

## Simetrik Katmanlı İnce Dikdörtgen Kompozit Plakların Burkulması

Erkin ALTUN SARAY

Dokuz Eylül Üniversitesi, Deniz Bilimleri ve Teknolojisi Enstitüsü, Gemi İnşaatı  
Programı, 34340, İzmir

(Alınış / Received: 19.12.2016, Kabul / Accepted: 21.03.2017,  
Online Yayınlanma / Published Online: 02.05.2017)

**Anahtar Kelimeler**  
Simetrik katmanlı  
ince dikdörtgen  
kompozit plaklar,  
Burkulma, Rayleigh-  
Ritz Yöntemi,  
Parametrik analiz

**Özet:** Bu çalışmada simetrik katmanlı ince dikdörtgen kompozit plakların burkulması incelenmiştir. Hesaplamalar, Klasik Laminasyon Plak Teorisi'nin (KLPT) denklemlerine göre Rayleigh-Ritz Yöntemi (R-R) ile gerçekleştirilmiştir. Kenarlarından basit mesnetli, düzlemsel yükleme etkisindeki ( $N_x$ ) 24 farklı dizilimli kompozit plakin kritik burkulma yükü ( $N_{kr}$ ), 12 farklı kenar oranı ( $a/b$  ve  $b/a$ ) için parametrik olarak hesaplanmıştır. Sonuçlar Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) temelli ANSYS paket yazılımı sonuçlarıyla karşılaştırılmış ve yakın sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmanın amacı; hazırlanan boyutsuz tabloların kullanımıyla uygun plak tiplerinin bulunması ve kompozit teknelerin yapısal ön tasarımında kullanılacak pratik bilgiler elde edilmesidir. Böylelikle üretim sırasında, malzeme, iş gücü, zaman ve test maliyetlerinden tasarruf edilmesi öngörülmüştür.

## Buckling of Symmetrically Laminated Thin Rectangular Composite Plates

**Keywords**  
*Symmetrically  
laminated thin  
rectangular  
composite plates,  
Buckling,  
Rayleigh-Ritz  
Method,  
Parametric  
Analysis*

**Abstract:** Critical buckling loads of symmetrically laminated thin rectangular composite plates were examined in this study. Rayleigh-Ritz Method was used to solve the governing energy equations based on Classical Laminated Plate Theory. Critical buckling loads of 24 differently laminated simply supported plates with in-plane force at the edge were calculated parametrically for 12 different aspect ratios. Results were compared with those obtained by ANSYS software package based on Finite Element Method, which seem to be approximate. The aim of this study was mainly to find the most suitable lamination type of plates. Non-dimensionally tabulated results were given for practical use at the preliminary structural design stage of composite vessels. Thus, it is expected to save material, labor, time and test costs during production stage.

\*Sorumlu yazar: erkin.altunsaray@deu.edu.tr

## 1. Giriş

Katmanlı kompozit plaklar, yapı elemanlarınca desteklenen plaklardan oluşan gemi, uçak gibi mühendislik yapılarında, malzeme ve üretim yöntemlerindeki gelişmelere paralel olarak artan bir ivmeyle kullanılmaktadır. Katmanlı kompozit plakların denizcilik alanında kullanımları çeşitli araştırmacıların çalışmalarında sunulmuştur [1-4].

Gemi yapısı, çeşitli normal ve derin elemanlarca (posta, kemere, tülani vb.) desteklenen panellerden oluşur. Destek elemanların arasında kalan elemanların plakların (güverte, borda, perde, dip yapısı vb.) kısa kenarının kalınlığına oranı büyük olduğu için ince plak kabulüyle hesaplamalar yapılır. Destek elemanlarının sıralanmasına göre enine, boyuna ve karışık yapı sistemleri bulunmaktadır [5]. Gemiler dalgalar boyunca ilerlerken, dalga tepesinde sarkma dolayısıyla dip yapısında burkulma yüküne, dalga çukurunda ise çökme buna bağlı olarak da güvertede burkulma yüküne maruz kalır. Dip yapısının güverteye oranla çok daha mukavim yapılmasından dolayı; güvertedeki kritik burkulma yükünün incelenmesi araştırmacılar tarafından önem taşımaktadır. Klasik Plak Teorisi'nin (KPT) katmanlı kompozitlere uyarlanmış hali olan Klasik Laminasyon Plak Teorisi (KLPT)'nin incelemelerde plak kısa kenarının plak kalınlığına oranı düşük olan ince plaklar için uygun olduğu belirtilmiştir [6]. Deniz ortamındaki çevresel etkilere yüksek dayanım sağlamak için kompozit gemilerde kıvrımsız, dikilmiş, genellikle  $-45^{\circ}$ ,  $0^{\circ}$ ,  $+45^{\circ}$ ,  $90^{\circ}$  açılarında dizilmiş çok eksenli elyafların, termoset reçinelerle (polyester, epoksi, vinilester vd.) birleştirildiği yapı sistemi kullanılmaktadır. Orta simetri düzlemine göre uzaklıkları, açıları ve mekanik özellikleri aynı olan yapı, simetrik katmanlı olarak adlandırılır. Simetrik

katmanlı kompozit plakların kompozit yapılarda tercih edilmesinin en önemli nedeni, üretimde sertleşme sonrası ısıl gerilmelerin neden olduğu büzülmelerin gerçekleşmemesidir [7-11]. Üç veya daha fazla sayıda aynı malzemeden oluşan tabakaların plak içinde orta simetri düzlemine göre aynı miktarlarda dağılımıyla oluşan kuazi-izotropik plaklarda elyaf açıları ( $\theta$ ),  $\theta=i\pi/I$  olarak tanımlanmaktadır.  $i=1,2,3$  ve  $I$  elyafların dizilim açılarının toplam adedidir ( $I \geq 3$ ).

Lekhnitskii [7], ortotropik plakların stabilitesini Klasik Laminasyon Plak Teorisi'ne (KLPT) göre, Ambartsumyan [12] ise kayma deformasyon etkilerini dikkate alarak incelemiştir. Baharlou ve Leissa [13] farklı sınır koşullarındaki ortotropik plakların titreşim ve burkulma problemlerini Rayleigh-Ritz Yöntemi ile çözmüşlerdir. Lakshminarayana ve arkadaşları [14] simetrik katmanlı kuazi-izotropik eliptik ve dairesel delikli dikdörtgen plakların burkulmasını Sonlu Elemanlar Yöntemi ile incelemişlerdir. Çalışmalarında grafit/epoksi plakların, sınır koşullarının ve delik oryantasyonunun burkulma yüküne etkisini araştırmışlardır. Hu ve arkadaşları [15] parabolik ve sabit eksenel yükler altındaki grafit/epoksi dikdörtgen kompozit plakların burkulmasını, Klasik Laminasyon Plak Teorisi'ne göre Rayleigh-Ritz Yöntemi'yle çözmüşlerdir. Darvizeh ve arkadaşları [16], Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Yöntemi ve Rayleigh-Ritz Yöntemi'yle grafit/epoksi malzemeli farklı dizilimlerdeki kompozit plakların burkulmasını hesaplamışlardır. Aydoğdu [17] basit mesnetli, çapraz katmanlı kompozit plakların eğilme, burkulma ve titreşimi üzerine geliştirdiği kayma deformasyon teorisini sunmuştur. Felix ve arkadaşları [18] ortotropik dikdörtgen ince plakların burkulmasını ve titreşimini Rayleigh-Ritz Yöntemi ve Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle incelemişlerdir. Aydoğdu ve Tımarcı [19]

