

SERBEST UÇ NOKTASINDAN TEKİL KUVVET ETKİYEN DOĞRUSAL ÇİFT MODÜLLÜ KONSOL KİRİŞLERDEKİ BÜYÜK YER DEĞİŞTİRMELERİN ANALİZİ

*(ANALYSIS OF LARGE DEFLECTIONS OF LINEAR BIMODULUS
CANTILEVER BEAMS SUBJECTED TO CONCENTRATED LOAD AT THE
FREE END)*

İbrahim EREN¹

ÖZ

Çekme ve basmada farklı elastiklik modülü alınan doğrusal çift modüllü, serbest ucundan tekil yük etkileyen konsol kirişlerde büyük yer değiştirmeler, farklı sayısal yöntemlerle hesaplanarak karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: büyük yer değiştirmeler, çift modül, konsol kiriş, tekil yük

ABSTRACT

Large deflections of linear bimodulus cantilever beams subjected to concentrated load at the free end are compared by using different numerical methods.

Keywords: *Large deflections, bimodulus, cantilever beam, concentrated load*

¹ Yıldız Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, İSTANBUL, er@yildiz.edu.tr (sorumlu yazar)

1. GİRİŞ

Taşıyıcı sistemlerde meydana gelen büyük yer değiştirmeler üzerine yapılan çalışmalar, geçmişte olduğu gibi günümüzde de devam etmektedir. Pratik uygulamalarda yapılan doğrusallaştırmalara rağmen bilinmektedir ki elastik eğri için eğrilik ifadesi doğrusal değildir. Bu gerçek göz önüne alındığında yer değiştirmeler, genellikle analitik yöntemlerle belirlenemez, daha ziyade yaklaşık ve sayısal yöntemler kullanmak gerekir. Farklı yükleme koşullarında konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler, bir çok çalışmada incelenmiştir [1-8]. Prathap ve Varadan, Ramberg-Osgood tipi lineer olmayan malzemeden yapılmış tekil yüklü konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri incelemişlerdir [9]. Aynı problem, serbest ucundan moment etkileyen konsol kirişler için Varadan ve Joseph [10] tarafından çözülmüştür. Serbest ucundan tekil kuvvet etkileyen Ludwick tipi lineer olmayan konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeler, Lewis ve Monasa tarafından incelenmiştir [11]. Aynı yazarlar aynı problemi serbest ucundan moment etkileyen konsol kirişler için de çözümlenmişlerdir [12]. Lo ve Gupta, eğilme problemlerinde; elastik limitin ötesinde, malzeme gerilme – şekil değiştirme ilişkisini logaritmik olarak, dikdörtgen kesitli kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri incelemiştir [13]. Lee, üniform yayılı yüklü ve serbest ucundan tekil kuvvet etkileyen, Ludwick tipi lineer olmayan malzemeden oluşan, konsol kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri hesaplamıştır [14]. Güven vd., serbest uç noktasından moment etkileyen Ludwick tipi, doğrusal olmayan, çift modüllü (çekme ve basınçtaki gerilme-şekil değiştirme ilişkisi farklı olan) malzemeden yapılmış konsol kirişlerin, uç noktasındaki büyük yer değiştirmeleri, kapalı formda ifade ederek, sayısal sonuçları, malzeme sabitlerinin değişimine göre tablolaştırarak vermişlerdir [15]. Eren, farklı yükleme koşullarına göre, malzeme ve geometrik doğrusal olmama özelliklerine sahip kompozit, çift modüllü vb. kirişlerdeki büyük yer değiştirmeleri analitik ve sayısal yöntemlerle hesaplamış ve bunlarla ilgili bazı yeni çözümler önermiştir [16]. Aynı yazar, serbest uç noktasından moment etkileyen logaritmik gerilme-şekil değiştirme ilişkisine sahip, doğrusal olmayan, çift modüllü malzemeden yapılmış konsol kirişlerin, uç noktasındaki büyük yer değiştirmeleri hesaplamıştır [17]. Kun vd., çoklu yük etkisindeki çift modüllü malzemenin, malzeme değiştirme yöntemi kullanılarak topolojik optimizasyonunu yapmışlardır [18].

Bu çalışmada, serbest uç noktasından tekil yük etkileyen, doğrusal çift modüllü malzeme özelliğine sahip dikdörtgen kesitli bir konsol kirişteki büyük yer değiştirme değerleri, farklı sayısal yöntemlerle hesaplanmış ve tablolaştırılarak karşılaştırılmıştır.

