Araştırma Makalesi *BAUN Fen Bil. Enst. Dergisi, 20(2), 460-466, (2018)*

DOI: 10.25092/baunfbed.485633 *J. BAUN Inst. Sci. Technol., 20(2), 460-466, (2018)*

Genişletilmiş modüler grubun $\overline{H}_{3,3}$ alt grubu ve Fibonacci sayıları

Furkan BİROL[1,*], Özden KORUOĞLU[2] , Bilal DEMİR[2]

[1]Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı., Çağış kampüsü, Balıkesir.
[2]Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Balıkesir.

Geliş Tarihi (Recived Date): 23.05.2018
Kabul Tarihi (Accepted Date): 20.09.2018

Özet

Bu çalışmada tam katsayılı otomorfizma ve anti-otomorfizmaların grubu olan genişletilmiş modüler grubun $\overline{H}_{3,3}$ alt grubunun elemanları ve Fibonacci sayıları arasındaki ilişki incelenecektir. $\overline{H}_{3,3}$ grubu, altı mertebeli iki dihedral grubun iki mertebeli devirli grup altında, birleştirilmiş serbest çarpımıdır. Başka bir ifadeyle bu grup üç mertebeli $X(z) = -1/(z-1)$, $Y(z) = -1/(z+1)$ şeklinde iki eleman ve iki mertebeli $R(z) = 1/\bar{z}$ bir yansıma dönüşümü tarafından üretilir. Böylece grubun herbir elemanı X, Y ve R nin kuvvetlerinin bir kombinasyonu olarak yazılabilir. Burada bu kombinasyonun içinde katsayıları Fibonacci sayıları olan bloklar elde edilecektir.

Anahtar kelimeler: *Fibonacci sayıları, modüler grup, genişletilmiş genel Hecke grupları.*

The subgroup $\overline{\mathrm{H}}_{3,3}$ of extended modular group and Fibonacci numbers

Abstract

In this study, relationships between the elements of the group $\overline{H}_{3,3}$, subgroup of extended modular group that consists of automorphisms and anti-automorphisms with integer coefficients, and Fibonacci numbers are studied. The group $\overline{H}_{3,3}$ is isomorphic to amalgamated free product of two dihedral groups of order six with cyclic group of order two. In other words this group is generated by two elements $X(z) = -1/(z-1)$, $Y(z) = -1/(z+1)$ of order three and a two ordered reflection $R = 1/\bar{z}$. Hence every

[*] Furkan BİROL, furkanbirol1010@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-3946-6185
Özden KORUOĞLU, ozdenk@balikesir.edu.tr, https://orcid.org/0000-0002-9622-4847
Bilal DEMİR, bdemir@balikesir.edu.tr, https://orcid.org/0000-0002-6638-6909

element of $\overline{H}_{3,3}$ can be written as a combination of powers of X, Y and R. Here, it is investigated the blocks in this combination whose coefficients are Fibonacci numbers.

Keywords: *Fibonacci numbers, modular group, extended generalized Hecke groups.*

1. Giriş

Fibonacci sayıları $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ başlangıç koşulları ile birlikte $\forall n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlıdır. (1) bağıntısı çözülerek n. sıradaki Fibonacci sayısı;

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{2}$$

elde edilir. Buradaki $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısı altın oran olarak adlandırılır. Ardışık iki Fibonacci sayısının oranından elde edilen dizinin limiti altın orandır. Fibonacci sayıları; doğada bir çok yerde karşılaşılması ve sayılar teorisinde ilginç özelliklere sahip olması sebebiyle çokça çalışılan bir konudur.

Fibonacci sayılarının tanımına benzer olarak Lucas ve Pell sayı dizileri de tanımlanmıştır Fibonacci dizisinin başlangıç koşulları $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ şeklinde seçilerek yine aynı indirgeme bağıntısıyla Lucas sayıları oluşturulmuştur.. P_n; n. Pell sayısını temsil etmek üzere $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ başlangıç koşulları altında $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ şeklindedir. Pell ve Lucas sayılarının tanımından Fibonacci sayıları ile ilişkili çeşitli eşitliklere ulaşılabilir.

