

Monte-Carlo simülasyonsuz-Uç Değer Modelleme ile Kompozit Bir Plakanın Belirsiz Titreşim Sınırlarının Belirlenmesi

Murat KARA^{1,*}, Abdullah SEÇGİN²

¹Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 35397, İzmir(ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5798-9014>)

²Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 35397, İzmir(ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1896-7629>)

(Alınış / Received: 10.08.2017, Kabul / Accepted: 17.11.2017,
Online Yayınlanma / Published Online: 15.05.2018)

Anahtar Kelimeler
Belirsiz kompozit
plaka,
İstatistiksel
moment,
Uç değer tabanlı
modelleme,
Monte Carlo
simülasyonu

Özet: Belirsizliğe sahip titreşim sistemlerinde, cevap olasılıksal veya olasılıksal olmayan bazı simülasyon yöntemleri ile hesaplanabilmektedir. Monte Carlo simülasyonu bu amaçla en çok kullanılan olasılıksal yöntemlerden biridir. Ancak bu yöntem ile istenilen belirsiz cevap fonksiyonunun eldesi yüksek örnekleme sayısı ve buna bağlı olarak uzun hesaplama süreleri gerektirmektedir. Bu çalışmada, çeşitli belirsiz plaka parametrelerine sahip simetrik katmanlı bir kompozit plakanın serbest ve zorlanmış titreşim cevabının sınırları bir Monte-Carlo simülasyonsuz-uç değer model kurularak elde edilmiştir. Kurulan model kompozit yapının diferansiyel denkleminin istatistiksel çözümüne dayanmaktadır. Denklem çözücü olarak ayrık tekil konvolüsyon yöntemi başarı ile kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar Monte Carlo simülasyonları ile sınanarak, sunulan metodolojinin doğruluk ve çözüm süresi bağlamındaki verimi açıkça ortaya konmuştur.

Determination of Uncertain Vibration Bounds of a Composite Plate via an Extreme Value Model-without Monte Carlo simulation

Keywords
Uncertain
composite plate,
Statistical
moment,
Extreme value
based modeling,
Monte Carlo
simulation

Abstract: In vibration systems having uncertainty, the response can be predicted via some probabilistic and non-probabilistic simulation techniques. Monte Carlo simulation is one of the most commonly used probabilistic techniques for this purpose. However, obtaining uncertain response function with this method requires large number of sampling, thus longer computation times. In this study, the bounds of free and forced vibration response of a symmetrically laminated composite plate with various uncertain plate parameters are estimated by constructing an extreme value model without Monte-Carlo simulation. As an equation solver, discrete singular convolution method is successfully used. Predicted results are tested by using conventional Monte-Carlo simulations to clearly show the efficiency regarding on the accuracy and the computation times of the proposed methodology.

*Sorumlu yazar: kara.murat@deu.edu.tr

1. Giriş

Kompozit yapıların titreşim analizleri, genellikle birkaç deney sonucunda ortalama olarak belirlenmiş malzeme özellikleri ve yükleme koşulları altında yapılmaktadır. Belirlenen malzeme özellikleri yükleme ve sınır koşulları aynı hatta üretilen ürünlerde dahi küçük değişimler gösterebilir. Bu durum sistemin dinamik cevabında belirsizliğe neden olabilmektedir [1]. Belirsizlik, malzemenin içyapısındaki değişkenliklerden, sönüm ve geometrideki küçük farklılıklardan, zorlama veya sınır koşullarının değişiminden kaynaklanan kontrol edilemeyen değişkenlikler olarak tanımlanır. Bu değişkenlikler özellikle yüksek frekanslı zorlamaya maruz yapılarda gözden kaçırılmamalıdır.

Özellikle son yıllarda, yapılardaki bu belirsizliklerin nicellenmesi (uncertainty quantification) ve yayınının anlaşılabilmesi (uncertainty propagation) için pek çok çalışma yapılmaktadır. Bu çalışmalarda “olasılıksal” ve “olasılıksal olmayan” başlıkları altında çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Olasılıksal yöntemler basit olarak, sistemin belirsiz girdi değişkenlerinin istatistiksel dağılımı bilinirse, sistemin cevabı olasılık teorisi kullanılarak yine istatistiksel olarak elde edilebilir kabulüne dayanmaktadır [2-6]. Monte Carlo simülasyonu bu amaçla, genellikle uygun bir analiz tekniği (sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemi vb.) ile birlikte kullanılan en yaygın olasılıksal yöntemlerden biridir. Yöntemin başarısı örnekleme sayısı ile yakından ilgilidir. Ancak yüksek örnekleme sayısı yüksek hafıza ihtiyacı ve uzun hesaplama süreleri anlamına gelmektedir. Bu nedenle yine aynı yardımcı analiz teknikleri ile birlikte kullanılabilen ve daha hızlı sonuç verme yeteneğine sahip “çokterimli (polinom) kaos açılımı (ÇKA)” yöntemi ilgi görmeye

başlamıştır [5,6]. Bu yöntemde, belirsiz değişkenlerin dağılımı bir çokterimli olarak modellenir ve sistem cevabı yine benzer çokterimli katsayıları cinsinden ifade edilir. Bu yöntemde, dağılım tipi için uygun çokterimli tipi kullanılmaması durumunda hesaplama süreleri ve bunun yanında belirsizlik hesabındaki hata miktarı artmaktadır.

Bunun yanında daha az sayıda Monte Carlo simülasyonu kullanarak sınır değer tahmini yapabilen uç değer teorisi (UDT) tabanlı modelleme belirsiz titreşim problemlerinin sınırlarının belirlenmesinde başarı ile uygulanmıştır [7-11]. Bu çalışmada, sözü edilen yöntemlere bir alternatif olarak, belirsiz yapıların diferansiyel denklemlerinin istatistiksel olarak çözümlenebilen ve bu istatistiksel cevapların sınır değerlerini tahmin edebilen Monte-Carlo simülasyonsuz bir uçdeğer model geliştirilmiştir. Önerilen yaklaşım sönüm, kalınlık ve özgül hacim gibi belirsiz parametrelere sahip simetrik katmanlı bir kompozit plakanın serbest ve zorlanmış titreşim sınırlarının tahmin edilmesi problemine uygulanmıştır. Sunulan metodoloji çözüm süresi ve hafıza ihtiyacı gibi kısıtlara sahip olan Monte Carlo simülasyon verilerine ihtiyaç duymamaktadır. Sunulan yöntemle elde edilen sonuçlar Monte-Carlo yöntemi ile sınırlanarak tekniğinin kabiliyeti ortaya konulmuştur.