2. SERBEST UÇ NOKTASINDAN TEKİL KUVVET ETKİYEN DOĞRUSAL ÇİFT MODÜLLÜ KONSOL KİRİŞLERDEKİ BÜYÜK YER DEĞİŞTİRMELER

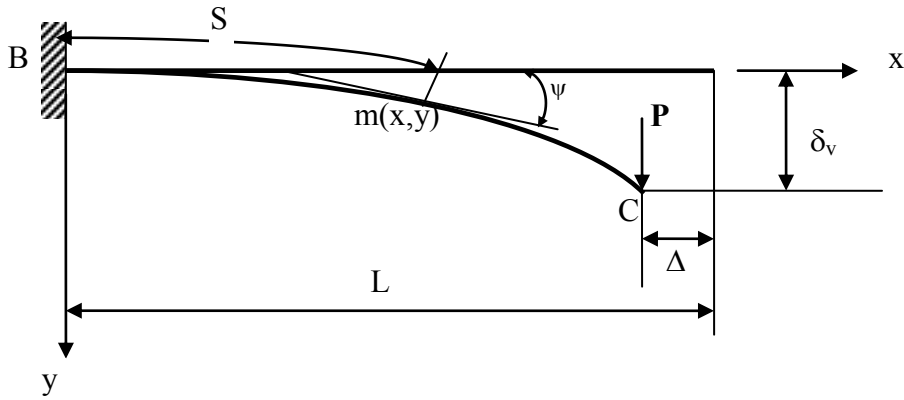
Dik kesiti Şekil 2’de verilen, Şekil 1’deki gibi yüklenmiş, doğrusal çift modüllü konsol kirişlerdeki gerilme değerleri, aşağıdaki gibidir:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon \quad (1)$$

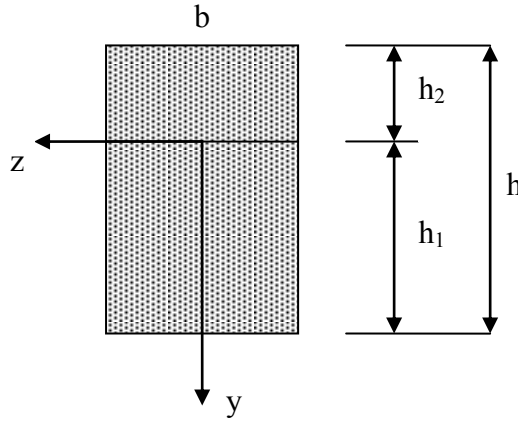
$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon \quad (2)$$

(1) eşitliğinde basınç, (2) eşitliğinde ise çekme gerilmesinin değerleri verilmiştir. Burada E_1 basınçtaki, E_2 çekmedeki elastiklik modülüdür. E_1 ve E_2 birbiri cinsinden aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$E_2 = tE_1 \quad (3)$$



Şekil 1. Serbest uç noktasından tekil kuvvet etkileyen konsol kiriş



Şekil 2. Çift modüllü kirişin dikdörtgen kesiti

M eğilme momenti, h dikdörtgenin kesitin yüksekliği, b dikdörtgen kesitin genişliği, A kesit alanı, σ gerilme, ε birim şekil değiştirme, κ eğrilik olarak alındığında aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\varepsilon = \kappa y, \quad (4)$$

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma_z b dy = 0 \quad (5)$$

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma_z y b dy = M \quad (6)$$

$$h = h_1 + h_2 \quad (7)$$

(1-7) eşitliklerinden aşağıdaki denklemler bulunur.

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 b dy + \int_{-h_2}^0 \sigma_2 b dy = \frac{1}{2} E_1 h_1^2 \kappa - \frac{1}{2} E_1 (h-h_1)^2 t \kappa = 0 \quad (8)$$

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 b y dy + \int_{-h_2}^0 \sigma_2 b y dy = \frac{1}{3} b E_1 h_1^3 \kappa + \frac{1}{3} b E_1 (h-h_1)^3 t \kappa = M \quad (9)$$

Moment büyüklüğü $m(x,y)$ noktası için;

$$M = P(L-x-\Delta) \quad (10)$$

(8-10) denklemleri kullanıldığında κ ve h_1 değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\kappa = \frac{3(LP + \frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} + 3LPt - \frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}} - Px - \frac{2P\sqrt{t}x}{1+\sqrt{t}} - 3Ptx + \frac{2Pt^{\frac{3}{2}}x}{1+\sqrt{t}} - P\Delta - \frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}} - 3Pt\Delta + \frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})}{bE_1 h^3 t} \quad (11)$$

$$h_1 = \frac{h\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} \quad (12)$$

Eğrilik denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{d\psi}{dS} = \kappa = \frac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{Lewis, Monosa, 1981}) \quad (13)$$

(13) ifadesinin her iki tarafı integre edildiğinde;

$$\int \kappa dx + C_1 = \frac{y'(x)}{(1+(y'(x))^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

$$\int \kappa dx + C_1 = G \quad (\text{Fertis, 1999}) \quad (15)$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$y'(x) = \frac{G}{(1-(G)^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{Fertis, 1999}) \quad (16)$$

(11) ve (13-16) denklemleri kullanılarak G ifadesi elde edilir. Şekil 1' den görülebilen $x = 0$ 'da $y'(0) = 0$ sınır şartı kullanılıp, (15) denkleminde verilen G ifadesindeki C_1 integrasyon sabitinin sıfır olduğu bulunarak, G değeri aşağıdaki gibi yazılır.