Düzlem-içi yüklenmiş basit mesnetli simetrik katmanlı dikdörtgen kompozit ince plakların burkulmasını ve titreşimini, Klasik Plak Teorisi'ne göre Ritz Yöntemi'yle araştırmışlardır. Aydogdu ve Aksencer [20] doğrusal değişen düzlem içi yükleme etkisindeki, dik katmanlı kompozit plakların burkulmasını incelemişlerdir. Yükleme kenarları basit mesnet diğer kenarları çeşitli sınır koşullarındaki plakları Ritz Yöntemi'yle araştırmışlardır. Kumar [21] literatür derleme makalesinde, kabuk, plak ve kirişlerin, dinamik, statik ve burkulma problemlerinde Rayleigh-Ritz Yöntemi'nin kullanımını araştırmıştır.

Literatürde, kompozit plakların burkulması üzerine yapılan araştırmaların büyük çoğunluğu özel ortotropik plakların, farklı teorilerle incelenmesidir [22-24]. Altunsaray ve Bayer [25]  $-45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  açılarının 24 farklı dizilimiyle elde edilen simetrik katmanlı kuazi-izotropik plakların, Galerkin Yöntemi'yle "tek terim" için ve levha kenarlarının 3'te biri aralıklarda ayrıştırılmasıyla Sonlu Farklar Yöntemi'ni uygulayarak kritik burkulma yüklerini hesaplamışlardır. Sonlu Elemanlar Yöntemi temelli ANSYS paket yazılımıyla bulunan sonuçlarla karşılaştırmışlardır. 10 plak tipi için 3 yöntemle birbirine yaklaşık sonuç bulunamadığından çalışmada 14 plak tipinin sonuçları sunulmuştur.

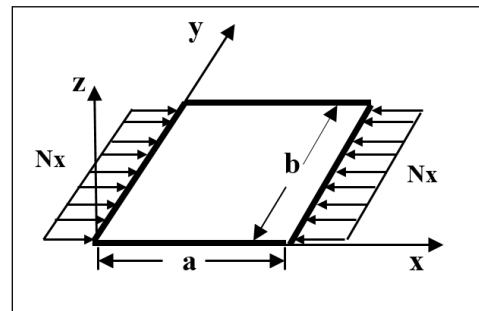
Bu makalede önceki çalışmada [25] sunulmamış plak tiplerini de kapsayan 24 farklı dizilimli simetrik katmanlı ince dikdörtgen kompozit plakların Rayleigh-Ritz Yöntemi'yle burkulma analizi gerçekleştirilmiştir. KLPT teorisine göre Rayleigh-Ritz Yöntemi'yle 1, 2, 3, 4 ve 9 terim alınarak yakınsaklık analizi yapılmıştır. Rayleigh-Ritz Yöntemi ile gerçekleştirilen analizler, SEY temelli ANSYS paket yazılımı sonuçlarıyla karşılaştırılmış yakın sonuçlar elde edilmiştir.

Kompozit gemilerde, enine ve boyuna elemanlarla desteklenen güvertenin sınır şartları basit mesnetle ankastre mesnet arasında olmakla birlikte, burkulma analizlerinde basit mesnetli seçilerek sonuçların daha güvenli sahada olması öngörülmüştür. 24 farklı laminasyon tipinde sıralanmış orta simetri düzlemine göre simetrik katmanlı plakların, farklı kenar oranlarının ve laminasyon tiplerinin kritik burkulma yüküne etkisi parametrik olarak incelenmiştir. Hazırlanan boyutsuz tablolarla kompozit gemilerin yapısal ön tasarımında uygun plak tipleri hızlı biçimde elde edilip, zaman, iş gücü, malzeme ve deney masraflarından tasarruf edilmesi öngörülmüştür.

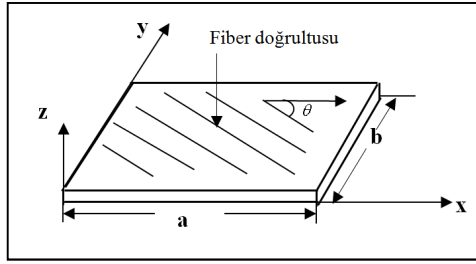
## 2. Materyal ve Metot

### 2.1. Analizlerde incelenen plak geometrisi, yükleme durumları, kenar oranları, katmanların sıralanma açıları ve malzemenin mekanik özellikleri

Parametrik analizlerde, x doğrultusunda karşılıklı iki kenarından tek eksenli ( $N_x$ ) basmaya maruz plaklar incelenmiştir. Plak geometrisi, kartezyen koordinatlarda Şekil 1.'de gösterilmiştir. Kartezyen koordinatlarda fiber (elyaf) doğrultusu ve genel eksenle yaptığı " $\theta$ " açısı Şekil 2.'de gösterilmiştir.



Şekil 1. Kartezyen koordinatlarda tek eksenli basmaya maruz plak ( $N_x$  etkisinde)



Şekil 2. Kartezyen koordinatlarda fiber (elyaf) doğrultusu ve  $\theta$  açısı

Çalışmada incelenen kenar oranları Tablo 1.'de gösterilmiştir. SEY (ANSYS) ile yapılan karşılaştırmalarda plak kısa kenarı 0,2 m. seçilmiştir. Katmanları  $-45^\circ$ ,

$0^\circ$ ,  $+45^\circ$  ve  $90^\circ$  açılarının birlikte kullanıldığı 24 farklı plak tipi Tablo 2.'de sunulmuştur. "LT" laminasyon tipini, "n" seçilen o katmandan kaç adet olduğunu ve "s" ise orta simetri düzlemine göre simetriyi göstermektedir. Bu çalışmada  $n = 2$  seçilmiştir.

Tablo 1. Parametrik analizlerde incelenen kenar oranları

a/b	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
b/a	1	1,2	1,6	1,6	1,8	2

Tablo 2. Tabakaları farklı açılarda sıralanmış simetrik katmanlı kompozit plak tipleri

Laminasyon Tipi	Gösterim	Laminasyon Tipi	Gösterim
LT1	$[-45_n/0_n/45_n/90_n]_s$	LT13	$[45_n/-45_n/0_n/90_n]_s$
LT2	$[-45_n/0_n/90_n/45_n]_s$	LT14	$[45_n/-45_n/90_n/0_n]_s$
LT3	$[-45_n/45_n/0_n/90_n]_s$	LT15	$[45_n/0_n/-45_n/90_n]_s$
LT4	$[-45_n/45_n/90_n/0_n]_s$	LT16	$[45_n/0_n/90_n/-45_n]_s$
LT5	$[-45_n/90_n/0_n/45_n]_s$	LT17	$[45_n/90_n/-45_n/0_n]_s$
LT6	$[-45_n/90_n/45_n/0_n]_s$	LT18	$[45_n/90_n/0_n/-45_n]_s$
LT7	$[0_n/-45_n/45_n/90_n]_s$	LT19	$[90_n/-45_n/0_n/45_n]_s$
LT8	$[0_n/-45_n/90_n/45_n]_s$	LT20	$[90_n/-45_n/45_n/0_n]_s$
LT9	$[0_n/45_n/-45_n/90_n]_s$	LT21	$[90_n/0_n/-45_n/45_n]_s$
LT10	$[0_n/45_n/90_n/-45_n]_s$	LT22	$[90_n/0_n/45_n/-45_n]_s$
LT11	$[0_n/90_n/-45_n/45_n]_s$	LT23	$[90_n/45_n/-45_n/0_n]_s$
LT12	$[0_n/90_n/45_n/-45_n]_s$	LT24	$[90_n/45_n/0_n/-45_n]_s$