2. Matematiksel Formülasyonlar

2.1. Simetrik katmanlı bir kompozit plakanın eğilme titreşimlerinin diferansiyel denklemi

ω frekansına sahip harmonik noktasal bir dış kuvvete maruz simetrik katmanlı bir kompozit plakanın eğilme titreşimlerinin diferansiyel denklemi şu şekilde ifade edilir [12]:

$$(1+1j\eta) \left\{ D_{11} \frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial y^4} \right\} - \rho h \frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} = F_0 e^{j\omega t} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \quad (1)$$

Burada, F_0 zorlamanın genliğini, $j = \sqrt{-1}$, t $\delta(x-x_0) \delta(y-y_0)$, kuvvetin (x_0, y_0) uygulama konumundaki noktasallığını ifade eden Dirac-delta fonksiyonunu, w eğilme titreşimini, η plakanın yapısal sönümünü, ρ plakanın birim alan için kütleini, h toplam kalınlığı, (x_0, y_0) zorlama noktasını, D_{11} , D_{12} , D_{16} , D_{26} ve D_{66} kompozit plakanın eğilme rijitliklerini göstermektedir.

Eğilme rijitlikleri, plakanın orta noktasına göre her bir katmanın pozisyonunun bir fonksiyonu olarak yazılır [12]:

$$D_{mn} = \sum_{k=1}^N Q_{mnk} (\theta_k) \frac{(h_l(k+1))^3 - (h_l(k))^3}{3} \quad (2)$$

Burada, $h_l(k)$ k katmanının orta eksene göre konumunu, θ_k ise k katmanındaki fiber açısını, Q_{mnk} ise k katmanı için direngenlik matrisinden hesaplanan Q matrisinin (m, n) elemanıdır. Q matrisinin hesaplanması için daha detaylı açıklamalar referans [12]'den alınabilir. Her bir katmandaki kalınlığın eşit olduğu kabulü yapılırsa, Denklem (2) plakanın toplam kalınlığı (h) cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$D_{mn} = \sum_{k=1}^N Q_{mnk} (\theta_k) \frac{h^3}{3} \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{k}{N} \right)^3 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{(k-1)}{N} \right)^3 \right), \quad (m, n = 1, 2, 6) \quad (3)$$

Denklem (1) zaman bağımsız olarak, belirsiz sönüm $R^\xi = 1+1j\eta^\xi$, belirsiz kalınlık h^ξ ve belirsiz özgül hacim $r_\rho^\xi = 1/\rho^\xi$ cinsinden ξ rastgele dağılımlı olarak yeniden yazılırsa

$$R^\xi r_\rho^\xi \left\{ D_{11}^{h^\xi} \frac{\partial^4 w^\xi(x,y)}{\partial x^4} + 4D_{16}^{h^\xi} \frac{\partial^4 w^\xi(x,y)}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12}^{h^\xi} + 2D_{66}^{h^\xi}) \frac{\partial^4 w^\xi(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}^{h^\xi} \frac{\partial^4 w^\xi(x,y)}{\partial x \partial y^3} + D_{22}^{h^\xi} \frac{\partial^4 w^\xi(x,y)}{\partial y^4} \right\} - \omega^2 w^\xi(x,y) = \frac{r_\rho^\xi}{h^\xi} F_0 \delta(x-x_0) \delta(y-y_0). \quad (4)$$

şeklinde stokastik (olasılıksal) diferansiyel denklem elde edilir. Burada $D_{ij}^{h^\xi} = D_{ij} / h^\xi$.

Basit mesnet sınır koşuluna sahip ince bir kompozit plaka için analitik doğal frekans (ω_{an}),

$$\omega_{an} = \left(\frac{D_{11}}{\rho h} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + \frac{2D_{12}}{\rho h} \left(\frac{m\pi}{ab} \right)^2 + \frac{4D_{66}}{\rho h} \left(\frac{m\pi}{ab} \right)^2 + \frac{D_{22}}{\rho h} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right)^{1/2} \quad (5)$$

ile ifade edilir [13]. Burada, a ve b plakanın kenar uzunluklarını göstermektedir. Bir dış kuvvet altında, sistemin yerdeğiştirme cevabı ise mod süperpozisyon tekniği yardımıyla şu şekilde belirlenebilir:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right). \quad (6)$$

Burada, $m, n=1,2,3,\dots$ ve

$$W_{mn} = \frac{4F}{ab} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{a}x_0\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y_0\right)}{(1+1j\eta)\bar{D}-\rho h\omega^2}, \quad (7)$$

$$\bar{D} = D_{11}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2D_{12}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + 4D_{66}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_{22}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4. \quad (8)$$

2.2. Belirsiz değişkenlere sahip ince plakalar için Ayrık Tekil Konvolüsyon (DSC) Yöntemi

DSC tekniğinde, bir W fonksiyonu ve onun n . dereceden türevi sayısal olarak şu şekilde ifade edilebilir [14,15]:

$$W^{(n)}(R_{i_r}) \approx \sum_{k_r=-M_r}^{M_r} G_{k_r}^{(n)} W(R_{i_r+k_r}). \quad (9)$$

Burada, $i_r = 0,1,2,L, N_r - 1$ tamsayıları, $r: x, y'$ e göre yönleri, $R: x, y$ yönlerindeki X, Y ayrık koordinatları, N_r ve M_r ise sırasıyla plakanın r yönündeki yapısal ve yardımcı noktalarının sayısını göstermektedir. $G_{k_r}^{(n)}$ ise

$$G_{k_r}^{(n)} = \frac{d^n}{dr^n} \left(\frac{\sin\left[\frac{\pi}{\Delta}(R_{i_r} - R_{k_r})\right]}{\pi/\Delta(R_{i_r} - R_{k_r})} \cdot \exp\left(-\frac{(R_{i_r} - R_{k_r})^2}{2\kappa^2}\right) \right), \quad (10)$$

ile ifade edilir. Burada, Δ üniform dağılımlı ayrıklama (diskretizasyon) noktalarının arasındaki uzaklıktır.

Denklem (9), Denklem (4)'ün homojen formu (serbest titreşim analizi) için uygulanırsa, sınır koşullarının uygulanmasından sonra $(N_x - 2 \times N_y - 2)$ boyutuna sahip bir matris denklem sistemi elde edilir:

$$\left\{ \begin{aligned} &R^\xi r_\rho^\xi (D_{11}^{h,\xi} \Gamma_x^4 \otimes I_y + 4D_{16}^{h,\xi} \Gamma_x^3 \otimes \Gamma_y^1 \\ &+ 2(D_{12}^{h,\xi} + 2D_{66}^{h,\xi}) \Gamma_x^2 \otimes \Gamma_y^2 \\ &+ 4D_{26}^{h,\xi} \Gamma_x^1 \otimes \Gamma_y^3 + D_{22}^{h,\xi} I_x \otimes \Gamma_y^4) \\ &- [\lambda_n^\xi I_x \otimes I_y] \end{aligned} \right\} W^\xi(X, Y) = 0 \quad (11)$$

