



**Uşak Üniversitesi Fen ve Doğa
Bilimleri Dergisi**
Usak University Journal of Science and Natural Sciences

<http://dergipark.gov.tr/usufedbid>
<https://doi.org/10.47137/usufedbid.1916872>



Araştırma Makalesi (Research Article)

3-Boyutlu Öklid Uzayında Düzlem ve Uzay Eğrilerinin İnversiyon Eğrileri

Birsen YILDIZTEPE^{1*}, Yılmaz TUNÇER²

¹ Department of Mathematics, Graduate Education Institute, Uşak University, Uşak, Türkiye

² Department of Mathematics, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Uşak University, Uşak, Türkiye

Geliş: 26 Mart 2026
Received: 26 March 2026

Revizyon: 2 Haziran 2026
Revised: 2 June 2026

Kabul: 4 Haziran 2026
Accepted: 4 June 2026

Özet

Bu çalışmada, üç boyutlu Öklid uzayında eğrilerin inversiyon dönüşümü altındaki davranışları incelenmektedir. Çalışmada, eğrilerin inversiyon dönüşümü altındaki değişimleri yalnızca lokal özellikler açısından değil, daha genel bir perspektiften ele alınmaktadır. Bu nedenle çalışmada inversiyon dönüşümünün konformal özelliği doğrudan kullanılmamış, bunun yerine eğrilerin parametrisasyonu, Frenet çatısı ve diferansiyel geometrik büyüklükleri arasındaki dönüşüm ilişkileri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Stereografik izdüşüm, inversiyon, frenet çatısı, öklid uzayı.

Inversion Curves of Planes and Space Curves in 3-Dimensional Euclidean Space

Abstract

In this study, the behavior of curves in three-dimensional Euclidean space under inversion transformation is examined. The changes of the curves under inversion are considered not only in terms of local properties but also from a more general perspective. Therefore, the conformal property of the inversion transformation is not used directly; instead, the transformation relationships between the parametrization of the curves, the Frenet frame, and the differential geometric quantities are analyzed.

Keywords: Stereographic projection, inversiyon, frenet frame, euclid space.

©2026 Uşak University all rights reserved.

*Corresponding author-E-mail: birsenyildiztepe@gmail.com (ORCID ID: 0009-0006-4910-9332)
E-mail: yilmaz.tuncer@usak.edu.tr (ORCID ID: 0000-0002-2398-866X)

1.Giriş

Diferansiyel geometri, uzay eğrilerinin ve yüzeylerin geometrik özelliklerini eğrilik, burulma ve Frenet çatısı gibi kavramlarla inceleyen önemli bir matematik dalıdır. Bu çalışmada, üç boyutlu Öklid uzayındaki eğrilerin, açıları koruyan konformal bir dönüşüm olan inversiyon altındaki davranışları ele alınmıştır. İnversiyonun yalnızca açıları değil, aynı zamanda eğrinin parametrisasyonunu, Frenet vektörlerini ve diferansiyel geometrik büyüklüklerini de değiştirdiği vurgulanarak, eğrilerin bu dönüşüm altındaki değişimleri daha genel bir çerçevede analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, uzay eğrilerinin geometrik yapısının inversiyon dönüşümü altında nasıl etkilendiğini kapsamlı biçimde ortaya koymayı amaçlamaktadır.

Tanım 1.1: I, IR 'nin açık bir aralığı olmak üzere, diferansiyellenebilen ve regüler bir

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

fonksiyonuna E^n 'de bir eğri denir. $\forall s \in I$ için $\|\alpha(s)\| = 1$ ise, α eğrisine birim hızlı eğri ve s parametresine de yay parametresi denir [3].

Tanım 1.2: $\alpha : I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ üçlüsüne $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısı denir. Burada $T(s)$, $N(s)$ and $B(s)$ vektörlerine $\alpha(s)$ eğrisinin sırasıyla teğet, aslinormal ve binormal vektörleri denir. $\alpha(s)$ eğrisi için Frenet çatısı

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix},$$

bağıntısı ile verilir, burada $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ değerlerine eğrinin eğriliği ve torsiyonu(burulması) denir. Bir uzay eğrisi kendisine ait eğrilik ve burulma değerleriyle bellidir [1,2,3].

Birim hızlı düzlemsel α eğrisinin pozisyon vektörü

$$\alpha(s) = f(s)T_\alpha(s) + g(s)N_\alpha(s), \quad (1.1)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} g'(s) + f(s)\kappa_\alpha(s) &= 0, \\ f'(s) - g(s)\kappa_\alpha(s) &= 1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

diferansiyel denklemleri sağlanır. Birim hızlı bir α uzay eğrisinin pozisyon vektörü

$$\alpha(s) = f(s)T_\alpha(s) + g(s)N_\alpha(s) + h(s)B_\alpha(s), \quad (1.3)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f'(s) - g(s)\kappa_\alpha(s) &= 1, \\ g'(s) + f(s)\kappa_\alpha(s) - h(s)\tau_\alpha(s) &= 0, \\ h'(s) + g(s)\tau_\alpha(s) &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

diferansiyel denklemleri sağlanır [4].