Tablo 3. T300-934 kodlu karbon/epoksi malzemenin mekanik özellikleri [26]

Boyuna Young (Elastisite) Modülü ( $E_{11}$ )	$148 \cdot 10^9$ (N/m <sup>2</sup> )
Enine Young (Elastisite) Modülü ( $E_{22}$ )	$9,65 \cdot 10^9$ (N/m <sup>2</sup> )
Boyuna Kayma Modülü ( $G_{12}$ )	$4,55 \cdot 10^9$ (N/m <sup>2</sup> )
Boyuna Poisson oranı ( $\nu_{12}$ )	0.30
Tabaka kalınlığı (t)	$0,185 \cdot 10^{-3} - 0,213 \cdot 10^{-3}$ (m)

Analizlerdeki incelenen malzeme T300-934 kodlu karbon/epoksi malzemenin mekanik özellikleri Tablo 3.'te verilmiştir.

Her bir tabaka kalınlığı  $t= 0,2 \cdot 10^{-3}$  m. seçilmiştir. 16 katmandan oluşan kompozit plakın toplam kalınlığı  $h=0,0032$  metredir.

## 2.2. Klasik Laminasyon Plak Teorisi (KLPT) ve Rayleigh-Ritz Yöntemi

$n$  adet ortotropik tabakanın farklı doğrultularda birleştirilmesiyle oluşturulan, bileşik katmanlı kompozit plaklar, Klasik Laminasyon Plak Teorisi'ne (KLPT) göre incelenir. KLPT Kirchoff Hipotezi varsayımına göre çeşitli kabullere dayanır [27]:

- Katmanlar arasındaki bağlar mükemmeldir, yapıştırma tabakası çok incedir ve tabaka kayma etkisiyle şekil değiştirmez, levha tek bir katman gibi bütün olarak davranır.

- Deformasyondan önce orta yüzeye dik olan düz hatlar (örneğin; enine normaller) deformasyondan sonra da düz kalır. Enine yer değiştirmeler kalınlık koordinat sisteminden bağımsızdır. Enine normal uzama sıfırdır.  $\epsilon_z = 0$

- Enine normallerde kayma yoktur, deformasyondan sonra da orta düzleme dik kalacak biçimde dönerler.

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 - \frac{\partial w_0}{\partial w_x}$$

### 2.2.1. Yer değiştirme ve şekil değiştirme ilişkisi

Katmanlı kompozit plaklar incelenirken, belirli kısıtlar dikkate alınır [27].

- Heterojen malzeme yapısı nedeniyle eşdeğer homojen malzemenin etkin elastisite modülü dikkate alınır.

- Plak kalınlığı diğer boyutları yanında çok küçüktür.

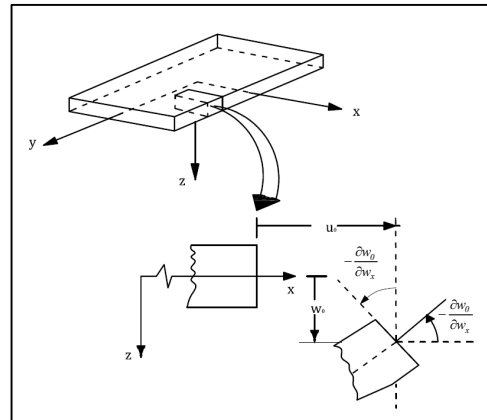
- Katmanlar arasında kayma gerilmeleri oluşmaz, alt ve üst yüzeylerdeki kayma gerilmeleri sıfırdır.

- Katmanlar Hooke kanununa uyar, doğrusal elastik yapıdadır, sabit kalınlıktadır ve 3 simetri eksenine sahiptir.

- Şekil değişimleri ve yer değişimleri plak kalınlığı yanında çok küçüktür.

Kirchhoff hipotezine göre levha düzlemi üzerindeki yer değiştirmeler  $(u,v)$   $z$ 'nin lineer bir fonksiyonudur. Deformasyondan önce  $(x,y,z)$  koordinatlarında olan bir nokta, deformasyondan sonra  $(x-u,y+v,z+w)$  noktasına hareket eder. Bileşik tabakanın  $x-z$  düzlemindeki yer değişimleri Şekil 3.'te gösterilmiştir. Referans düzlemi  $z=0$  orta düzlem olarak adlandırılır. Kirchoff hipotezine göre küçük yer değişimleri Kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi gösterilir [27].

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$



Şekil 3. Katmanlı kompozit plakın  $x-z$  düzlemindeki yer değişimleri

Bu çalışmadaki plak kısa kenarının plak kalınlığına oranı büyük olduğu için, Klasik Laminasyon Plak Teorisi (KLPT)

ile inceleme uygun görülmüştür. KLPT’de simetrik katmanlı kompozit plakların burkulmasında eğilme-uzama rijitlik matrisi  $B_{ij}$  sıfırdır [27]. Çalışmada sadece düzlem dışı şekil değiştirmeler gözönüne alınmıştır.

Kompozit plağın toplam enerji fonksiyoneli  $F$ ; aşağıda verilmiştir [24].

$$F = U_e - V \quad (2)$$

Eğilmeden dolayı birim şekil değiştirme potansiyel enerjisi,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right) + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right)^2 + 4D_{16} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{26} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \quad (3)$$

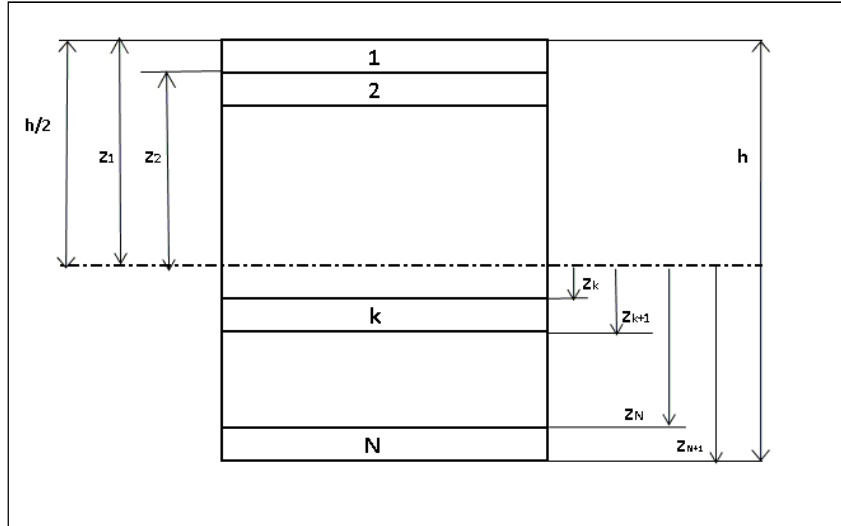
Orta simetri düzlemine etki eden kuvvetlerin potansiyel enerjisi ( $V_L$ ) ise aşağıda verilmiştir.

