK 5: Başlangıç şartları Lemma 5 ve Teorem 5 dekine uygun bir şekilde seçilirse

$$x[-1] = 0.3; x[0] = 0.5; y[-1] = 0.4; y[0] = 0.2$$

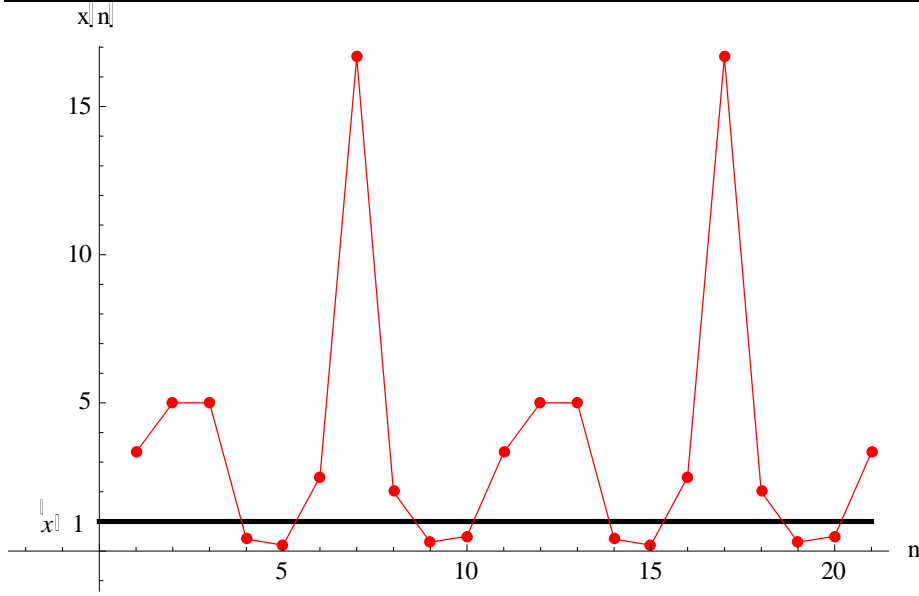
$$x(n) = \{3.33333, 5, 5, 0.4, 0.2, 2.5, 16.6667, 2, 0.3, 0.5, 3.33333, 5, 5, 0.4, 0.2, 2.5, 16.6667, 2, 0.3, 0.5, \dots\}$$

$$y(n) = \{2.5, 16.6667, 2, 0.3, 0.5, 3.33333, 5, 5, 0.4, 0.2, 2.5, 16.6667, 2, 0.3, 0.5, 3.33333, 5, 5, 0.4, 0.2, \dots\}$$

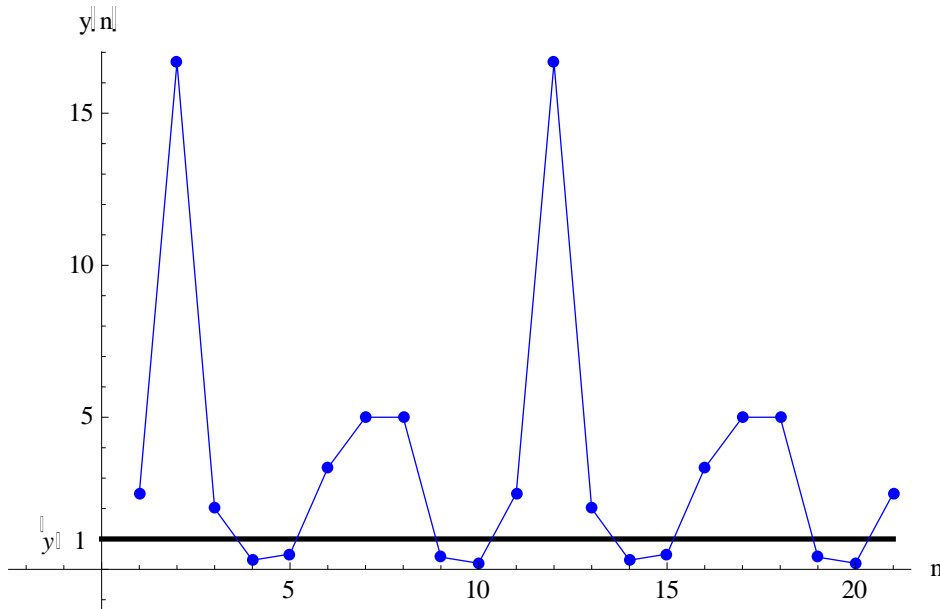
çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\}$$