Tanım 1.3: Bir α eğrisi için

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N_\alpha(s),$$

ile tanımlanan $\beta(s)$ noktasına, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilik merkezi denir[3].

Tanım 1.4: Herhangi iki eğri $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ olmak üzere, karşılıklı noktalarındaki asli normal vektörleri lineer bağımlı ise bu iki eğri Bertrand eğri çifti oluşturur ve pozisyon vektörleri arasında

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda N_\alpha(s),$$

bağıntısı vardır [3].

Tanım 1.5: $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ eğrilerinin karşılıklı noktalarındaki teğet vektörleri ortogonal ise bu iki eğri involüt-evolüt eğri çifti oluşturur ve pozisyon vektörleri arasında, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\beta(s) = \alpha(s) + |c - s| T_\alpha(s),$$

bağıntısı vardır [3].

Tanım 1.6: $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ eğrileri için, karşılıklı noktalarda $\alpha(s)$ eğrisinin asli normal vektörleri $\beta(s)$ eğrisinin binormal vektörleri ile lineer bağımlı ise $\alpha(s)$ eğrisine bir Mannheim eğrisi denir ve pozisyon vektörleri arasında

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda N_\alpha(s),$$

bağıntısı vardır [4].

Tanım 1.7: $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ eğrileri için, karşılıklı noktalarda eğrilerin teğetleri paralel, zıt yönlü ve bu iki nokta arasındaki uzaklık sabit ise $\alpha(s)$ eğrisine sabit genişlikli bir eğri denir [3].

Tanım 1.8: E^n n-boyutlu Öklid uzayında, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in E^n$ bir nokta ve $r \in \mathbb{R}$ belli bir sayı olsun. Buna göre, $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ olmak üzere,

$$\phi(P) = C + \frac{r^2}{\|P - C\|^2} (P - C)$$

şeklinde tanımlı $\phi: E^n - \{C\} \rightarrow E^n - \{C\}$ dönüşümünde E^n 'de bir inversiyon adı verilir [5, 6].

Bu çalışmada, özel olarak $n = 3$ ve $C = (0, 0, 0)$ alınarak eğrilerin C merkezli, r yarıçaplı küreye göre inversiyonları incelenecektir.

2. Düzlem Eğrilerinin İnversiyonu

α eğrisinin inversiyonu olan eğri β ise,

$$\beta(s_*) = \frac{r^2}{\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle} \alpha(s)$$

şeklinde tanımlanır. “ S_* ” β -eğrisinin yay parametresi olmak üzere β -eğrisinin Frenet vektörleri

$$\left(\frac{ds_*}{ds} \right) = \frac{r^2}{\|\alpha(s)\|^2}$$

olmak üzere

$$T_{\beta}(s_*) = -\frac{f(s)^2 - g(s)^2}{\|\alpha(s)\|^2} T_{\alpha}(s) - \frac{2f(s)g(s)}{\|\alpha(s)\|^2} N_{\alpha}(s), \quad (2.1)$$

$$N_{\beta}(s_*) = -\frac{2f(s)g(s)}{\|\alpha\|^2} T_{\alpha}(s) + \frac{f(s)^2 - g(s)^2}{\|\alpha\|^2} N_{\alpha}(s), \quad (2.2)$$

ve eğriliği de

$$\kappa_{\beta}(s_*) = \frac{\|\alpha(s)\|^2 \kappa_{\alpha}(s) + 2g(s)}{r^2},$$

şeklinde elde edilir.

β eğrisi α eğrisinin involütü olması durumunda, $\langle T_{\alpha}(s), T_{\beta}(s_*) \rangle = 0$ olacağından (2.1) eşitliğinden

$$f(s)^2 - g(s)^2 = 0,$$

$\in = \pm 1$ işaret değeri olmak üzere $f(t) = \in g(s)$ olacaktır. Bu durumda (1.2) eşitlikleri

$$\begin{aligned} \in g'(s) - g(s)\kappa_{\alpha}(s) &= 1, \\ \in g(s)\kappa_{\alpha}(s) + g'(s) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

halini alır. (2.3) denklemleri çözülürse $g(s) = \frac{\in s}{2} + c_0$ ve $f(s) = \frac{s}{2} + \in c_0$ bulunur. (1.1)

eşitliğinden

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{2} + \in c_0 \right) T_{\alpha}(s) + \left(\frac{\in s}{2} + c_0 \right) N_{\alpha}(s), \quad (2.4)$$

olur. $T_{\alpha}(s) = \alpha'(s)$, $N_{\alpha}(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ olmak üzere 0 için $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$ başlangıç

koşulu altında (2.4) denkleminin çözümü

$$x(t) = \frac{s + 2\mathcal{E}}{\sqrt{2}} \cos(\theta), \quad y(t) = \frac{s + 2\mathcal{E}}{\sqrt{2}} \sin(\theta),$$

olarak elde edilir, burada $\theta = \theta_0 + \ln(s + \mathcal{E})$ dir.