$$V = \frac{I}{2} \int_0^a \int_0^b N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (4)$$

Burada " $N_x$ " plağın kenarlarında x-eksenine paralel olarak etkiyen düzgün yayılı ekstenel basınç yükünü ifade etmektedir (Şekil.1). Denklem (3) ve (4)’te " $w$ " çökme fonksiyonunu göstermektedir. Eğilme rijitlik matrisi elemanları  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{16}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{26}$  ve  $D_{66}$  (5) denkleminde verildiği gibi hesaplanır [24].

$$D_{ij} = \frac{I}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (5)$$

Denklem (6)’da verilen  $\bar{Q}_{ij}$  dönüşüme uğramış indirgenmiş rijitlik matrisinin elemanları her katmanın genel eksenle yaptığı  $\theta$  açısı (Şekil 2.) ve  $Q_{ij}$  indirgenmiş rijitlik matrisi elemanlarından (7) faydalanarak her katman için ayrı ayrı hesaplanır [24]. z her bir katmanın orta simetri düzleminde uzaklığıdır (Şekil 4.).



Şekil 4. Katmanların orta simetri düzleminden uzaklıklarının gösterimi

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4(\theta) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{22} \sin^4(\theta) \\
 \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{12} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4(\theta) + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{22} \cos^4(\theta) \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3(\theta) \cos(\theta) + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + Q_{66} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta))
 \end{aligned} \quad (6)$$

Ortotropik malzemeler için  $Q_{ij}$  indirgenmiş rijitlik matrisinin mühendislik sabitleri cinsinden yazımı aşağıda verilmiştir [27].

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= E_{11}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\
 Q_{12} &= \nu_{12}E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\
 Q_{22} &= E_{22}/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\
 Q_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \quad (7)$$

Yukarıdaki (7) ifadesinde yer alan mühendislik sabitleri ( $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$  ve  $\nu_{21}$ ) sırasıyla  $E_1$  boyuna elastisite modülü,  $E_2$  enine elastisite modülü,  $G_{12}$  boyuna kayma modülü,  $\nu_{12}$  boyuna Poisson oranı ve  $\nu_{21}$  enine Poisson oranıdır. Mühendislik sabitleri, katmanların açıları ve her bir katmanın orta simetri düzleminde uzaklığı, (5) ve (6) ifadelerinde yerine yazılarak (3) ifadesindeki eğilme rijitlik matrisi elemanları  $D_{ij}$  belirlenmiş olur. Çalışmada seçilen karbon/epoksi malzemenin mühendislik sabitleri Tablo 3.'te verilmiştir.

Basit mesnetli hal için, plak kenarlarında çökme ( $w$ ) ve eğilme momenti ( $M_x, M_y$ ) sıfırdır.

$$\begin{aligned}
 x = 0 \text{ ve } x = a \text{ da } w = M_x &= 0 \\
 y = 0 \text{ ve } y = b \text{ de } w = M_y &= 0
 \end{aligned} \quad (8)$$

Kenarlara uygulanan eğilme momentleri  $M_x$  ve  $M_y$ , Ashton ve Whitney [28] tarafından verilmiştir :

$$\begin{aligned}
 M_x &= -\left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0 \\
 M_y &= -\left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (9)
 \end{aligned}$$

Sınır boyunca çökmenin sıfır olması, çökmenin türevlerinin de (sınırdaki alınan teğetlerin eğimi değişmeyeceğinden) sıfır olmasını gerektirir. Böylece denklem 8 aşağıdaki ifadeye indirgenir:

$$\begin{aligned}
 x = 0, a \text{ boyunca } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\
 y = 0, b \text{ boyunca } w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0
 \end{aligned} \quad (10)$$

Geometrik sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilen trigonometrik yaklaşım fonksiyonu  $\phi_{mn}$  aşağıda gösterilmiştir [24].

$$\phi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (11)$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} \phi_{mn} \quad (12)$$

Yukarıdaki eşitlikte  $C_{mn}$  bilinmeyen sabitlerdir. Çökme fonksiyonu  $w(x, y)$

(12), enerji fonksiyonelinde (2) yerine koyulup, bilinmeyen sabitlere göre minimize edilirse;

$$\frac{\partial F}{\partial C_{mn}} = 0 \quad (13)$$

$C_{mn}$  cinsinden  $M \times N$  boyutlu lineer homojen denklem sistemi elde edilir. Bu denklem takımına ait katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır.

$$(K - \lambda G)\{C\} = 0 \quad (14)$$

burada  $K$  rijitlik matrisi,  $G$  geometri matrisi ve  $\lambda$  ise burkulma yüküdür. Özdeğer problemi sonucunda elde edilen en küçük  $\lambda$  ( $N_{kr}$ ) değeri kritik burkulma yüküdür.

#### 2.4. Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle (SEY) hesaplama yapan ANSYS paket yazılımı'nın kullanımı

Bu çalışmadaki ANSYS yazılımı, Rayleigh-Ritz Yöntemi ile yapılan analizlerle karşılaştırma yapmak için kullanılmıştır. Yazılımda, kompozit plakların analizleri için önerilen "SHELL-181" kodlu dikdörtgen geometriye sahip, 4 düğüm noktalı kabuk eleman seçilmiştir [29]. Plak kısa kenarı 0,2 m. seçilmiş, eleman kenarının plak kısa kenarına oranı 1/20 olan kare ağ yapısı (mesh) uygulanmıştır. SHELL181 Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi'ne göre yer değiştirmektedir.

### 3. Bulgular

#### 3.1. Sayısal analiz sonuçları

Bu çalışmada dört kenarından basit mesnetli simetrik katmanlı dikdörtgen ince plakların burkulması incelenmiştir. Plak kısa kenarının plak kalınlığına oranı büyük olduğu için ince kompozit plaklar için geliştirilmiş Klasik

Laminasyon Plak Teorisi (KLPT) ile incelemeler için uygun görülmüştür.

Sayısal analizlerde önemli bir enerji yöntemi olan Rayleigh-Ritz Yöntemi ve Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) temelli ANSYS paket yazılımı kullanılmıştır. Düzgün yayılı aksenal yük ( $N_x$ ) etkisindeki 24 farklı plak, 12 farklı kenar oranı ( $a/b$  ve  $b/a$ ) için parametrik olarak incelenmiştir. Her durum için kritik burkulma yükü  $N_{kr}$  bulunmuştur. Sonuçlar Tablo 6.-7.'de verilmiştir.