ŞİMŞEK, ERÖZ, Maksimumlu fark denklem
sisteminin çözümleri



Şekil 9. x(n) çözümlerinin grafiği



Şekil 10. y(n) çözümlerinin grafiği.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, $x_{-1}; x_0; y_{-1}; y_0$ başlangıç şartları sıfırdan farklı pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\}$$

maksimumlu fark denklem sisteminin

çözümlerinin davranışları incelenmiştir. Bu fark denklem sisteminde katsayıları değiştirilerek yeni maksimumlu fark denklem sistemleri oluşturulabilir. Oluşturulacak yeni maksimumlu fark denklem sisteminin çözüm davranışları incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] A. M. Amleh, "Boundedness Periodicity and Stability of Some Difference Equations", PhD Thesis, University of Rhode Island, 1998.
- [2] C. Çınar, S. Stevic and İ. Yalçınkaya, "On the positive solutions of reciprocal difference equation with minimum", Journal of Applied Mathematics and Computing, 17, (1-2), 307-314, 2005.
- [3] S. Elaydi, "An Introduction to Difference Equations", Springer-Verlag, New York, 1996.
- [4] E. M. Elsayed and S. Stevic, "On the max-type equation $x_{n+1} = \max\{A/x_n, x_{n-2}\}$ ", Nonlinear Analysis, TMA 71, 910-922, 2009.
- [5] E. M. Elsayed, B. Iricanin and S. Stevic, "On the max-type equation $x_{n+1} = \max\{A_n/x_n, x_{n-1}\}$ ", ARS Combin., 2010.
- [6] J. Feuer, "Periodic solutions of the Lyness max equation", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288, 147-160, 2003.
- [7] A. Gelişken, C. Çınar and R. Karataş, "A note on the periodicity of the Lyness max equation", Advances in Difference Equations, Vol. (2008), Article ID 651747, 5 pages, 2008.
- [8] A. Gelişken, C. Çınar and İ. Yalçınkaya, "On the periodicity of a difference equation with maximum", Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2008, Article ID 820629, 11 pages, 2008.
- [9] A. Gelişken, Çınar, C. and A.S. Kurbanlı, "On the asymptotic behavior and periodic nature of a difference equation with maximum", Computers & Mathematics with Applications, 59, 898-902, 2010.
- [10] B. Iricanin and E. M. Elsayed, "On a max-type equation $x_{n+1} = \max\{A/x_n, x_{n-3}\}$ ", Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2010, Article ID 675413, 2010.
- [11] M. R. S. Kulenevic and G. Ladas, "Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture", Boca Raton, London, 2002.
- [12] D. P. Mishev, W. T. Patula, and H. D. Voulov, "A reciprocal difference equation with maximum", Computers & Mathematics with Applications, 43, 1021-1026, 2002.
- [13] L. A. Moybe, "Difference Equations with Public Health Applications", New York, USA, 2000.
- [14] Бурак Огул, Дагыстан Шимшек, " $x_{n+1} = \max\{1 \setminus x_{n-4}; y_{n-4} \setminus x_{n-4}\}; y_{n+1} = \max\{1 \setminus y_{n-4}; x_{n-4} \setminus y_{n-4}\}$ Система решение разностного уравнения", Вестник Кыргызского Государственного Технического Университета, N 34, Бишкек, Кыргызстан, 2015.
- [15] B. Ogul, D. Simsek, " $x_{n+1} = \max\{1 \setminus x_{n-4}; y_{n-4} \setminus x_{n-4}\}; y_{n+1} = \max\{1 \setminus y_{n-4}; x_{n-4} \setminus y_{n-4}\}$ Maksimumlu Fark Denklem Sisteminin Çözümleri", Manas Journal of Engineering, 3(1): 35-57, 2015.
- [16] G. Papanichopoulos and V. Hatzifilippidis, "On a max difference equation", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 258, 258-268, 2001.
- [17] G. Papanichopoulos, J. Schinas and V. Hatzifilippidis, "Global behaviour of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation", Journal of Computational Analysis and Applications, 5, 2, 237-247, 2003.
- [18] W. T. Patula and H. D. Voulov, "On a max type recursive relation with periodic coefficients", Journal of Difference Equations and Applications, 10, 3, 329-338, 2004.
- [19] G. Stefanidou and G. Papanichopoulos, "The periodic nature of the positive solutions of a nonlinear fuzzy max--difference equation", Information Sciences, 176, 3694-3710, 2006.
- [20] S. Stević, "On the recursive sequence $x_{n+1} = \max\{c, x_n^p/x_{n-1}^p\}$ ", Applied Mathematics Letters, vol. 21, No: 8, 791--796, 2008.
- [21] D. Simsek, C. Cinar and I. Yalçınkaya, "On the solutions of the difference equation $x_{n+1} = \max\{1/x_{n-1}, x_{n-1}\}$ ", International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, Vol.1, No: 9--12, 481--487, 2006.