Sonuç 2.1: Pozisyon vektörü

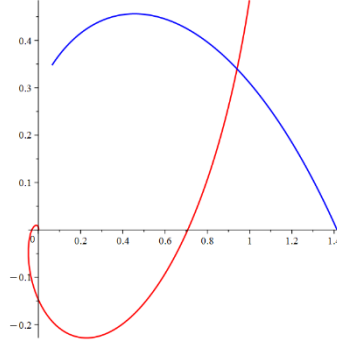
$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{2} + \in c_0 \right) T_{\alpha}(s) + \left(\frac{\in s}{2} + c_0 \right) N_{\alpha}(s),$$

olan düzlemsel eğrileri kendi inversiyon eğrileri ile birlikte involüt-evolüt eğri çifti oluşturur.

Örnek 2.1 $\theta_0 = 0, \varepsilon = 1, c = 0$ $\theta = \ln(s)$ olup,

$$x(s) = \frac{s\sqrt{2} + \cos(\ln(s))}{2}, \quad y(s) = \frac{s\sqrt{2} + \sin(\ln(s))}{2},$$

olmak üzere $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ eğrisinin inversiyonu ve kendisi şekil 2.1 deki gibidir.

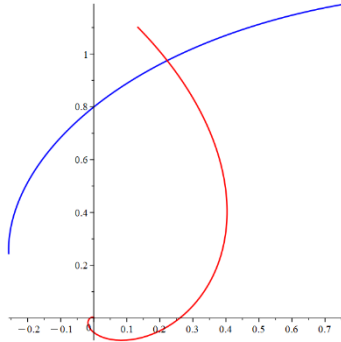


Şekil 2.1 Kırmızı eğri $\alpha(s)$ olup $-\pi/2 \leq s \leq \pi/2$, mavi eğri: $\beta(s)$ olup $1 \leq s \leq 4$.

$\theta_0 = 1, \varepsilon = -1, c = 0$ $\theta = 1 + \varepsilon.s$ olup,

$$x(s) = \frac{s\sqrt{2} + \cos(1 + \ln(s))}{2}, \quad y(s) = \frac{s\sqrt{2} + \sin(1 + \ln(s))}{2}$$

olmak üzere $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ eğrisinin inversiyonu ve kendisi şekil 2.2 deki gibidir.



Şekil 2.2 Kırmızı eğri $\alpha(s)$ olup $-\pi/2 \leq s \leq \pi/2$, mavi eğri: $\beta(t)$ olup $1 \leq s \leq 4$.

β eğrisi α eğrisinin Bertrand eğri çifti olması durumunda, eğrilerin karşılıklı noktalarında $N_\alpha(s)$ ve $N_\beta(s_*)$ vektörleri lineer bağımlıdır. Bu durumda $\langle T_\beta(s_*), N_\alpha(s) \rangle = 0$ olup, (2.1) eşitliğinden $f(s)g(s) = 0$ elde edilir. (1.1) eşitliği göz önüne alınırsa, $g(s) = 0$ olamaz. Bu yüzden $f(s) = 0$ için (1.2) eşitlikleri

$$g'(s) = 0, \quad g(s)\kappa_\alpha(s) = -1,$$

olacaktır. Bu ise

$$g(s) = \frac{-1}{\kappa_\alpha(s)},$$

değerinin sabit olması ve dolayısıyla α eğrisinin bir sabit eğrilikli eğri olması demektir. O halde α ve β eğrileri orijin merkezli birer çemberdir. (1.1) eşitliğinden α eğrisinin pozisyon vektörü

$$\alpha(s) = \frac{-1}{\kappa_\alpha(s)} N_\alpha(s), \quad (2.5)$$

$N_\alpha(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ ve $\|\alpha''(s)\| = \kappa_\alpha(s)$ olduğundan (2.5) eşitliği

$$\alpha''(s) + \kappa_\alpha(s)^2 \alpha'(s) = 0, \quad (2.6)$$

denkleme dönüşür. Eğriliğin sabit olduğu da göz önüne alınırsa, (2.6) diferensiyel denkleminin çözümü $c \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha(s) = \frac{1}{\kappa_\alpha} (\cos(\kappa_\alpha s + c), \sin(\kappa_\alpha s + c)),$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 2.2: Pozisyon vektörü

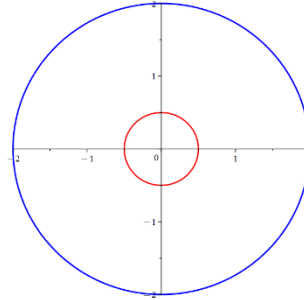
$$\alpha(s) = \frac{-1}{\kappa_\alpha(s)} N_\alpha(s),$$

olan düzlemsel eğrileri kendi inversiyon eğrileri ile birlikte Bertrand eğri çifti oluşturur.