Rayleigh-Ritz Yöntemi ile bulunan sonuçlar, SEY (ANSYS) ile elde edilenlerle yakın çıkmıştır. LT3 kodlu [-45<sub>2</sub>/45<sub>2</sub>/0<sub>2</sub>/90<sub>2</sub>]<sub>s</sub> plak için Rayleigh-Ritz Yöntemi'yle farklı kenar oranları için yapılan yakınsaklık analizi (1, 2, 3, 4 ve 9 terim için) Tablo 4.'te gösterilmiştir. 3 terim ve 4 terim alınarak bulunan sonuçların arasında süreksizlik görünmektedir. Bunun nedeni Ritz Yöntemi'yle 3 terim için yapılan hesaplamalarda D16 ve D26 eğilme-burulma birleşim rijitlik sabitlerinin sadeleşmesi, 4 terim için yapılanlarda ise bu terimlerin kalması sonucundadır. Bu farklılık Tablo 5'te gösterilmiştir. Bu çalışmada optimum çözüm süresinde kabul edilebilir yaklaşıklık sağlandığı için 4 terimli hesaplama yeterli görülmüştür. Daha yakın sonuçlar elde etmek için terim sayısını arttırmak gerekecektir ancak bu durumda da çözümlene süresi çok daha uzun olacak ve yüksek işlemci kapasiteli bilgisayar kullanılması gerekli olacaktır.

Çok sayıda değişkenin bulunduğu parametrik analizlerde; Rayleigh-Ritz Yöntemi'yle yapılan hesaplama süresi, SEY temelli ANSYS paket yazılımıyla yapılandan çok daha kısa sürmüştür. Bunun nedeni ANSYS yazılımının analiz hiyerarşisi gereği önce modelin, ardından ağ yapısının (mesh) oluşturulup son olarak sınır koşullarının



ve yüklerin girilip, sonuçların elde edilmesidir.

Tablo 6.-7.'den görüldüğü üzere Rayleigh-Ritz Yöntemi ve SEY ile yapılan hesaplamalarda LT1, LT2, LT3, LT4, LT5, LT6, LT7, LT8, LT11, LT19, LT20, LT21 plakları, sırasıyla LT15, LT16, LT13, LT14, LT18, LT17, LT9, LT10, LT12, LT24, LT23, LT22 plakları ile aynı kritik burkulma yükü değerlerini vermişlerdir.

Tablo 6.'dan kritik burkulma yükü ( $N_{kr}$ ), kısa kenar "y" eksenindeki durumda

görüldüğü gibi; kenar oranı artmasıyla kritik burkulma yükü artmaktadır. Kritik burkulma yükü ( $N_{kr}$ )'in en yüksek olduğu durum, kenar oranı  $a/b=2$  olduğunda LT20  $[90_2/-45_2/45_2/0_2]_s$  ve LT23  $[90_2/45_2/-45_2/0_2]_s$  kodlu plaklarda gözlenmiştir. Bu laminasyon tipindeki plaklar için kritik burkulma yükü ( $N_{kr}$ ) 356785 N/m değerindedir. En küçük kritik burkulma yükü ( $N_{kr}$ ) değerini veren plaklar ise  $a/b=1$  için 133744 N/m değeriyle LT11  $[0_2/90_2/-45_2/45_2]_s$  ve LT12  $[0_2/90_2/45_2/-45_2]_s$  laminasyon tipindeki plaklardır.

**Tablo 4.** LT3 Plakının Rayleigh-Ritz Yöntemi ile yapılan yakınsaklık analizi

a/b	Kritik Burkulma Yükü $N_{kr}$ (N/m)				
	Terim Sayısı				
	1	2	3	4	9
1	202360	202360	202360	198665	198142
1.2	203599	203599	203599	199804	199232
1.4	211782	211782	211782	207838	207195
1.6	224757	224757	224757	220641	211234
1.8	241497	241497	241497	237202	203879
2	261458	261458	261458	256988	200612
b/a	1	2	3	4	9
1	202360	202360	202360	198665	198142
1.2	145939	145939	145939	143385	143043
1.4	114554	114554	114554	112655	112412
1.6	95245	95245	95245	93761	93578
1.8	82489	82489	82489	81290	81146
2	73606	73606	73606	72612	72495

Tablo 7.'den kritik burkulma yükü ( $N_{kr}$ ), kısa kenar "x" ekseninde olduğu durumda görüldüğü üzere; kenar oranının artmasıyla kritik burkulma yükü azalmaktadır. Kritik burkulma yükünün ( $N_{kr}$ ) en yüksek olduğu durum, kenar oranı  $b/a=1$  olduğunda LT3  $[-45_2/45_2/0_2/90_2]_s$ , LT4  $[45_2/45_2/90_2/0_2]_s$ , LT13  $[45_2/-45_2/0_2/90_2]_s$  ve

LT14  $[45_2/-45_2/90_2/0_2]_s$  kodlu plaklar için gözlenmiştir. Bu laminasyon tipindeki plaklar için kenar oranı  $b/a=1$  için kritik burkulma yükü ( $N_{kr}$ ) 198665 N/m değerindedir. Bu durumda en küçük kritik burkulma yükü ( $N_{kr}$ ) kenar oranı  $b/a=2$  için LT19  $[90_2/-45_2/0_2/45_2]_s$  ve LT24  $[90_2/45_2/0_2/-45_2]_s$  laminasyon

tipindeki plaklarda 40707 N/m değerindedir.

**Tablo 5.** 3 terim ve 4 terim için yapılan analizlerde bulunan kritik burkulma yükü

Terim Sayısı	Kritik Burkulma Yükü $N_{kr}$
3	$N \rightarrow \frac{b^4 D_{11} \pi^2 + 2a^2 b^2 D_{12} \pi^2 + a^4 D_{22} \pi^2 + 4a^2 b^2 D_{66} \pi^2}{a^2 b^4}$
4	$N \rightarrow \frac{1}{18a^4 b^8} (45a^2 b^8 D_{11} \pi^2 + 90a^4 b^6 D_{12} \pi^2 + 45a^6 b^4 D_{22} \pi^2 + 180a^4 b^6 D_{66} \pi^2 + \sqrt{(409600a^6 b^{14} D_{16}^2 + 819200a^8 b^{12} D_{16} D_{26} + 409600a^{10} b^{10} D_{26}^2 + 729a^4 b^{16} D_{11}^2 \pi^4 + 2916a^6 b^{14} D_{11} D_{12} \pi^4 + 2916a^8 b^{12} D_{12}^2 \pi^4 + 1458a^8 b^{12} D_{11} D_{22} \pi^4 + 2916a^{10} b^{10} D_{12} D_{22} \pi^4 + 729a^{12} b^8 D_{22}^2 \pi^4 + 5832a^6 b^{14} D_{11} D_{66} \pi^4 + 11664a^8 b^{12} D_{12} D_{66} \pi^4 + 5832a^{10} b^{10} D_{22} D_{66} \pi^4 + 11664a^8 b^{12} D_{66}^2 \pi^4)})$