Burada, λ_n^ξ belirsiz özdeğerleri, $\Gamma_r^{(n)}$ n . dereceden DSC karakteristik matrisini, I_r birim matrisi ve \otimes Kroneker çarpımı göstermektedir. Bu metodun detaylı uygulamaları için Referans [14,15] incelenebilir. Denklem (11) basit olarak şu şekilde gösterilebilir:

$$\left\{ \begin{aligned} &Z_{11} [D_{x^4}^4] + 4Z_{16} [D_{x^3y}^4] + 2(Z_{12} + 2Z_{66}) [D_{x^2y^2}^4] \\ &+ 4Z_{26} [D_{xy^3}^4] + Z_{22} [D_{y^4}^4] - [\omega_n^2] \end{aligned} \right\} W = 0 \quad (12)$$

Burada, $(i,j=1,2,6)$ için $Z_{ij} = R^\xi r_\rho^\xi D_{ij}^{h,\xi}$, $[D_{x^4}^4] = \Gamma_x^4 \otimes I_y$, $[D_{x^3y}^4] = \Gamma_x^3 \otimes \Gamma_y^1$, $[D_{x^2y^2}^4] = \Gamma_x^2 \otimes \Gamma_y^2$, $[D_{xy^3}^4] = \Gamma_x^1 \otimes \Gamma_y^3$ ve $[D_{y^4}^4] = I_x \otimes \Gamma_y^4$ 'dir. Ayrıca, $[\omega_n^2]$, $(N_x - 2) \cdot (N_y - 2)$ elemandan oluşan diyagonal bir matristir ve Denklem (12)'de ξ sadelik amacıyla gösterilmemiştir.

2.3. Rastgele değişkenli ince plakalar için istatistiksel moment ifadeleri

A ve B istatistiksel değişkenlerin toplamlarının ve çarpımlarının varyansı şu şekilde tanımlanır [16]:

$$\sigma^2(a_1 A m b_1 B) = a_1^2 \sigma_A^2 + b_1^2 \sigma_B^2 + m 2a_1 b_1 \text{cov}(A, B) \quad (13)$$

$$\sigma^2(A \cdot B) = \bar{A}^2 \sigma_B^2 + \bar{B}^2 \sigma_A^2 + \sigma_A^2 \cdot \sigma_B^2 \quad (14)$$

Burada, σ^2 standart sapmanın (σ) karesini yani varyansı, a_1 ve b_1 sabit sayıları, üst çizgi ise istatistiksel değişkenin ortalama değerini ve cov ise kovaryansı göstermektedir. Kovaryans

$$\text{cov}(A,B) = \overline{AB} - \overline{A}\overline{B}. \quad (15)$$

olarak tanımlanır. Denklem (14) kullanılarak Denklem (12)'nin varyansı şu şekilde elde edilir:

$$\sigma^2 \left\{ \left([T] - \omega_n^2 [I] \right) W \right\} = \overline{\left([T] - \omega_n^2 [I] \right)^2} \sigma_W^2 + \overline{W}^2 \sigma_{([T]-\omega_n^2[I])}^2 + \sigma_{([T]-\omega_n^2[I])}^2 \sigma_W^2 = 0, \quad (16)$$

burada,

$$[T] = Z_{11} \begin{bmatrix} D_{x^4}^4 \end{bmatrix} + 4Z_{16} \begin{bmatrix} D_{x^3y}^4 \end{bmatrix} + 2Z_{12} \begin{bmatrix} D_{x^2y^2}^4 \end{bmatrix} + 4Z_{66} \begin{bmatrix} D_{x^2y^2}^4 \end{bmatrix} + 4Z_{26} \begin{bmatrix} D_{xy^3}^4 \end{bmatrix} + Z_{22} \begin{bmatrix} D_{y^4}^4 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Tüm istatistiki parametrelerin birbirlerinden bağımsız olduğu kabul edilirse, Denklem (16) aşağıdaki koşulların sağlanması ile çözülebilir:

$$i. \quad \overline{[T] - [\omega_n^2]} = [\overline{T}] - [\overline{\omega_n^2}] = 0, \quad (18)$$

$$ii. \quad \sigma_{([T]-[\omega_n^2])}^2 = 0. \quad (19)$$

Denklem (18), ortalama doğal frekansların elde edilmesi amacıyla kolaylıkla çözülebilirken, Denklem (19), Denklem (13) yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_{([T]-[\omega_n^2])}^2 = \sigma_{[T]}^2 + [I]^2 \sigma_{\omega_n^2}^2 - 2[I] \text{cov}([T], \omega_n^2) \quad (20)$$

$$\sigma_{[T]}^2 = \begin{bmatrix} D_{x^4}^4 \end{bmatrix}^2 \sigma_{Z_{11}}^2 + 16 \begin{bmatrix} D_{x^3y}^4 \end{bmatrix}^2 \sigma_{Z_{16}}^2 + 4 \begin{bmatrix} D_{x^2y^2}^4 \end{bmatrix}^2 (\sigma_{Z_{12}}^2 + 4\sigma_{Z_{66}}^2) + 16 \begin{bmatrix} D_{xy^3}^4 \end{bmatrix}^2 \sigma_{Z_{26}}^2 + \begin{bmatrix} D_{y^4}^4 \end{bmatrix}^2 \sigma_{Z_{22}}^2 \quad (21)$$

ve $\sigma_{Z_{ij}}^2$ ise Denklem (14) kullanılarak:

$$\sigma_{Z_{ij}}^2 = D_{ij}^2 \left(R^2 \sigma_{r_p}^2 + \sigma_{R^2 r_p}^2 + \sigma_R^2 \sigma_{r_p}^2 \right) + \sigma_{D_{ij}}^2 \left(R^2 r_p^2 + R^2 \sigma_{r_p}^2 + \sigma_R^2 r_p^2 + \sigma_R^2 \sigma_{r_p}^2 \right) \quad (22)$$

olarak elde edilir. Doğal frekansların istatistiki parametreleri hesaplanırken, Denklem (22)'de sönüm katsayısı (R)'nin belirsiz olmadığı unutulmamalıdır. Tüm istatistiki parametrelerin bağımsız olduğu kabul edildiğinden (yani $\text{cov}([T], \omega_n^2) = 0$), Denklem (20)

$$\sigma_{([T]-[\omega_n^2])}^2 = \sigma_{[T]}^2 + [I]^2 \sigma_{\omega_n^2}^2 = 0, \quad (23)$$

şekline dönüşür. Denklem (23) ve Denklem (18) kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilebilir;

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\omega_n^2}^2 \end{bmatrix} = \text{eig} \left(\frac{\sigma_{[T]}^2}{[T]} \right). \quad (24)$$

Burada, $\text{eig}(\cdot)$ parantez içindeki ifadenin özdeğerlerini ifade eder. $\begin{bmatrix} \sigma_{\omega_n^2}^2 \end{bmatrix}$ matrisi ise doğal frekansların varyanslarının diyagonal elemanlar üzerinde bulunduran matristir. Denklem (24)'de hesaplanan değerler kullanılarak rezonans genliğindeki ve rezonans frekansındaki standart sapma değerleri şu şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 W_a \end{bmatrix} \% \begin{bmatrix} W_a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\omega_n^2}^2 \end{bmatrix} \% \begin{bmatrix} \omega_n^2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$${}^i \sigma_{\omega^2} = {}^p \sigma_{\omega_n^2}. \quad (26)$$

Burada i, p . tahrik edilen doğal frekansa tekabül eden bir tamsayıdır ve % ise eleman elemana bölümü gösteren bir semboldür.