Örnek 2.2: $\kappa_\alpha = 2, c = 0$ için,

$$x(s) = \frac{\cos(2s)}{2}, \quad y(s) = \frac{\sin(2s)}{2}$$

olmak üzere $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ eğrisinin inversiyonu ve kendisi şekil 2.3 deki gibidir.

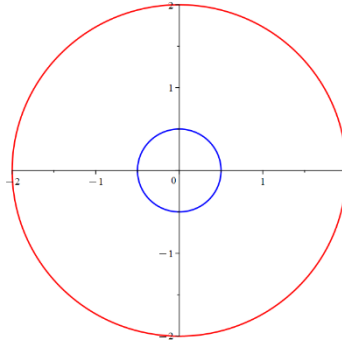


Şekil 2.3 Kırmızı eğri $\alpha(s)$ olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, mavi eğri: $\beta(s)$ olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$.

$\kappa_\alpha = 1/2, c = 1$ için,

$$x(s) = 2 \cos\left(\frac{s}{2} + 1\right), \quad y(s) = 2 \sin\left(\frac{s}{2} + 1\right),$$

olmak üzere $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ eğrisinin inversiyonu ve kendisi şekil 2.4'deki gibidir.



Şekil 2.4 Kırmızı eğri $\alpha(s)$ olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, mavi eğri: $\beta(s)$ olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$.

β eğrisi α eğrisinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeri olması durumunda,

$$\frac{\alpha(s)}{\|\alpha(s)\|} = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_\alpha(s)} N_\alpha(s),$$

ifadesi düzenlenirse

$$\alpha(s) = \frac{\|\alpha(s)\|}{(1 - \|\alpha(s)\|)\kappa_\alpha(s)} N_\alpha(s), \quad (2.7)$$

elde edilir. (1.1) eşitliği göz önüne alınırsa, $f(s) = 0$ olduğundan α eğrisinin yer vektörü

$N_\alpha(s)$ doğrultusundadır. (1.2) eşitliklerinden $g(s) = \frac{-1}{\kappa_\alpha(s)}$ değeri sabittir. Fakat

$$\frac{\|\alpha(s)\|}{(1 - \|\alpha(s)\|)} = -1 \text{ olamayacağından aşağıdaki sonucu verebiliriz.}$$

Sonuç 2.3: İnverson eğrisi, eğrinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeri olan bir eğri yoktur.

3. Uzak Eğrilerinin İnversonu

α eğrisinin inversonu olan eğri γ olmak üzere,

$$\gamma(s_*) = \frac{r^2}{\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle} \alpha(s),$$

şeklinde tanımlanır [6]. " S_* " γ -eğrisinin yay parametresi olmak üzere γ -eğrisinin Frenet vektörleri,

$$\left(\frac{ds_*}{dt} \right) = \frac{r^2}{\|\alpha(s)\|^2},$$

olmak üzere,

$$T_\gamma(s_*) = \frac{(-f(s)^2 + g(s)^2 + h(s)^2)}{\|\alpha(s)\|^2} T_\alpha(s) - \frac{2g(s)f(s)}{\|\alpha(s)\|^2} N_\alpha(s) - \frac{2f(s)h(s)}{\|\alpha(s)\|^2} B_\alpha(s), \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
N_{\gamma}(s_*) &= \frac{-2\kappa_{\alpha}(s)f(s)^3g(s) - 2(g(s)^2 + h(s)^2)(g(s)\kappa_{\alpha}(s) + 2)f(s)}{\Psi\|\alpha(s)\|^2} T_{\alpha}(s) \\
&+ \frac{\left\{ f(s)^4\kappa_{\alpha}(s) + 2(\kappa_{\alpha}(s)h(s)^2 + g(s)^2)f(s)^2 \right.}{\Psi\|\alpha(s)\|^2} N_{\alpha}(s) \\
&\quad \left. + (\kappa_{\alpha}(s)h(s)^2 - g(s)(g(s)\kappa_{\alpha}(s) + 2))(g(s)^2 + h(s)^2) \right\} \\
&+ \frac{2(-g(s)\kappa_{\alpha}(s) + 1)h(s)f(s)^2 - 2(1 + g(s)\kappa_{\alpha}(s))h(s)(g(s)^2 + h(s)^2)}{\Psi\|\alpha(s)\|^2} B_{\alpha},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
B_{\gamma}(s_*) &= \frac{2f(s)h(s)\kappa(s)}{\Psi} T_{\alpha}(s) + \frac{2h(s)(1 + g(s)\kappa_{\alpha}(s))}{\Psi} N_{\alpha}(s) \\
&+ \frac{\left((-f(s)^2 - g(s)^2 + h(s)^2)\kappa_{\alpha}(s) - 2g(s) \right)}{\Psi} B_{\alpha}(s),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