**Tablo 6.** Kritik Burkulma Yükü  $N_{kr}$  (N/m), kısa kenar “y” ekseninde

Kenar oranı (a/b)	YÖNTEM	Laminasyon Tipi					
		LT1	LT2	LT3	LT4	LT5	LT6
		$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$
1.00	Rayleigh-Ritz	174309	160364	198665	198665	160364	174309
	SEY(ANSYS)	165240	147060	194881	194846	146759	164923
1.20	Rayleigh-Ritz	168914	158538	199804	206475	172770	189683
	SEY(ANSYS)	159690	144873	196319	202943	159499	180634
1.40	Rayleigh-Ritz	171629	165105	207838	220804	192660	211926
	SEY(ANSYS)	162160	151050	204540	217460	179290	203657
1.60	Rayleigh-Ritz	179609	177344	220641	240029	218352	239731
	SEY(ANSYS)	169810	162714	217461	235507	205613	230997
1.80	Rayleigh-Ritz	191504	193958	237202	263380	249047	272482
	SEY(ANSYS)	181130	177337	233730	260340	235594	264717
2.00	Rayleigh-Ritz	206603	214261	256988	290448	284331	309853
	SEY(ANSYS)	193358	201640	254141	287457	271414	300908
Kenar oranı (a/b)	YÖNTEM	Laminasyon Tipi					
		LT7	LT8	LT9	LT10	LT11	LT12
		$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$
1.00	Rayleigh-Ritz	157781	146448	157781	146448	133744	133744
	SEY(ANSYS)	155872	143071	155872	143071	133201	133201
1.20	Rayleigh-Ritz	143794	135774	143794	135774	130679	130679
	SEY(ANSYS)	142074	132454	142074	132454	130296	130296
1.40	Rayleigh-Ritz	139813	135424	139813	135424	138365	138365
	SEY(ANSYS)	138197	132108	138197	132108	138107	138107
1.60	Rayleigh-Ritz	141845	141527	141845	141527	153181	153181
	SEY(ANSYS)	140297	138196	140297	138196	153036	153036
1.80	Rayleigh-Ritz	147983	152222	147983	152222	173393	173393
	SEY(ANSYS)	146487	148857	146487	148857	173360	173360
2.00	Rayleigh-Ritz	157221	166520	157221	166520	198089	198089
	SEY(ANSYS)	155766	163065	155766	163065	198175	198175

**Tablo 6. devamı** Kritik Burkulma Yüğü  $N_{kr}$  (N/m), kısa kenar “y” ekseninde

Kenar oranı (a/b)	YÖNTEM	Laminasyon Tipi					
		LT13	LT14	LT15	LT16	LT17	LT18
		$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$
1.00	Rayleigh-Ritz	198665	198665	174309	160364	174309	160364
	SEY(ANSYS)	194881	194846	165240	147060	164923	146759
1.20	Rayleigh-Ritz	199804	206475	168914	158538	189683	172770
	SEY(ANSYS)	196319	202943	159690	144873	180634	159499
1.40	Rayleigh-Ritz	207838	220804	171629	165105	211926	192660
	SEY(ANSYS)	204540	217460	162160	151050	203657	179290
1.60	Rayleigh-Ritz	220641	240029	179609	177344	239731	218352
	SEY(ANSYS)	217461	235507	169810	162714	230997	205613
1.80	Rayleigh-Ritz	237202	263380	191504	193958	272482	249047
	SEY(ANSYS)	233730	260340	181130	177337	264717	235594
2.00	Rayleigh-Ritz	256988	290448	206603	214261	309853	284331
	SEY(ANSYS)	254141	287457	193358	201640	300908	271414

Kenar oranı (a/b)	YÖNTEM	Laminasyon Tipi					
		LT19	LT20	LT21	LT22	LT23	LT24
		$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$
1.00	Rayleigh-Ritz	146448	157781	133744	133744	157781	146448
	SEY(ANSYS)	142903	155762	133193	133193	155762	142903
1.20	Rayleigh-Ritz	169548	183612	150426	150426	183612	169548
	SEY(ANSYS)	166155	181732	149996	149996	181732	166155
1.40	Rayleigh-Ritz	200941	217184	176743	176743	217184	200941
	SEY(ANSYS)	197620	215415	176426	176426	215415	197620
1.60	Rayleigh-Ritz	239281	257512	210572	210572	257512	239281
	SEY(ANSYS)	235945	255828	210368	210368	255828	235945
1.80	Rayleigh-Ritz	283935	304127	250902	250902	304127	283935
	SEY(ANSYS)	280554	302473	250814	250814	302473	280554
2.00	Rayleigh-Ritz	334576	356785	297201	297201	356785	334576
	SEY(ANSYS)	332835	355136	297233	297233	355136	332835

**Tablo 7.** Kritik Burkulma Yüğü  $N_{kr}$  (N/m), kısa kenar “x” ekseninde

Kenar oranı (b/a)	YÖNTEM	Laminasyon Tipi					
		LT1	LT2	LT3	LT4	LT5	LT6
		$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$
1.00	Rayleigh-Ritz	174309	160364	198665	198665	160364	174309
	SEY(ANSYS)	165240	147060	194881	194846	146759	164923
1.20	Rayleigh-Ritz	131725	119979	143385	138753	110096	117302
	SEY(ANSYS)	125663	111092	140813	136169	100499	110667
1.40	Rayleigh-Ritz	108126	98296	112655	106040	84237	87566
	SEY(ANSYS)	103802	91979	110797	104178	77113	82603
1.60	Rayleigh-Ritz	93645	85294	93761	86188	69275	70160
	SEY(ANSYS)	90408	80583	92355	84782	63791	66298
1.80	Rayleigh-Ritz	84099	76866	81290	73210	59864	59106
	SEY(ANSYS)	81582	73220	80187	72112	55521	56013
2.00	Rayleigh-Ritz	77463	71083	72612	64247	53565	51651
	SEY(ANSYS)	75446	68174	71723	63365	50046	49117