2.4. Uç değer tabanlı modelleme

Uç değer teorisi (UDT) [17] bağımsız ve benzer olarak dağılımlanmış rastgele bir değişkenler dizisinin U_i ,

$V_n = \max\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ özelliğine sahip V_n değişkeninin istatistiki özelliklerini tanımlayan bir teoridir. Uç-değer analizinin önemli bir özelliği, bir rastgele değişkenin V_n belirli bir sınır değerini $z(p)$ (quantile) aşma olasılığının p (exceedance probability) tahmin edilmesidir, yani $\Pr\{V_n > z(p)\} = p$ şeklinde formüle edilebilir (Burada \Pr öngörülme fonksiyonudur). Stabil bir V_n dağılımı üç asimptotik dağılım tiplerinden birine aittir. Bunlar Tip I: Gumbel dağılımı, Tip II: Fréchet dağılımı veya Tip III: Weibull dağılımıdır. EV modeli kurulmadan önce, verilerin Tip 1'e uygunluğu Hasofer Wang hipotezi testi [18] ile gösterilmelidir:

$$H = \frac{k(\bar{U} - U_{kn})^2}{(k-1) \left[\sum_{i=1}^k (\bar{U} - U_{in})^2 \right]} \quad (27)$$

Burada, $\bar{U} = \left(\sum_{j=1}^k U_{jn} \right) / k$ ile ifade edilir ve U_{jn} verinin n örnekleminin azalan olarak sıralanmış j . terimidir. Bu test ile hesaplanan H değeri Referans [19]'de verilen H_U ve H_L değerlerinin arasında olmalıdır.

Pratik bir sınır belirleme işlemi eşik aşma uç değer modeli kullanılarak oluşturulabilir. Sınır, m -gözlemsel geri dönüş düzeyi u_m (m -Observational Return Level u_m) cinsinden verinin her bir m gözleminin ortalama olarak belirlenen düzeyi geçtiği değer olarak belirlenir. Fiziksel bir sınırın var olduğu durumlarda elde edilecek olan sınır gerçek fiziksel sınırın bir yaklaşımıdır. Ancak fiziksel bir sınır yoksa rastgele belirsiz yapılar için belirli bir sınır aramak anlamlı değildir.

Bu durumlarda istatistiksel ölçüler belirlemek daha uygundur. Bir Tip 1 eşik

modeli için m -gözlemsel geri dönüş düzeyi u_m şu şekilde yazılabilir [20]:

$$u_m \approx t \log \left(\frac{mk}{n} \right) + r. \quad (28)$$

Burada m sınır tahminlemenin yapıldığı yığın boyutunu, n modeli kalibre eden veri örnek boyutunu, k en üst-derece istatistiği, t ve r ise model parametrelerini ifade etmektedir. Tip 1'e ait bir uç-değer modeli şu adımlarla kurulabilir:

- 1) Her bir modal veri için az sayıda veri örnekleminin kullanılması ($n \ll m$).
- 2) Optimum en üst derece istatistiğinin $k = 1.5\sqrt{n}$ ile hesaplanması.
- 3) Eşik değerinin (r) k . azalan en üst derece istatistiği olarak seçilmesi (u_{kn}).
- 4) Modal parametre (t) için maksimum olasılık belirleyicisinin hesaplanması:

$$\hat{t} = 1/k \sum_{j=1}^k u_j - r. \quad (29)$$

Buna göre, Denklem (28)'de verilen sınır değeri tahminleyicisi şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\hat{q}(m) = \hat{t} \log \left(\frac{mk}{n} \right) + u_{kn}. \quad (30)$$

Tahminleyici için yaklaşık güven aralığı şu şekilde elde edilebilir:

$$t_{u_m}(\hat{q}) = c_n \left[\zeta_n^2 \frac{(k-1)}{k^2} + \frac{\pi^2}{6} - C_k \right]^{1/2}. \quad (31)$$

Burada, $\zeta_n = \log(km/n)$, $c_n = \hat{q}(ne) - \hat{q}(n)$, $C_k = \sum_{n=1}^{k-1} n^{-2}$ ve $e=2,718$ 'dir.

3. Sayısal Çalışmalar

Bu bölümde, belirsiz plaka parametrelerine sahip $\{0,90,0,90,0\}$ yönsellikli, simetrik katmanlı bir kompozit plakanın serbest ve zorlanmış titreşimlerinin sınır değerlerinin bulunması amaçlanmıştır. Plakanın fiziksel ve mekanik özellikleri Tablo 1'de sunulmuştur. Tablo 1'de belirsiz değişkenlerin rastgele üretilmiş standart sapmaları da verilmiştir. Bu çalışmada, tüm belirsiz değişkenlerin Normal dağılıma sahip olduğu kabul edilmiştir. Normal dağılım fiziksel parametrelere uygulandığından pozitif değerler olarak türetilmiştir.

Bu bölümde yapılan çalışmaları takip etmeyi kolaylaştırmak amacıyla sıralarsak:

Bölüm 3.1: Doğrulama çalışması için, kompozit plakanın doğal frekansları DSC yöntemi ile hesaplanmış ve analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Burada DSC yöntemi ile farklı ayrıklama sayılarında doğal frekanslar hesaplanarak hata değeri-eleman sayısı bakımından en uygun ayrıklama sayısı elde edilmiştir. Ayrıca plakanın orta noktasından $((x_0, y_0) = (0.5, 0.5))$ zorlama durumu için yine plakanın orta noktasının titreşim yerdeğiştirme-frekans cevabı analitik çözümler ile karşılaştırılarak doğrulama çalışması tamamlanmıştır.

Tablo 1. Plakanın fiziksel ve mekanik özelliklerinin ortalama ve standart sapmaları

Özellik	Ortalama	Standart sapma
x yönündeki Young modülü (E_x) [GPa]	39	0
y yönündeki Young modülü (E_y) [GPa]	8,6	0
Kayma modülü (G_{xy}) [GPa]	3,8	0
x yönündeki Poisson oranı (ν)	0,28	0
Özgül hacim ($1/\rho$) [m^3/kg]	4,762E-04	2,381E-05
Kalınlık (h) [m]	5,00E-03	5,00E-05
Kenar uzunlukları (a, b) [m x m]	1 x 1	0
Yapısal sönüm (η)	0,02	6,00E-04

Bölüm 3.2: Belirsiz kalınlık ve özgül hacim parametrelerinden 200 örneklem türetilerek belirsiz plakanın doğal frekanslarının ortalama ve standart sapma değerleri Monte Carlo simülasyonu ile belirlenmiştir. Ayrıca doğal frekansların ortalamaları ve standart sapmaları sunulan yöntem ile hesaplanmıştır. Daha sonra hesaplanan ortalama ve standart sapma değerleri kullanılarak her bir mod için doğal frekanslar normal dağılıma uygun olarak türetilmiştir. Türetilen bu doğal frekanslar için bir uç değer tabanlı model kurulmuş ve doğal frekansların üst ve alt

sınırları elde edilerek sonuçlar Monte Carlo simülasyonu ile karşılaştırılmıştır.