eğrilik ve burulması

$$\kappa_{\gamma}(s_*) = \frac{\Psi}{r^2}, \tag{2.11}$$

$$\tau_{\gamma}(s_*) = \frac{\left(-2h(s)\kappa'_{\alpha}(s) + (\|\alpha(s)\|^2\kappa_{\alpha}(s) + 2g(s))\tau_{\alpha}(s)\kappa_{\alpha}(s) \right)\|\alpha(s)\|^4}{\Psi}, \tag{2.12}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\Psi = \sqrt{\|\alpha(s)\|^4\kappa_{\alpha}(s)^2 + 4g(s)\|\alpha(s)\|^2\kappa_{\alpha}(s) + 4g(s)^2 + 4h(s)^2}.$$

$\gamma(s_*)$ eğrisi α eğrisinin involütü olması durumunda, $\langle T_{\alpha}(s), T_{\gamma}(s_*) \rangle = 0$ olacağından (2.8) eşitliğinden

$$-f(s)^2 + g(s)^2 + h(s)^2 = 0 \tag{2.13}$$

ve $\gamma(s_*) = \alpha(s) + \lambda T_{\alpha}(s)$ eşitliğinin her iki tarafının s' ye göre türevi alınırsa

$$T_{\gamma}(s_*) \frac{ds_*}{ds} = T_{\alpha}(s)(1 + \lambda') + \lambda\kappa_{\alpha}(s)N_{\alpha}(s) \tag{2.14}$$

olup, $T_{\gamma}(s_*)$ 'ın $B_{\gamma}(s_*)$ üzerinde bileşeni olmayacağı görülür. Bu durumda (2.8) eşitliğinden $f(s)h(s) = 0$ olacaktır. $f(s) = 0$ ise (2.13) eşitliğinden $g(s)^2 + h(s)^2 = 0$ olur ki bu mümkün değildir. $h(s) = 0$ ise (2.13) den $f(s)^2 = g(s)^2$ ve $f(s) = \pm g(s)$ olacaktır. (1.4) eşitlikleri

$$f'(s) - f(s)\kappa_{\alpha}(s) = 1,$$

$$\in f'(s) + f(s)\kappa_{\alpha}(s) = 0,$$

$$g(s)\tau_{\alpha}(s) = 0,$$

halini alır. Üçüncü denklemden $f(s) \neq 0$ ve $g(s) \neq 0$ olacağından $\tau_{\alpha} = 0$ olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} f'(s) - \epsilon f(s) \kappa_\alpha(s) &= 1, \\ \epsilon f'(s) + f(s) \kappa_\alpha(s) &= 0, \end{aligned}$$

denklemlerinin çözümü

$$f(s) = \frac{s}{2} + c_0, \quad \kappa_\alpha(s) = \frac{\epsilon}{2f(s)},$$

olup α eğrisinin pozisyon vektörü

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{2} + c_0 \right) T_\alpha(s) + \epsilon \left(\frac{s}{2} + c_0 \right) N_\alpha(s),$$

elde edilir. Bu eğrinin kartezyen koordinatlarındaki bir çözümü

$$x(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(s) - \epsilon \sin(s)), \quad y(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(s) + \epsilon \cos(s)), \quad z(s) = c,$$

olmak üzere $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ dir.

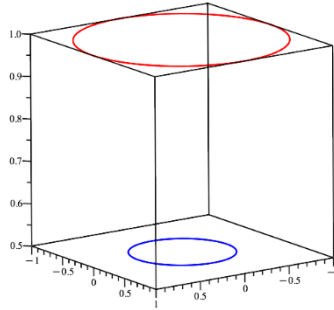
Sonuç 3.1: E^3 uzayında pozisyon vektörü

$$\alpha(s) = \left(\frac{s}{2} + c_0 \right) T_\alpha(s) + \epsilon \left(\frac{s}{2} + c_0 \right) N_\alpha(s)$$

olan uzay eğrileri kendi inversiyon eğrileri ile birlikte involüt-evolüt eğri çifti oluşturur. Bu sonuç 2.1 ile uyumludur.

Örnek 3.1: $c = 1$ $\epsilon = 1$ için, $x(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(s) - \sin(s))$,

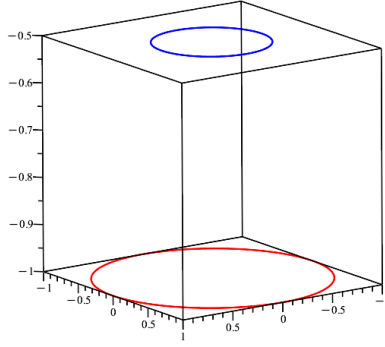
$y(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(s) + \cos(s))$, $z(s) = 1$ için, $\alpha(s)$ ve $\gamma(s)$ eğrileri şekil 3.1'deki gibidir.