**Tablo 7. devamı** Kritik Burkulma Yüğü  $N_{kr}$  (N/m), kısa kenar “x” ekseninde

Kenar oranı (b/a)	YÖNTEM	Laminasyon Tipi					
		LT7	LT8	LT9	LT10	LT11	LT12
		$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$
1.00	Rayleigh-Ritz	157781	146448	157781	146448	133744	133744
	SEY(ANSYS)	155872	143071	155872	143071	133201	133201
1.20	Rayleigh-Ritz	127509	117741	127509	117741	104463	104463
	SEY(ANSYS)	126160	115437	126160	115437	104044	104044
1.40	Rayleigh-Ritz	110808	102521	110808	102521	90175	90175
	SEY(ANSYS)	109802	100847	109802	100847	89846	89846
1.60	Rayleigh-Ritz	100591	93469	100591	93469	82255	82255
	SEY(ANSYS)	99805	92192	99805	92192	81987	81987
1.80	Rayleigh-Ritz	93866	87634	93866	87634	77439	77439
	SEY(ANSYS)	93229	86622	93229	86622	77214	77214
2.00	Rayleigh-Ritz	89196	83644	89196	83644	74300	74300
	SEY(ANSYS)	88664	82817	88664	82817	74105	74105
Kenar oranı (b/a)	YÖNTEM	Laminasyon Tipi					
		LT13	LT14	LT15	LT16	LT17	LT18
		$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$
1.00	Rayleigh-Ritz	198665	198665	174309	160364	174309	160364
	SEY(ANSYS)	194881	194846	165240	147060	164923	146759
1.20	Rayleigh-Ritz	143385	138753	131725	119979	117302	110096
	SEY(ANSYS)	140813	136169	125663	111092	110667	100499
1.40	Rayleigh-Ritz	112655	106040	108126	98296	87566	84237
	SEY(ANSYS)	110797	104178	103802	91979	82603	77113
1.60	Rayleigh-Ritz	93761	86188	93645	85294	70160	69275
	SEY(ANSYS)	92355	84782	90408	80583	66298	63791
1.80	Rayleigh-Ritz	81290	73210	84099	76866	59106	59864
	SEY(ANSYS)	80187	72112	81582	73220	56013	55521
2.00	Rayleigh-Ritz	72612	64247	77463	71083	51651	53565
	SEY(ANSYS)	71723	63365	75446	68174	49117	50046
Kenar oranı (b/a)	YÖNTEM	Laminasyon Tipi					
		LT19	LT20	LT21	LT22	LT23	LT24
		$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$	$N_{kr}$
1.00	Rayleigh-Ritz	146448	157781	133744	133744	157781	146448
	SEY(ANSYS)	142903	155762	133193	133193	155762	142903
1.20	Rayleigh-Ritz	94287	99857	90750	90750	99857	94287
	SEY(ANSYS)	91803	98489	90368	90368	98489	91803
1.40	Rayleigh-Ritz	69094	71333	70595	70595	71333	69094
	SEY(ANSYS)	67250	70343	70323	70323	70343	67250
1.60	Rayleigh-Ritz	55284	55408	59836	59836	55408	55284
	SEY(ANSYS)	53860	54658	59634	59634	54658	53860
1.80	Rayleigh-Ritz	46982	45674	53516	53516	45674	46982
	SEY(ANSYS)	45849	45085	53361	53361	45085	45849
2.00	Rayleigh-Ritz	41630	39305	49522	49522	39305	41630
	SEY(ANSYS)	40707	38831	49398	49398	38831	40707

### 3.2. Boyutsuz sonuçlar

Önceki bölümdeki sayısal analizlerde, Rayleigh-Ritz Yöntemi'yle bulunan sonuçlar, SEY (ANSYS) ile bulunanlarla karşılaştırılıp yakın sonuçlar elde edilmiş, R-R Yöntemi'nin güvenilirliği görülmüştür. Bu bölümde Rayleigh-Ritz Yöntemi ile T300-934 kodlu karbon/epoksi malzeme için elde edilen boyutsuz sonuçlar sunulmuştur (Tablo 8-9). Burada boyutsuz kritik burkulma yükü; plağın kısa kenarının, kalınlığının ve elastisite modülünün fonksiyonu olarak verilmiştir.

$N_x$  aksenal basınç yükü, "x" eksenine paralel olduğunda ( $N_{kr}$ ); kısa kenar "y" ekseninde olduğu durum için boyutsuz kritik burkulma yükü

$$N_0^* = N_{kr} \frac{b^2}{t^3 E_{22} 10}$$

kısa kenar "x" ekseninde olduğu

$$\text{durum için ise } N_0^* = N_{kr} \frac{a^2}{t^3 E_{22} 10}$$

olarak verilmiştir.

**Tablo 8.** Boyutsuz Kritik Burkulma Yükü ( $N_0^*$ ), kısa kenar "y" ekseninde

$$(N_0^* = N_{kr} \frac{b^2}{t^3 E_{22} 10})$$

Laminasyon Tipi	Kenar Oranları (a/b)					
	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
LT1	9032,2	8751,9	8892,6	9306,5	9922,3	10705,3
LT2	8309,3	8214,6	8554,1	9189,7	10049,3	11101,7
LT3	10293,5	10352,6	10769,3	11432,6	12290,6	13315,7
LT4	10293,5	10699,7	11440,8	12437,3	13646,4	15051,6
LT5	8309,3	8952,0	9982,1	11314,2	12904,2	14731,4
LT6	9032,2	9827,9	10982,1	12421,6	14118,8	16056,7
LT7	8175,5	7450,9	7245,8	7350,6	7667,8	8146,5
LT8	7588,1	7035,0	7018,3	7333,0	7887,5	8627,8
LT9	8175,5	7450,9	7245,8	7350,6	7667,8	8146,5
LT10	7588,1	7035,0	7018,3	7333,0	7887,5	8627,8
LT11	6930,4	6771,4	7170,5	7937,2	8984,2	10263,7
LT12	6930,4	6771,4	7170,5	7937,2	8984,2	10263,7
LT13	10293,5	10352,6	10769,3	11432,6	12290,6	13315,7
LT14	10293,5	10699,7	11440,8	12437,3	13646,4	15051,6
LT15	9032,2	8751,9	8892,6	9306,5	9922,3	10705,3
LT16	8309,3	8214,6	8554,1	9189,7	10049,3	11101,7
LT17	9032,2	9827,9	10982,1	12421,6	14118,8	16056,7
LT18	8309,3	8952,0	9982,1	11314,2	12904,2	14731,4
LT19	7588,1	8784,7	10411,8	12398,1	14711,4	17336,3
LT20	8175,5	9513,5	11254,3	13342,3	15757,8	18486,0
LT21	6930,4	7794,2	9158,8	10910,4	13000,3	15401,5
LT22	6930,4	7794,2	9158,8	10910,4	13000,3	15401,5
LT23	8175,5	9513,5	11254,3	13342,3	15757,8	18486,0
LT24	7588,1	8784,7	10411,8	12398,1	14711,4	17336,3

**Tablo 9.** Boyutsuz Kritik Burkulma Yüğü ( $N_0^*$ ), kısa kenar “y” ekseninde

$$(N_0^* = N_{kr} \frac{a^2}{t^3 E_{22} 10})$$

Laminasyon Tipi	Kenar Oranları (b/a)					
	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
LT1	9032,2	6825,7	5602,6	4852,1	4357,5	4013,7
LT2	8309,3	6217,1	5093,2	4419,4	3982,8	3683,1
LT3	10293,5	7429,0	5837,4	4858,1	4212,3	3762,4
LT4	10293,5	7189,9	5494,1	4465,6	3793,1	3328,8
LT5	8309,3	5704,1	4364,5	3589,5	3101,6	2775,3
LT6	9032,2	6078,4	4537,2	3635,2	3062,8	2676,4
LT7	8175,5	6607,2	5741,9	5213,2	4863,8	4621,6
LT8	7588,1	6101,2	5312,0	4842,9	4541,1	4333,8
LT9	8175,5	6607,2	5741,9	5213,2	4863,8	4621,6
LT10	7588,1	6101,2	5312,0	4842,9	4541,1	4333,8
LT11	6930,4	5413,1	4672,3	4261,9	4012,7	3849,9
LT12	6930,4	5413,1	4672,3	4261,9	4012,7	3849,9
LT13	10293,5	7429,0	5837,4	4858,1	4212,3	3762,4
LT14	10293,5	7189,9	5494,1	4465,6	3793,1	3328,8
LT15	9032,2	6825,7	5602,6	4852,1	4357,5	4013,7
LT16	8309,3	6217,1	5093,2	4419,4	3982,8	3683,1
LT17	9032,2	6078,4	4537,2	3635,2	3062,8	2676,4
LT18	8309,3	5704,1	4364,5	3589,5	3101,6	2775,3
LT19	7588,1	4885,1	3580,1	2864,5	2434,6	2157,1
LT20	8175,5	5174,5	3696,1	2871,0	2366,7	2036,4
LT21	6930,4	4702,0	3658,0	3100,5	2772,9	2565,9
LT22	6930,4	4702,0	3658,0	3100,5	2772,9	2565,9
LT23	8175,5	5174,5	3696,1	2871,0	2366,7	2036,4
LT24	7588,1	4885,1	3580,1	2864,5	2434,6	2157,1