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_{n-1}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_{n-1}}\right\}$$

ŞİMŞEK, ERÖZ, *sisteminin çözümleri* Maksimumlu fark denklem

- [22] D. Simsek, B. Demir and A. S. Kurbanlı, " $x_{n+1} = \max\{(1/(x_n)), ((y_n)/(x_n))\}$, $y_{n+1} = \max\{(1/(y_n)), ((x_n)/(y_n))\}$ Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine", Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 28, 91-104, 2009.
- [23] D. Simsek, B. Demir and C. Cinar, "On the Solutions of the System of Difference Equations $x_{n+1} = \max\{(A/(x_n)), ((y_n)/(x_n))\}$, $y_{n+1} = \max\{(A/(y_n)), ((x_n)/(y_n))\}$ ", Discrete Dynamics in Nature and Society, Volume 2009, Article ID 325296, 11 pages, 2009.
- [24] Simsek D., Kurbanlı A. S., Erdoğan M. E. , " $x(n+1) = \max\{1 \setminus x(n-1) ; y(n-1) \setminus x(n-1)\} ; y(n+1) = \max\{1 \setminus y(n-1) ; x(n-1) \setminus y(n-1)\}$ Fark Denklem Sisteminin Çözümleri", XXIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, 153 pp, .04-07 Ağustos 2010, Erciyes Üniversitesi, 2010.
- [25] Dağıstan Şimşek and Ahmet Dogan , "Solutions Of The System Of Maximum Difference Equations", Manas Journal of Engineering, 2(2): 9-22, 2014.
- [26] C. T. Teixeira, "Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations", PhD Thesis, University of Rhode Island, 2000.
- [27] S. Valicenti, "Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations", PhD Thesis, University of Rhode Island, 1999.
- [28] H. D. Voulov, "On the periodic character of some difference equations", Journal of Difference Equations and Applications, 8, 799-810, 2002.
- [29] H. D. Voulov, "Periodic solutions to a difference equation with maximum", Proceedings of the American Mathematical Society, 131, 2155-2160, 2002.
- [30] I. Yalçınkaya, B. D. Iricanin and C. Çınar, "On a max-type difference equation", Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2007, Article ID 47264, 10 pages, 2007.
- [31] I. Yalçınkaya, C. Çınar and M. Atalay, "On the solutions of systems of difference equations", Advances in Difference Equations, Vol. 2008, Article ID 143943, 9 pages, 2008