Şekil 3.1 Kırmızı eğri $\alpha(s)$ olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, mavi eğri: $\gamma(s)$ olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$.

Örnek 3.2 $c = -1$ $\epsilon = 1$ için, $x(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(s) - \sin(s))$,

$y(s) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(s) + \cos(s))$, $z(s) = -1$ için, $\alpha(s)$ ve $\gamma(s)$ eğrileri şekil 3.2'deki gibidir.



Şekil 3.2 Kırmızı eğri $\alpha(s)$ olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, mavi eğri: $\gamma(s)$ olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$.

γ eğrisi α eğrisinin Bertrand eğri çifti olması durumunda, eğrilerin karşılıklı noktalarında $N_\alpha(s)$ ve $N_\gamma(s_*)$ vektörleri lineer bağımlıdır. Bu durumda $\langle T_\gamma(s), N_\alpha(s) \rangle = 0$ ve $\langle B_\gamma(s), N_\alpha(s) \rangle = 0$ olup (2.8) ve (2.10) eşitliklerinden $g(s) \cdot f(s) = 0$ ve $h(s)(1 + g(s)\kappa_\alpha(s)) = 0$ elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden $g(s) \neq 0$ ve $f(s) = h(s) = 0$ olacağı açıktır. (1.4) eşitliklerinden α eğrisinin düzlemsel olacağı ve $g(s) = \frac{-1}{\kappa_\alpha(s)}$ sabit olacağı görülecektir.

Sonuç 3.2: E^3 uzayında pozisyon vektörü

$$\alpha(s) = \frac{-1}{\kappa_\alpha(s)} N_\alpha(s),$$

olan sabit eğrilikli uzay eğrileri (çemberler) kendi inversiyon eğrileri ile birlikte Bertrand eğri çifti oluşturur.

Bu sonuç, sonuç 2.1 ile uyumludur. Bu durumda α eğrisinin pozisyon vektörlerinden birisi

$$\alpha(s) = \frac{1}{\kappa_\alpha} (\cos(\kappa_\alpha s + c_0), \sin(\kappa_\alpha s + c_0), c_1),$$

şeklinde olacaktır.

γ eğrisi α eğrisinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeri olması durumunda,

$$\frac{\alpha(s)}{\|\alpha(s)\|} = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa_\alpha} N_\alpha(s),$$

ifadesi düzenlenirse,

$$\alpha(s) = \frac{\|\alpha(s)\|}{(1 - \|\alpha(s)\|)\kappa_\alpha} N_\alpha(s), \quad (2.15)$$

elde edilir. (1.3) eşitliği göz önüne alınırsa, $f(s) = h(s) = 0$ olduğundan α eğrisinin yer vektörü $N_\alpha(s)$ doğrultusundadır. (1.4) eşitliklerinden $g(s) = \frac{-1}{\kappa_\alpha(s)}$ değeri sabittir.

Fakat $\frac{\|\alpha(s)\|}{(1-\|\alpha(s)\|)} = -1$ olamayacağından sonuç 2.3 e benzer aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.3: E^3 uzayında inversiyon eğrisi, eğrinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeri olan bir eğri yoktur.

γ eğrisi bir Mannheim eğrisi ve α , γ 'nın Mannheim eğri çifti olması durumunda, α eğrisinin N_α ile γ eğrisinin B_γ vektörleri lineer bağımlı olacağından $\langle T_\alpha(s), B_\gamma(s_*) \rangle = \langle B_\alpha(s), B_\gamma(s_*) \rangle = 0$ olup (2.10) eşitliğinden

$$f(s)h(s)\kappa_\alpha(s) = 0, \quad (2.16)$$

$$(-f(s)^2 - g(s)^2 + h(s)^2)\kappa_\alpha - 2g(s) = 0, \quad (2.17)$$

olmalıdır. Yine $N_\alpha(t)$ ile $B_\gamma(s_*)$ lineer bağımlı olacağından $\langle N_\alpha(s), T_\gamma(s_*) \rangle = \langle N_\alpha(s), N_\gamma(s_*) \rangle = 0$ olup (2.8) eşitliğinden ve $f(s)g(s) = 0$ ve (2.9) eşitliğinden

$$\left\{ \begin{aligned} &f(s)^4 \kappa_\alpha(s) + 2(\kappa_\alpha(s)h(s)^2 + g(s)^2)f(s)^2 \\ &+ (\kappa_\alpha(s)h(s)^2 - g(s)^2)(g(s)\kappa_\alpha(s) + 2)(g(s)^2 + h(s)^2) \end{aligned} \right\} = 0, \quad (2.18)$$

olacaktır. Bu durumda ya $f(s) = 0$ ya da $g(s) = h(s) = 0$ olmalıdır. $f(s) = 0$ için;