Bölüm 3.3: Bu bölümde ise, plakanın zorlama noktası titreşim yerdeğiştirme cevabının rezonans frekanslarındaki genliğinin ortalama ve standart sapma değerleri sunulan metodoloji ile elde edilmiştir. Daha sonra rezonans frekansındaki genlik değerleri yine, istatistiksel verilerin kullanılması ile türetilmiştir. Türetilen örneklem yardımıyla bir uç değer modeli kurulmuş ve sonuçlar Monte Carlo simülasyonu ile karşılaştırılmıştır.

3.1. DSC yönteminin doğrulaması

Bu bölümde, DSC yönteminin hassasiyeti analitik hesaplamalarla karşılaştırılarak gösterilmiştir. İlk olarak basit mesnet koşullarına sahip bir kompozit plakanın doğal frekansları farklı ayıklama sayıları için hesaplanmış ve Denklem (5) ile elde

edilen analitik sonuçlarla karşılaştırılarak % hata değerleri bazı modlar için Tablo 2’de sunulmuştur. Burada doğal frekans hesaplamalarında yapının sönüm değeri DSC ile hesaplamalarda göz önüne alınmamıştır.

Tablo 2. Farklı ayıklama sayıları için hesaplanan doğal frekanslar ve hata değerleri

Mod Sayısı	Analitik	$N_x \times N_y$ 11x11	% Hata	$N_x \times N_y$ 21x21	% Hata	$N_x \times N_y$ 31x31	% Hata	$N_x \times N_y$ 41x41	% Hata
1	12,953	12,999	0,357	12,953	2,1E-04	12,953	1,7E-06	12,953	6,2E-08
2	29,546	29,557	0,038	29,546	1,2E-05	29,546	8,1E-08	29,546	2,5E-09
3	39,196	39,196	0,000	39,196	1,2E-05	39,196	1,1E-07	39,196	4,2E-09
4	51,810	51,805	0,011	51,810	1,6E-05	51,810	1,4E-07	51,810	5,7E-09
5	59,457	59,518	0,103	59,457	9,8E-06	59,457	7,9E-08	59,457	3,1E-09
6	78,003	78,042	0,050	78,003	3,1E-06	78,003	2,9E-08	78,003	7,6E-10
7	84,101	84,186	0,102	84,101	4,9E-06	84,101	4,0E-08	84,101	1,9E-09
8	94,652	94,725	0,077	94,652	1,1E-06	94,652	8,0E-09	94,652	7,2E-10
9	101,905	102,358	0,444	101,905	1,0E-06	101,905	6,9E-09	101,905	5,2E-10
10	116,573	116,663	0,077	116,573	2,6E-06	116,573	2,1E-08	116,573	1,2E-09
11	118,183	118,574	0,330	118,183	3,1E-06	118,183	2,8E-08	118,183	8,1E-10
12	147,178	147,857	0,461	147,178	8,6E-07	147,178	8,1E-09	147,178	8,4E-11
13	152,296	152,655	0,236	152,296	4,5E-07	152,296	3,1E-09	152,296	3,7E-10
14	156,665	157,422	0,483	156,665	1,5E-06	156,665	1,1E-08	156,665	6,0E-10
15	156,782	159,539	1,759	156,782	1,8E-06	156,782	1,6E-08	156,782	3,8E-10
16	171,625	174,290	1,553	171,625	6,4E-07	171,625	6,0E-09	171,625	1,0E-10
17	175,878	176,475	0,339	175,878	6,1E-07	175,878	5,7E-09	175,878	7,4E-11
18	202,228	204,590	1,168	202,228	8,9E-07	202,228	6,9E-09	202,228	4,1E-10
19	207,241	207,975	0,354	207,241	1,0E-06	207,241	9,0E-09	207,241	2,1E-10
20	223,668	232,640	4,011	223,668	4,5E-07	223,668	1,4E-09	223,668	1,5E-10
30	316,537	339,297	7,190	316,537	2,5E-06	316,537	1,8E-09	316,537	1,3E-11
40	407,620	462,269	13,407	407,621	3,0E-05	407,620	2,4E-09	407,620	6,3E-11
50	497,948	569,305	14,330	497,949	2,9E-04	497,948	1,2E-09	497,948	6,2E-11

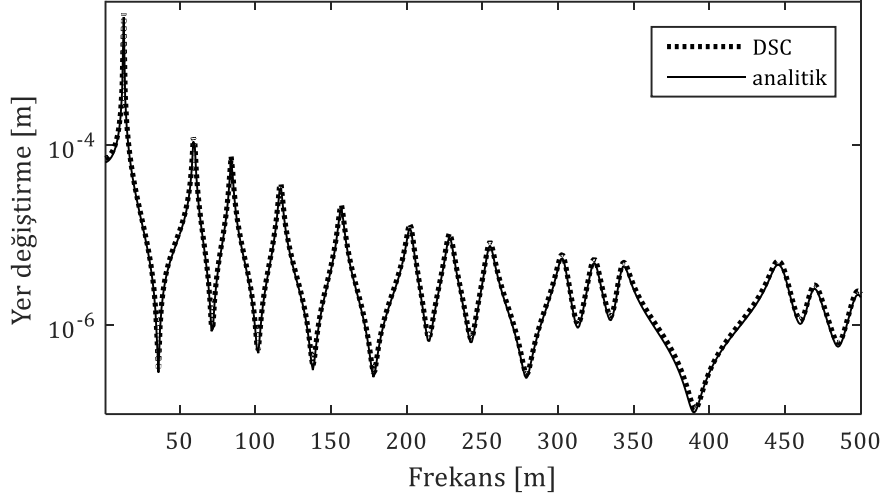
Tablo 2’den açıkça görüldüğü gibi, özellikle yüksek ayıklama nokta sayılarında, hesaplanan doğal frekanslar ile analitik sonuçlar birbirleriyle oldukça uyumludur. Bu sonuçlar incelendiğinde, $N_x \times N_y = 21 \times 21$ ayıklama sayısının 1-500Hz inceleme aralığında oldukça yeterli olduğu görülmüş ve ilerleyen

analizler için bu ayıklama sayısı seçilmiştir. Ayrıca hesaplamalarda, DSC parametresi $M_r = N_r - 1$ olarak seçilmiştir.

Bir diğer doğrulama çalışması olarak plakanın orta noktasından zorlanması durumunda, zorlama noktasının titreşim

yerdeğiştirme cevabı 1-500 Hz arası için belirlenmiş ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır (Şekil 1).