Fibonacci sayılarının modüler grup elemanları ile de ilgisi vardır. Modüler grup karmaşık düzlemde a, b, c ve d birer tamsayı ve $ad - bc = 1$ olmak üzere $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ eşleyen Möbius dönüşümlerinin grubudur. $\frac{az+b}{cz+d}$ şeklindeki bir dönüşümü $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şeklinde bir matris ile temsil etmek mümkündür. Bu çalışmada, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matris temsilini göz önünde bulundurulacaktır. $T(z) = -\frac{1}{z}$ ve $U(z) = z + 1$ dönüşümleri modüler grubun üreteçleridir. Bu üreteçlerin matris temsilleri ise $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şeklindedir. Burada $S = TU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alınarak; $S(z) = -\frac{1}{z+1}$ elde edilir. Böylelikle modüler grubun iki ve üç mertebeli devirli iki devirli grubun serbest çarpımı şeklinde;

$$\Gamma = < T, S : T^2, S^3 > \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \tag{3}$$

grup sunuşu elde edilir. Modüler gruba yansıma dönüşümü olan $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ dönüşümünün eklenmesiyle;

$$\bar{\Gamma} = < T, S, R : T^2, S^3, R^2, (TR)^2, (SR)^2 > \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_3 \tag{4}$$

genişletilmiş modüler grup elde edilir. Modüler grup ve genişletilmiş modüler grubun alt gruplarının cebirsel yapısı ve çeşitli özellikleri [1,2,3,4,5,6] çalışmalarda incelenmiştir.

Lehner [7] nolu çalışmasında $X(z) = -\frac{1}{z-\lambda_p}$ ve $Y(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$ olmak üzere;

$$H_{p,q} =< X, Y: X^p, Y^q >\cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q \tag{5}$$

genel Hecke gruplarını tanıtmıştır. Burada $2 \le p \le q \le \infty,\ p+q > 4$ olmak üzere $\lambda_p = 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right), \lambda_q = 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ şeklindedir. Genel Hecke gruplarında $p = 2$ ve $q = 3$ alınarak modüler grup elde edileceği görülebilir. Ayrıca [8] çalışmada genel Hecke gruplarına yansıma dönüşümü eklenerek;

$$\overline{H}_{p,q} =< X, Y, R: X^p, Y^q, R^2, (XR)^2, (YR)^2 >\cong D_p *_{\mathbb{Z}_2} D_q \tag{6}$$

genişletilmiş genel Hecke grupları çalışılmıştır. Yine (6) ifadesinde $p = 2$ ve $q = 3$ alınarak genişletilmiş modüler grup elde edilir.

Bu çalışmada $p = q = 3$ halinde elde edilecek olan $\overline{H}_{3,3}$ grubunun elemanları ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişki incelenecektir.

2. Yapılan çalışmalar

Literatürde Fibonacci sayıları ve bazı genellemeleri hakkında çok sayıda çalışmaya rastlamak mümkündür. Örneğin; Horadam Fibonacci sayılarının başlangıç koşullarını p ve q keyfi tamsayılar olmak üzere $H_1 = p$, $H_2 = p + q$ şeklinde alarak bir genelleme elde etmiş ve çeşitli özelliklerini incelemiştir [9].

Miles [10] nolu çalışmasında girdileri ardışık Fibonacci sayıları olan 2×2 matrislerin bir dizisini oluşturmuş ve bu dizinin yeterince büyük terimlerinin kötü koşullandırılmış (ill-conditioned) olacağını öne sürmüştür. Ardından k-genelleştirilmiş Fibonacci sayıları için benzer sonuçları $k \times k$ matrisleri yardımıyla elde etmiştir.

Matris metodlarının kullanıldığı başka bir çalışma olan [11] de, girdileri Fibonacci sayıları olan alt üçgen matrisler oluşturulmuş ve bu matrislerin çarpımları ile ilgili özellikler elde edilmiştir.

Yılmaz Özgür [12] çalışmasında, $d_{2n} = L_{2n+1}$ ve $d_{2n+1} = \sqrt{5}F_{2n+2}$ olmak üzere $d_n = \sqrt{5}d_{n-1} - d_{n-2}$ şeklinde genelleştirilmiş bir sayı dizisi oluşturmuş ve $H(\sqrt{5})$ Hecke grubu ile ilişkilerini incelemiştir.

Koruoğlu ve Şahin, $a_0 = 1$ ve $a_1 = \lambda_q$ ile $a_k = \lambda_q a_{k-1} + a_{k-2}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizini tanımlamışlardır. Ayrıca $\overline{H}_{2,q}$ genişletilmiş Hecke grubunda $h = TSR = \begin{pmatrix} \lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $f = RTS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix}$ elemanlarının kuvvetlerinin bu dizinin terimleri olacağını belirtmişlerdir. Ayrıca $q = 3$ halinde genişletilmiş modüler gruptaki her bir elemanın blok formunda h ve f dönüşümlerinin kuvvetleri bulunacağından hareketle gruptaki her bir elemanı girdileri Fibonacci sayıları olan matrislerle temsil etmişlerdir[4].