$$(-g(s)^2 + h(s)^2)\kappa_\alpha(s) - 2g(s) = 0 \quad (2.19)$$

ve

$$(\kappa_\alpha(s)h(s)^2 - g(s)(g(s)\kappa_\alpha(s) + 2)(g(s)^2 + h(s)^2)) = 0 \quad (2.20)$$

olur. (2.20) düzenlenirse

$$((-g(s)^2 + h(s)^2)\kappa_\alpha(s) - 2g(s)).(g(s)^2 + h(s)^2) = 0,$$

$g(s)^2 + h(s)^2 \neq 0$ olduğundan çözüm (2.19) eşitliğinden

$$h(s) = \pm \sqrt{\frac{g(s)(g(s)\kappa_\alpha(s) + 2)}{\kappa_\alpha(s)}},$$

bulunur. $g(s) = h(s) = 0$ olması durumunda (2.17) ve (2.18) denklemleri

$$f(s)^2 \kappa_\alpha(s) + 2g(s) = 0,$$

$$f(s)^4 \kappa_\alpha(s) = 0,$$

denklemlerine dönüşür ki bu durumda sıfırdan farklı $f(s)$ çözümü yoktur.

$f(s) = h(s) = 0$ olması durumunda (2.17) ve (2.18) denklemleri

$$g(s)\kappa_\alpha(s) + 2 = 0,$$

halini alır. Buradan $g(s) = \frac{-2}{\kappa_\alpha(s)}$ bulunur.

Sonuç 3.4: γ eğrisi bir Mannheim eğrisi ve α eğrisi γ nın Mannheim eğri çifti ise α eğrisinin yer vektörü aşağıdaki gibidir

$$\alpha(s) = g(s)N_\alpha(s) \pm \sqrt{\frac{g(s)(g(s)\kappa_\alpha(s)+2)}{\kappa_\alpha(s)}}B_\alpha(s).$$

Diğer taraftan

$$\alpha(s) = \frac{-2}{\kappa_\alpha(s)}N_\alpha(s),$$

denkleminde $\kappa_\alpha(s)$ sabit olduğundan eşitliği sağlayan α eğrisi için çözüm yapılırsa,

$$\alpha(s) = \frac{2}{\kappa_\alpha(s)} \left(\cos\left(\frac{\kappa}{2}s\right), \sin\left(\frac{\kappa}{2}s\right), c \right),$$

şeklinde bir düzlemsel eğridir.

γ eğrisi α eğrisinin sabit genişlikli bir eğri çifti olması durumunda

$$d(\alpha(s), \gamma(s)) = \frac{|r^2 - \|\alpha(s)\|^2|}{\|\alpha(s)\|},$$

değeri sabit ve $\langle T_\alpha(s), T_\gamma(s_*) \rangle = -1$ olmalıdır. (2.8) eşitliğinden $g(s)^2 + h(s)^2 = 0$ olup, bu ise α eğrisinin orijinden geçen bir doğru olması demektir. γ eğrisinin tanımından $\gamma(s) = \frac{r^2}{f}T_\alpha(s)$ şeklindedir ve f sabit olacağından γ eğrisi α eğrisinin teğeti doğrultusunda sabit bir vektör olacaktır. Bu ise γ nın α eğrisi ile çakışık bir eğri olması demektir.

Sonuç 3.5: γ eğrisi α eğrisinin sabit genişlikli bir eğri çifti ise α ile γ eğrileri çakışık birer doğrudur.

Diğer taraftan α ve onun inversiyonu olan γ eğrilerinin pozisyon vektörü

$$\gamma = FT_\gamma + GN_\gamma + HB_\gamma$$

olmak üzere $F = \langle \gamma, T_\gamma \rangle$, $G = \langle \gamma, N_\gamma \rangle$, $H = \langle \gamma, B_\gamma \rangle$ katsayıları hesaplanırsa;

$$F = \frac{-r^2 f(s)}{\|\alpha(s)\|^2},$$

$$G = \frac{-r^2}{\Psi \|\alpha(s)\|^2} \left\{ \|\alpha(s)\|^2 g(s) \kappa_\alpha(s) + 2(g(s)^2 + h(s)^2) \right\},$$

$$H = \frac{r^2 \kappa_\alpha(s) h(s)}{\Psi},$$

elde edilir. Bu durumda γ eğrisinin yer vektörü f, g, h cinsinden

$$\gamma = \frac{-r^2 f(t)}{\|\alpha(t)\|^2} T_\gamma + \frac{-r^2 \left\{ \|\alpha(t)\|^2 g(t) \kappa_\alpha(t) + 2(g(t)^2 + h(t)^2) \right\}}{\Psi \|\alpha(t)\|^2} N_\gamma + \frac{r^2 \kappa_\alpha(t) h(t)}{\Psi} B_\gamma$$