Şekil 1 incelendiğinde yine DSC yönteminin analitik sonuçlarla oldukça uyumlu sonuçlar verdiği görülmektedir.



Şekil 1. Zorlama noktası yerdeğiştirme frekans cevabı

3.2. Belirsiz Serbest Titreşim Analizi

3.2.1. Doğal frekansların istatistiksel momentleri ve belirsizlik sınırlarının tayini

Bu bölümde, öncelikle belirsiz özgül hacim ve belirsiz kalınlığa sahip simetrik katmanlı bir kompozit plakanın doğal frekanslarının istatistiksel momentleri sunulan metodoloji ile elde edilmiş ve geleneksel Monte Carlo simülasyonu ile karşılaştırılmıştır. Monte Carlo simülasyonu için örneklem normal dağılımın karakterini doğru bir şekilde ortaya koyma amacıyla iki standart sapma (% 91 olasılık) ile türetilmiştir. Hesaplanan ortalama doğal frekanslar ve standart sapmaları Tablo 3'de sunulmuştur. Tablo 3'den görüldüğü gibi, sunulan yaklaşımın sonuçları Monte Carlo simülasyonu ile elde edilen sonuçlarla oldukça uyumludur.

Belirsiz doğal frekansların sınırlarının tahmini için elde edilen doğal frekans istatistiksel momentleri (ortalama ve standart sapma) kullanılarak Normal

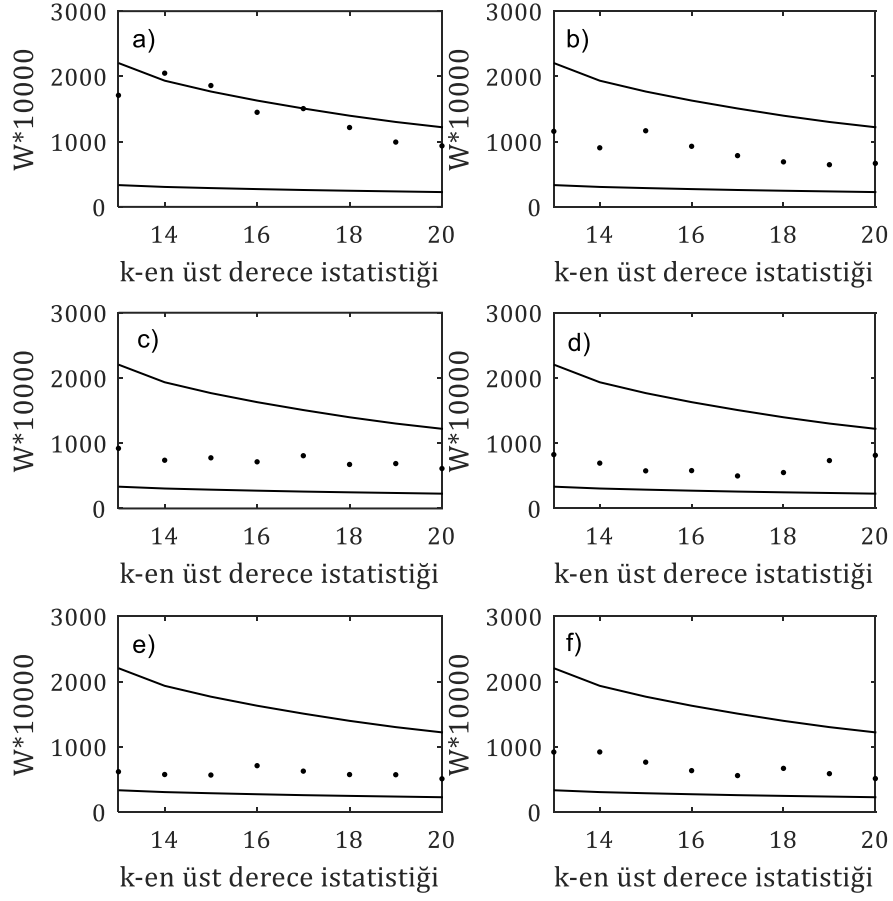
dağılıma göre her bir mod için 200 adet örneklem türetilmiştir. Türetilen örneklem kurulan uç-değer modeline aktararak belirsiz doğal frekansların alt ve üst sınırları Denklem (30)'da verilen Weisman tahminleyicisi ile hesaplanmıştır. Uç değer modeli kurulmadan önce türetilen verilerin Bölüm 2.4'de belirtildiği gibi Tip 1'e uygunluğu çeşitli modlar (1., 5., 10., 30., 40. ve 50. modlar) için Hasofer-Wang testi ile onaylanmıştır (Şekil 2).

Şekil 3'de plakanın belirsiz doğal frekanslarının alt ve üst sınırları güvenlik sınırları ile birlikte Monte Carlo simülasyon sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Monte Carlo simülasyonu 12,97 s'de tamamlanırken, önerilen teknik ile 0,65 s'de doğal frekansların alt ve üst sınırları, güvenlik sınırları ile birlikte hesaplanmıştır. Doğal frekansları alt sınırlarının belirlenmesi sırasında türetilen 200 adet doğal frekans örneklemini büyükten küçüğe göre

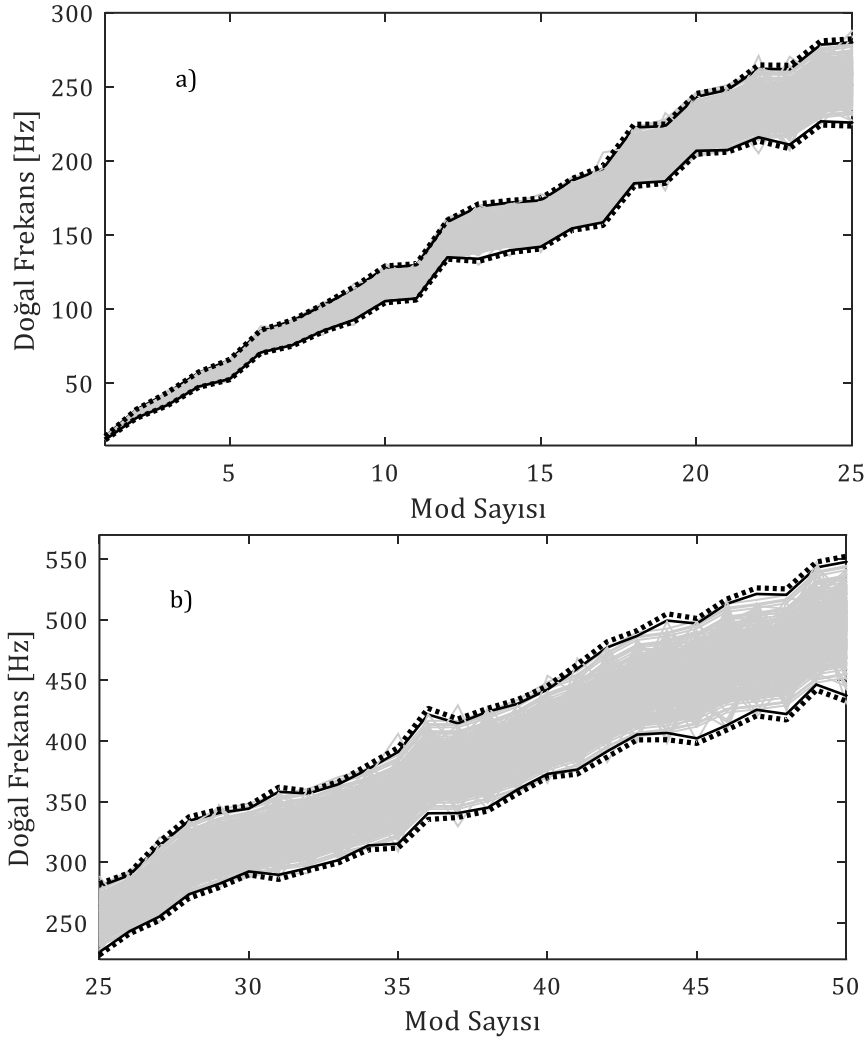
yerine küçükten büyüğe göre sıralanmıştır.