3. $\overline{H}_{3,3}$ grubu ve Fibonacci sayıları

$\overline{H}_{3,3}$ grubunun sunuşu (6) eşitliğinde, $p = q = 3$ alınarak;

$$\overline{H}_{3,3} =< X, Y, R: X^3, Y^3, R^2, (XR)^2, (YR)^2 >\cong D_3 *_{\mathbb{Z}_2} D_3 \tag{7}$$

şeklinde elde edilir. $\overline{H}_{3,3}$ grubunun tüm elemanları tam katsayılı otomorfizma ve anti-otomorfizmalardır. Tam katsayılı tüm dönüşümlerin grubu genişletilmiş modüler grup olduğundan, $\overline{H}_{3,3}$ genişletilmiş modüler grubunun alt grubudur. (7) eşitliğindeki üreteçler; $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde matris temsillerine sahiptir. Aşağıdaki lemmada $\overline{H}_{3,3}$ grubundaki üreteçlerin birbirleriyle ilişkileri incelenecektir.

Lemma 1 : $\overline{H}_{3,3}$ grubunda;

$$\begin{aligned} &RXY = X^2Y^2R, \\ &RX^2Y = XY^2R, \\ &RXY^2 = X^2YR, \\ &RX^2Y^2 = XYR \end{aligned} \tag{8}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (7) de verilen grup temsilindeki $X^3 = Y^3 = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I$ bağıntılardan kolaylıkla görülebilir.

Böylelikle $\overline{H}_{3,3}$ grubundaki herhangi bir eleman $a, b, i_k, j_k = 1,\ 0 \le k \le n$ ve m_k pozitif tamsayı olmak üzere;

$$Y^a\left(X^{i_0}Y^{j_0}\right)^{m_0}\left(X^{i_1}Y^{j_1}\right)^{m_1} \ldots \left(X^{i_n}Y^{j_n}\right)^{m_n}X^b \tag{9}$$

veya

$$Y^a\left(X^{i_0}Y^{j_0}\right)^{m_0}\left(X^{i_1}Y^{j_1}\right)^{m_1} \ldots \left(X^{i_n}Y^{j_n}\right)^{m_n}X^bR \tag{10}$$

şeklinde bir temsile sahiptir. Bu temsiller, indirgenmiş kelime olarak adlandırılır. (9) ve (10) şeklinde indirgenmiş forma sahip olan herhangi bir eleman Lemma 1 de verilen bloklar yardımıyla yazılabilir. Aşağıda Pell sayılarını üreten bloklara yer verilmiştir.

Lemma 2: [13] a) $m = RXY^2 = X^2YR = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ için; $m^k = \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k-1} \end{pmatrix}$

b) $n = RX^2Y = XY^2R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ için; $n^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} & P_k \\ P_k & P_{k+1} \end{pmatrix}$

c) $t = RX^2Y^2 = XYR = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ için; $t^k = \begin{pmatrix} P_{k-1} + P_k & P_k \\ 2P_k & P_{k-1} + P_k \end{pmatrix}$

d) $l = RXY = X^2Y^2R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ için; $l^k = \begin{pmatrix} P_{k-1}+P_k & 2P_k \\ P_k & P_{k-1}+P_k \end{pmatrix}$

Böylece $\overline{H}_{3,3}$ grubundaki bir eleman, Lemma 2 de verilen bloklar yardımıyla yazarak girdileri Pell sayıları olan matrislerin bir kombinasyonu olarak yazılabilir[13]. Şimdi girdileri Fibonacci sayıları olan bloklar incelenecektir.

Teorem 1: a) $a = XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ için $a^k = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix}$

b) $b = X^2Y^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ için $b^k = \begin{pmatrix} F_{2k+1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix}$

c) $c = YX = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ için $c^k = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & -F_{2k} \\ -F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix}$

d) $d = Y^2X^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ için $a^k = \begin{pmatrix} F_{2k+1} & -F_{2k} \\ -F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix}$

İspat: a) Teorem k üzerinden tümevarım ile ispatanabilir.

$k = 1$ için; $a^1 = XY = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{pmatrix}$ olduğu açıktır.

İdianın $k-1$ e kadar tüm tamsayılar için geçerli olduğu varsayımıyla;

$$a^k = a^{k-1}.a = \begin{pmatrix} F_{2k-3} & F_{2k-2} \\ F_{2k-2} & F_{2k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{2k-3}+F_{2k-2} & F_{2k-3}+2F_{2k-2} \\ F_{2k-2}+F_{2k-1} & F_{2k-2}+2F_{2k-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{2k-1} & F_{2k-1}+F_{2k-2} \\ F_{2k} & F_{2k}+F_{2k-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix}$$

b) $k = 1$ için;

$$b^1 = X^2Y^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür. İdianın $k-1$ e kadar tüm tamsayılar için geçerli olduğu varsayımıyla;

$$b^k = b^{k-1}.b = \begin{pmatrix} F_{2k-1} & F_{2k-2} \\ F_{2k-2} & F_{2k-3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2F_{2k-1}+F_{2k-2} & F_{2k-1}+F_{2k-2} \\ 2F_{2k-2}+F_{2k-3} & F_{2k-2}+F_{2k-3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{2k} + F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k-1} + F_{2k-2} & F_{2k-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{2k+1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix}$$

Teoremdeki c ve d önermeleri de benzer metodla ispatlanabilir.