#### 4. Tartışma ve Sonuç

En büyük kritik burkulma yükü a/b=2 için LT23 kodlu plakta 356785 N/m olarak görülmektedir. Bu durum boyuna yapı sistemine karşılık gelmektedir. Enine sistemde kritik burkulma yükü değerleri düşmektedir. Burada boyuna yapı sisteminin kullanımı burkulmaya daha dayanıklı bir yapı elde edilmesi anlamına gelmektedir. Bu durum çelik gibi

izotrop malzemeler açısından da karşılaşılan bir durum olmakta ve sonuçlar bu açıdan da uyumlu bulunmaktadır.

Önceki bölümde simetrik katmanlı ince dikdörtgen kompozit plakların boyutsuz kritik burkulma yükü ( $N_0^*$ ) plak kısa kenarına, plak kalınlığına ve elastisite modülüne bağlı olarak

verilmiştir. Kısa kenar y ekseninde olduğu durumda

$$N_0^* = N_{kr} \frac{b^2}{t^3 E_{22} I_0}$$

olarak, x ekseninde olduğu durumda ise

$$N_0^* = N_{kr} \frac{a^2}{t^3 E_{22} I_0}$$

Bu iki boyutsuz ifade Reddy'nin çalışmasında da sf:421-422'de [24] benzer biçimde gösterilmiştir. Bu benzerlik de hesaplamaların sağlanmasının yapıldığını göstermektedir.

Kompozit gemilerin yapımında; malzeme seçimi, destek elemanlarının

#### Kaynakça

- [1] Reuben, R.L. 1994. Materials in Marine Technology. Springer-Verlag, London Limited, UK.
- [2] Sheno, R.A., Wellicome, J.F. 1993. Composite Materials in Maritime Structures, Volume-I (Fundamental Aspects), Cambridge University Pres, NY.
- [3] Sheno, R.A., Wellicome, J.F. 1993. Composite Materials in Maritime Structures, Volume-II (Practical Considerations), Cambridge University Pres, NY.
- [4] Mouritz, A.P., Gellert, E., Burchill, P., Challis K., 2001. Review of Advanced Composite Structures for Naval Ships and Submarines, Composite Structures, Cilt. 53, s..21-41.DOI:10.1016/S0263-8223(00)00175-6
- [5] Savcı, M., 1987. Gemi Yapısında Levhalar ve Silindirik Kabuklar, İ.T.Ü. Gemi İnş. ve Deniz Bil. Fak, İstanbul.
- [6] Lekhnitskii, S.G.1968. Anisotropic Plates, Gordon and Breach, NewYork.
- [7] Aran, A., 1990. Elyaf Takviyeli Karma Malzemeler, İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı:1420, Gümüşsuyu, İstanbul.
- [8] Powell, P.C., 1994. Engineering with fibre-polymer laminates, Chapman & Hall, London, UK.
- [9] Mallick. P. K., 1997. Composites engineering handbook, Marcel Dekker Inc., NY.
- [10] ASM Handbook, 2001. Volume 21, Composites, ASM International.
- [11] Harper, C.A., 2002. Handbook of plastics, elastomers, and composites, McGraw-Hill, NY.
- [12] Ambartsumyan, S.A, 1970. Theory of Anisotropic Plates, Technomic Publishing, Co., Wesport Conn.
- [13] Baharlou, B., Leissa A.W., 1987. Vibration and Buckling of Generally Laminated Composite Plates with Arbitrary Edge conditions, Int. J. Mech. Sci. Vol. 29, No. 8, pp. 545-555.DOI: 10.1016/0020-7403(87)90026-9
- [14] Lakshminarayana, L., Kumar, Krishna Mohana Rao G., 2012. Buckling analysis of quasi-isotropic symmetrically

- laminated rectangular composite plates with an elliptical/circular cutout subjected to linearly varying in-plane loading using FEM, International Journal Of Mechanics, Issue 1, Volume 6.
- [15] Hu, H., Badir, A., Abatan, A., 2003. Buckling behavior of a graphite/epoxy composite plate under parabolic variation of axial loads, Int. J. Mech. Sci. 45, 1135-1147. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2003.08.003
- [16] Darvizeh, M., Darvizeh, A., Ansari, R., Sharma, C.B., 2004. Buckling analysis of generally laminated composite plates (generalized differential quadrature rules versus Rayleigh-Ritz method), Composite Structures 63, 69-74. DOI: 10.1016/S0263-8223(03)00133-8
- [17] Aydoğdu, M., 2009. A new shear deformation theory for laminated composite plates, Composite Structures 89, 94-101. DOI: 10.1016/j.compstruct.2008.07.008
- [18] Felix, D.H., Bambill, D.V., Rossit, C.A., 2011. A note on buckling and vibration of clamped orthotropic plates under in-plane loads. Struct. Eng. Mech., 39 (1), 115-123, DOI:10.12989/sem.2011.39.1.115
- [19] Aydoğdu, M., Tımarcı, T., 2004. Düzlem-içi yüklenmiş basit destekli simetrik katmanlı dikdörtgen kompozit ince plakların burkulma ve titreşimi, Trakya Univ J Sci, 5(2): 167-177.
- [20] Aydoğdu, M., Aksencer, T., 2017. Buckling of Cross-ply Composite Plates with Linearly Varying In-plane Loads, 3 January,
- [21] Kumar, Y., 2017. The Rayleigh-Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review, Journal of Vibration and Control, 1-23
- [22] Noor, A.K., Burton W.S., 1989. Assesment of shear deformation theories for multilayered composite plates, Appl Mech Rev. 42 (1), DOI:10.1115/1.3152418
- [23] Noor, A.K., Burton W.S., 1990. Assesment of computational model for multilayered composite plates, Appl Mech Rev., 43 (4): 67-97. DOI: 10.1016/0263-8223(90)90050-0
- [24] Mallikarjuna, Kant, T., 1993. A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches, Composite Structures, 23 293-312. DOI:10.1016/0263-8223(93)90230-N
- [25] Altunsaray, E., Bayer, İ., 2004. Buckling of symmetrically laminated quasi-isotropic thin rectangular plates, Steel Compos. Struct., Int. J., 17(3), 305-320. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2014.17.3.305>
- [26] Tsai, S.W., 1988. Composites design, 4th Edition, Think Composites.
- [27] Reddy, J.N., 2004. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second edition, CRC Pres.
- [28] Ashton, J.E., Whitney, J.M., 1970, Theory of Laminated Plates, Technomic Publication, USA.
- [29] ANSYS 17 Academic, 2017.