Tablo 3. Doğal frekansların ortalama ve standart sapmalarının karşılaştırılması

Mod sayısı	Doğal frekansların ortalamaları [Hz]		Doğal frekansların standart sapmaları	
	Sunulan Metodoloji	Monte Carlo	Sunulan Metodoloji	Monte Carlo
1	12,9526	12,9316	0,4061	0,6198
2	29,5458	29,4980	1,1310	1,4139
3	39,1955	39,1321	1,6244	1,8757
4	51,8102	51,7264	1,8034	2,4793
5	59,4571	59,3609	2,4651	2,8453
6	78,0034	77,8773	2,7474	3,7328
7	84,1006	83,9646	3,6549	4,0246
8	94,6519	94,4987	3,8515	4,5295
9	101,9051	101,7403	4,2289	4,8766
10	116,5731	116,3845	4,5238	5,5785
11	118,1833	117,9922	4,5531	5,6556
12	147,1778	146,9397	5,0412	7,0431
13	152,2963	152,0499	6,4975	7,2880
14	156,6650	156,4116	6,6746	7,4971
15	156,7820	156,5284	6,8461	7,5027
16	171,6247	171,3471	7,2134	8,2130
17	175,8779	175,5934	7,4057	8,4165
18	202,2277	201,9005	7,4470	9,6775
19	207,2410	206,9058	7,6297	9,9174
20	223,6683	223,3065	7,9953	10,7035
30	316,5373	316,0253	12,0032	15,1477
40	407,6206	406,9612	16,2302	19,5064
50	497,9491	497,1436	20,6584	23,8290



Şekil 2. Hasofer-Wang test sonuçları a) mod 1, b) mod 5, c) mod 10, d) mod 30, e) mod 40 ve f) mod 50 (çizgi: üst ve alt sınırlar, nokta: veri örnekleri).



Şekil 3. Belirsiz doğal frekanslar ve sınırları a) 1-25. mod b) 26-50. mod (gri çizgiler: Monte Carlo simülasyonu, siyah çizgi: sunulan metodoloji ile elde edilen sınır değerleri, noktalı siyah: sunulan metodoloji ile elde edilen sınırların güvenlik sınırları)

Şekil 3 sunulan metodoloji ile elde edilen belirsiz doğal frekansların alt ve üst sınırlarının Monte Carlo simülasyonu yapmadan başarılı bir şekilde edilebildiğini açıkça ortaya koymaktadır.

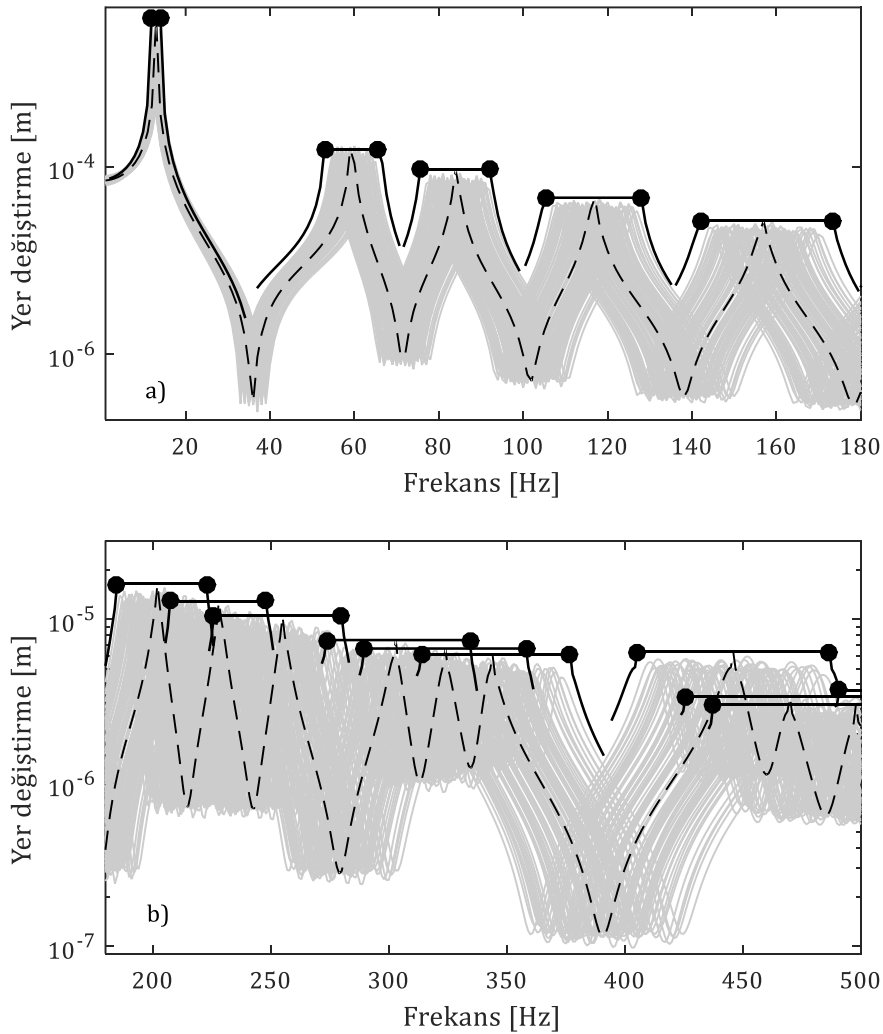
3.3. Titreşim yerdeğiştirme cevap sınırlarının belirlenmesi

Bu bölüm, belirsiz sönüm, kalınlık ve özgül hacme sahip plakanın orta

noktasından zorlanması durumunda bu noktanın belirsiz cevap genliğinin üst sınır değerlerinin hesaplanmasını içermektedir. Denklem (25) ve (26) kullanılarak elde edilen istatistikler uç değer modeline gönderilerek orta nokta zorlamasında uyarılan rezonans frekanslarının ve buna karşılık gelen rezonans genliklerinin sınırları elde edilmiştir. Uç değer modelin kurulması sırasında Hasofer-Wang testi bu yeni

veriler için tekrarlanmış fakat Bölüm 3.2.2'de elde edilen sonuçlar ile benzer sonuçlar elde edildiğinden bu bölümde sunulmamıştır. Sonuçlar Şekil 4'de Monte Carlo simülasyonu sonuçları ile birlikte gösterilmiştir. Elde edilen sınırların Monte Carlo verilerini hem düşük hem de yüksek frekanslarda oldukça güvenli şekilde sardığı açıkça

görülmektedir. Bunun yanında Monte Carlo simülasyonu ile yapılan analizler 3342,2 saniyede tamamlanırken, kurulan metodoloji ile tahmin yalnızca 35,9 saniye sürmüştür. Sonuçlar irdelendiğinde ise yüksek frekanslı titreşimlerde belirsizliklerin cevap üzerinde daha etkili olduğu görülmektedir.