Yukarıda verilen Lemma 2 ve Teorem 1 ile aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilebilir.

Sonuç 1: $\overline{H}_{3,3}$ grubundaki herhangi bir eleman girdileri Pell ve Fibonacci sayılarından oluşan blokların bir kombinasyonu olarak yazılabilir.

Örnek: $\overline{H}_{3,3}$ grubunda $(X^2Y^2)^3(YX)^2(XY)^4(Y^2X^2)^2$ elemanı için Teorem 1 deki bloklar göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned}(X^2Y^2)^3(YX)^2(XY)^4(Y^2X^2)^2 &= b^3c^2a^4d^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} F_7 & F_6 \\ F_6 & F_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_3 & -F_4 \\ -F_4 & F_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_7 & F_8 \\ F_8 & F_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_5 & -F_4 \\ -F_4 & F_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Örnek: $\overline{H}_{3,3}$ grubunda;

$$X^2YRRXY^2RX^2YXY^2RRX^2Y(XY)^3(Y^2X^2)^5XYRRX^2Y^2X^2Y^2RRXY(X^2Y^2)^4(YX)^3$$

elemanını Lemma 1 de verilen özellikler yardımıyla;

$$(X^2YR)^2(XY^2R)^3(XY)^3(Y^2X^2)^5(XYR)^2(X^2Y^2R)^2(X^2Y^2)^4(YX)^3$$

indirgenmiş blok formunu yazmak mümkündür. Buradan, Lemma 2 ve Teorem 1 den $m^2n^4a^3d^5k^2l^2b^4c^3$ olduğu görülür.

$m^2n^3a^3d^5t^2l^2b^4c^3 =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^3$$

$=$

$$\begin{pmatrix} P_3 & P_2 \\ P_2 & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_5 & F_6 \\ F_6 & F_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{10} \\ -F_{10} & F_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 + P_2 & P_2 \\ 2P_2 & P_1 + P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 + P_2 & 2P_2 \\ P_2 & P_1 + P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_9 & F_8 \\ F_8 & F_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_5 & -F_6 \\ -F_6 & F_7 \end{pmatrix}$$

yazılabilir.

.

Kaynaklar

[1] Jones, G.A. ve Thornton, J.S., Automorphisms and congruence Subgroups of the extended modular group, **Jornal of the London Mathematical Society**, 2, 34, 26-40, (1986).

[2] Şahin, R., İkikardeş, S. ve Koruoğlu, Ö., On the power Subgroups of the extended modular group, **Turkish Journal of Mathematics**, 28, 143-151, (2004).

[3] Koruoğlu, Ö., Şahin, R. ve İkikardeş, S., Trace classes and fixed points fort he extended modular group, **Turkish Journal of Mathematics**, 32, 11-19, (2008).

[4] Koruoğlu, Ö. ve Şahin, R., Generalized Fibonacci sequences related to the extended Hecke groups and an application to the extended modular group, **Turkish Journal of Mathematics**, 34, 325-332, (2010).

[5] Mushtaq, Q. ve Hayat, U., Horadam generalized Fibonacci numbers and the modular group, **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, 38(5), 343-352, (2007).

[6] Mushtaq, Q. ve Hayat, U., Pell numbers, Pell-Lucas numbers and modular group, **Algebra Colloquium**, 14(1), 97-102, (2007).

[7] Lehner, J., Uniqueness of a class of Fuchsian groups, **Illinois Journal of Mathematics**, 19, 308-315, (1975).

[8] Demir, B., Koruoğlu, Ö. ve Şahin, R., Conjugacy classes of extended generalized Hecke groups, **Revista De La Union Mathematica Argentina**, 57(1), 49-56, (2016).

[9] Horadam, A.F., A generalized Fibonacci sequence, **The American Mathematical Monthly**, 48(5), 455-459, (1961).

[10] Miles, E.P.Jr., Generalized Fibonacci numbers and associated Matrices, **The American Mathematical Monthly**, 67, 8, 745-752, (1960).

[11] Lee, G.Y., Kim, J.S. ve Lee, S.G., Factorizations and eigenvalues of Fibonacci and symmetric Fibonacci Matrices, **The Fibonacci Quaterly**, 40(3), 203-211, (2002).

[12] Yılmaz Özgür, N., Generalizations of Fibonacci and Lucas sequences, **Note Di Matematica**, 21(1), 113-125, (2002).

[13] Birol, F., Koruoğlu,Ö., Şahin, R. ve Demir, B., Generalized Pell sequences related to the extended generalized Hecke groups $\overline{H}_{3,q}$ and an application to the group $\overline{H}_{3,3}$, Yayına sunuldu.