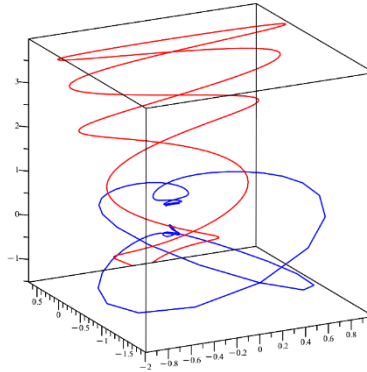
şeklinde olacaktır. Bu durumda aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.6 : α eğrisinin pozisyon vektörü normal düzlemde yatıyorsa, inversiyonu olan γ eğrisinin pozisyon vektörü de normal düzlemde uzanır. Eğer α eğrisinin pozisyon vektörü oskülatör düzlemde yatıyorsa, inversiyonu olan γ eğrisinin pozisyon vektörü de oskülatör düzlemde uzanır. Fakat rektifyan eğrilerin inversiyonu olan eğriler rektifyan eğriler olmak zorunda değildirler.

Örnek 3.3: Herhangi bir $m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $m \neq 0$ ve $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, m bir reel sayı olmak üzere

$$\gamma_m(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(-\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)s) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)s) - \frac{1}{2} \sin(s) \right), \\ \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)s) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)s) + \frac{1}{2} \cos(s), \\ \frac{1}{4m} \cos(2ns) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı eğriye Salkowski eğrisi denir. (Şekil 3.3) [7,8].

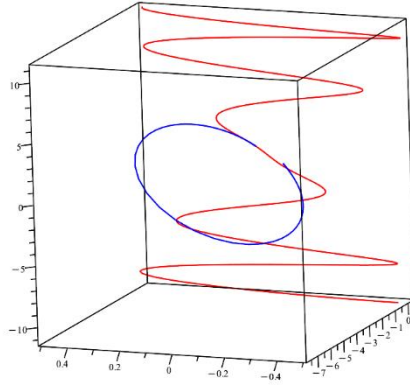


Şekil 3.3 $m = \frac{1}{16}$ için kırmızı eğri $\alpha(s)$ olup, $-5\pi \leq s \leq 5\pi$, mavi eğri: $\gamma(s)$ olup, $-8\pi \leq s \leq 8\pi$.

Örnek 3.4: Herhangi bir $m \in \mathbb{R}$ için $m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, 0 ve $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ olmak üzere

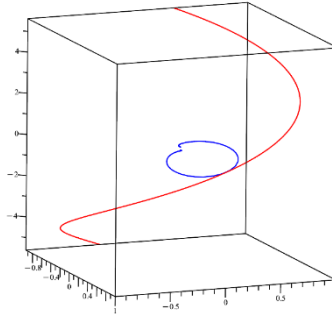
$$\gamma_m(s) = \begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2(4n^2-1)m} (n(1-4n^2+3\cos(2ns))\cos(s) + (2n^2+1)\sin(s)\sin(2ns)) \right), \\ \left(\frac{n}{2(4n^2-1)m} (n(1-4n^2+3\sin(2ns))\sin(s) - (2n^2+1)\cos(s)\sin(2ns)) \right), \\ \frac{n^2-1}{4n} (2ns + \sin(2ns)) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı eğriye anti-Salkowski eğrisi denir[7,8].



Şekil 3.4 $m = \frac{1}{16}$ için kırmızı eğri $\alpha(s)$ olup, $-5\pi \leq s \leq 5\pi$, mavi eğri: $\gamma(s)$ olup, $-\frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}$.

Örnek 3.5: $\alpha(s) = (\cos \frac{s}{\sqrt{5}}, \sin \frac{s}{\sqrt{5}}, \frac{2s}{\sqrt{5}})$ silindirik helis eğrisi için;



Şekil 3.5 Kırmızı eğri $\alpha(s)$ olup $-2\pi \leq s \leq 2\pi$, mavi eğri: $\gamma(s)$ olup $-5 \leq s \leq 5$.

Çıkar Çatışması

Makalede yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması söz konusu değildir.

Etik Kurul Beyanı

Bu çalışma için etik kurul onayı gerekmemektedir.

Kaynaklar

1. Blaschke W. Differential geometrie II. Berlin: Verlag von Julius springer; 1923.
2. Sabuncuoğlu A. Diferensiyel Geometri. 4. cilt. Nobel Yayınları; 2010.
3. Hacısalihoglu HH. Diferensiyel Geometri. Cilt I. Ankara Üniversitesi; 1993.
4. Tunçer Y., Vectorial moments of curves in Euclidean 3-space, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 2017;14(2):1-13.
5. Gray JJ, Brannan DA, Esplen MF. Geometry. The Open University. Cambridge University Pres; 1999.
6. Gray A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. CRC Pres; 1997.
7. Salkowski EL. Zur transformation von raumkurven, Mathematisch Annalen, 1909;4(66):517-557.
8. Monverde J. Salkowski curves revisited: a family of curves with constant curvature and non-constant torsion, Computer Aided Geometric Design, 2009;26:271-278.