Şekil 4. Belirsiz deplasman frekans cevabı a) 1-180 Hz b) 180-500 Hz (gri: Monte Carlo simülasyonu, kesikli siyah: genliğin sınırı, ●—● : frekans sınırı, siyah: genlik zarf eğrisi)

Sonuç olarak, istatistiksel momentler ve uç değer modeline dayalı olarak

geliştirilen ve bu çalışmada sunulan yaklaşım, belirsizliklerinin tahmininde

Monte Carlo simülasyonuna oldukça güçlü bir alternatiftir.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, sönüm, kalınlık ve özgül hacim belirsiz parametrelerine sahip simetrik katmanlı kompozit bir plakanın doğal frekanslarının ve titreşim yerdeğiştirme cevabının sınırlarının belirlenebilmesi için olasılıksal bir yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yaklaşım yüksek çözüm süresi ve hafıza kısıtlarına sahip Monte Carlo simülasyonuna ihtiyaç duymayan istatistiksel momentler ve uç değer modeline dayalı bir yaklaşımdır. Yöntem stokastik diferansiyel denklemin istatistiksel parametrelere göre ayrık tekil konvolüsyonu yöntemi ile başarılı bir şekilde elde edilmiştir. Yaklaşım sonucu elde edilen sonuçlar geleneksel Monte Carlo simülasyon sonuçları ile karşılaştırılarak, sunulan metodolojinin yetenekleri ortaya konmuştur. Bu sonuçlar önerilen tekniğin hesaplama süresi ve doğruluk açısından belirsizlik analizlerinde Monte Carlo simülasyonuna göre oldukça güçlü bir alternatif olarak kullanılabileceğini açıkça göstermiştir.

Kaynakça

- [1] Fahy, F.J. 1994. Statistical Energy Analysis: A Critical Overview, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Cilt. 346, s. 431-447. doi:10.1098/rsta.1994.0027
- [2] Evans, M., Swartz, T. 2000. Approximating Integrals via Monte Carlo and Deterministic Methods, OUP Oxford.
- [3] Rubinstein, R.Y., Kroese, D.P. 2016. Simulation and the Monte Carlo Method, John Wiley & Sons.
- [4] Ghanem, R.G., Spanos, P.D. 2003. Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach, Courier Corporation.
- [5] Sepahvand, K., Marburg, S., Hardtke, H.-J. 2007. Numerical solution of one-dimensional wave equation with stochastic parameters using generalized polynomial chaos expansion, Journal of Computational Acoustics, Cilt. 15, s. 579-593. doi:10.1142/S0218396X07003524
- [6] Sepahvand, K., Marburg, S., Hardtke, H.-J. 2010. Uncertainty quantification in stochastic systems using polynomial chaos expansion, International Journal of Applied Mechanics, Cilt. 2, s. 305-353. doi:10.1142/S1758825110000524
- [7] Dunne, L.W., Dunne JF. 2009 An FRF bounding method for randomly uncertain structures with or without coupling to an acoustic cavity, Journal of Sound and Vibration, Cilt. 322, s. 98-134. doi:10.1016/j.jsv.2008.10.035.
- [8] Seçgin, A., Dunne JF, Zoghaib L. 2012. Extreme-Value-Based Statistical Bounding of Low, Mid, and High Frequency Responses of a Forced Plate With Random Boundary Conditions. Journal of Vibration and Acoustics, Cilt. 134 s. 21003. doi:10.1115/1.4005019.
- [9] Seçgin, A. 2013. Modal and response bound predictions of uncertain rectangular composite plates based on an extreme value model. Journal of Sound and Vibration, Cilt. 332, s. 1306-23. doi:10.1016/j.jsv.2012.09.036.
- [10] Seçgin, A. 2013. Bir uç-değer tabanlı modelleme ile belirsiz yapıların titreşim cevap sınırlarının tahmin edilmesi. Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilim Dergisi, Cilt. 19, s.15-23.
- [11] Seçgin, A., Kara M, Ozankan A. 2015

- Uç Değer Tabanlı Modelleme ile Belirsiz Kompozit Bir Plakanın Deneysel Titreşim Cevap Sınırlarının Tahmin Edilmesi. Uluslararası Katılımlı 17. Makina Teorisi Sempozyumu, İzmir, s. 46-51.
- [12] Ashton, J.E., Whitney, J.M. 1970. Theory of laminated plates, Technomic.
- [13] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. 2nd edition. New York: McGraw-Hill College; 1959.
- [14] Seçgin, A., Sarıgül, A.S. 2008. Free vibration analysis of symmetrically laminated thin composite plates by using discrete singular convolution (DSC) approach: Algorithm and verification, Journal of Sound and Vibration, Cilt. 315, s. 197-211. doi:10.1016/j.jsv.2008.01.061
- [15] Seçgin, A., Saide Sarıgül, A. 2009. A novel scheme for the discrete prediction of high-frequency vibration response: Discrete singular convolution-mode superposition approach, Journal of Sound and Vibration, Cilt. 320, s. 1004-1022. doi:10.1016/j.jsv.2008.08.031
- [16] Goodman, L.A. 1960. On the Exact Variance of Products, Journal of the American Statistical Association, Cilt. 55, s. 708-713. doi:10.1080/01621459.1960.10483369
- [17] Coles, S. 2001. Classical Extreme Value Theory and Models, ss. 45-73. doi:10.1007/978-1-4471-3675-0_3
- [18] Hasofer, A.M., Wang, Z. 1992. A Test for Extreme Value Domain of Attraction, Journal of the American Statistical Association, Cilt. 87, s. 171-177. doi:10.1080/01621459.1992.10475189
- [19] Hasofer, A.M. 1996. Non-parametric estimation of failure probabilities, Mathematical Models for Structural Reliability Analysis, CRC Press, Bölüm 4.
- [20] Weissman, I. 1978. Estimation of Parameters and Large Quantiles Based on the k Largest Observations, Journal of the American Statistical Association, Cilt. 73, s. 812-815. doi:10.1080/01621459.1978.10480104