$$G = \frac{3P(1+\sqrt{t})^2(Lx - \frac{x^2}{2} - x\Delta)}{bE_1h^3t} \quad (17)$$

$$\frac{E_1bh^3}{12} = EI \quad (18)$$

(18) eşitliğindeki kabul yapıldığında, G aşağıdaki gibi bulunur.

$$G = \frac{3P(1+\sqrt{t})^2(Lx - \frac{x^2}{2} - x\Delta)}{12EIt} \quad (19)$$

Yay uzunluğu;

$$\int_0^{(L-\Delta)} \sqrt{(1+(y'(x))^2)} = L, \quad (\text{Lewis, Monosa, 1982}) \quad (20)$$

(16) ve (20) eşitliğinden,

$$\int_0^{(L-\Delta)} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{G}{(1-(G^2))^{\frac{1}{2}}}\right)^2\right)} dx = L \quad (21)$$

elde edilir.

(21) eşitliğindeki yay uzunluğu formülünde, (19) denkleminde verilen G ifadesi kullanıldığında, Simpson kuralı yardımıyla yay uzunluğu eşitliği integre edilerek Δ , yatay yer değiştirme büyüklüğü bulunmaktadır. İntegrasyon işlemi sonucunda elde edilen eşitlikten Δ 'yı çekebilmek için ise Newton yöntemini kullanarak kök bulma işlemi uygulanmaktadır. Daha sonra düşey yer değiştirmeleri bulabilmek için Runge-Kutta yöntemi yardımıyla $x = 0$ 'da $y(0) = 0$ sınır şartı kullanılıp, $y(x)$ enterpolasyon fonksiyonu elde edilir. $x = L-\Delta$ için bulunan $y(L-\Delta)$ ifadesi, δ_v olarak gösterdiğimiz serbest uç noktadaki düşey yer değiştirmenin büyüklüğünü vermektedir. $L = 25.4$ m, $P = 1780$ N, $EI = 516.54 \times 10^3$ Nm² sayısal büyüklükleri için yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 1'de gösterilmiştir.

Yukarıda yöntemle bulunan değerleri karşılaştırmak için, aşağıda sırasıyla Moment, Galerkin, Alt Bölge Kollokasyon ve En Küçük Kareler yöntemiyle yapılan işlemler gösterilmiştir. Moment Yöntemiyle, Şekil 1'den görülebilen $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ sınır şartlarını sağlayan, yaklaşık deneme fonksiyonu aşağıdaki gibi alınabilir.

$$y(x) = ax^2 + bx^4 \quad (22)$$

(11), (13), (18) ve (22) denklemleri kullanılarak, hata fonksiyonu ϵ_n aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{(2a+12bx^2)}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3(LP+\frac{2LP\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}+3LPt-\frac{2LPt^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{t}}-Px-\frac{2P\sqrt{t}x}{1+\sqrt{t}}-3Pt_x+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}x}{1+\sqrt{t}}-P\Delta-\frac{2P\sqrt{t}\Delta}{1+\sqrt{t}}-3Pt\Delta+\frac{2Pt^{\frac{3}{2}}\Delta}{1+\sqrt{t}})}{12EIt} \quad (23)$$

ε_{Ω} , hata fonksiyonunun sıfırncı momentini, Simpson yönteminden faydalanarak bölge üzerinde integre ettiğimizde;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{30} \left(\frac{4(2a+\frac{3}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{1}{5}a(L-\Delta)+\frac{1}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(2a+\frac{12}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{2}{5}a(L-\Delta)+\frac{4}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ & + \frac{4(2a+\frac{27}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{3}{5}a(L-\Delta)+\frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(2a+\frac{48}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{4}{5}a(L-\Delta)+\frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{4(2a+3b(L-\Delta)^2)}{(1+(a(L-\Delta)+\frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(2a+\frac{108}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{6}{5}a(L-\Delta)+\frac{108}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{4(2a+\frac{147}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{7}{5}a(L-\Delta)+\frac{343}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(2a+\frac{192}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{8}{5}a(L-\Delta)+\frac{256}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{4(2a+\frac{243}{25}b(L-\Delta)^2)}{(1+(\frac{9}{5}a(L-\Delta)+\frac{729}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2a+12b(L-\Delta)^2}{(1+(2a(L-\Delta)+4b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}) (L-\Delta) + \\ & - \frac{P(1+\sqrt{t})^2(L-\Delta)^2}{8EIt} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

denklemini elde edilir.

ε_{Ω} , hata fonksiyonunun birinci momentini, Simpson yönteminden faydalanarak bölge üzerinde integre ettiğimizde ise;

$$\frac{1}{30} \left(\frac{2(2a+\frac{3}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)}{5(1+(\frac{1}{5}a(L-\Delta)+\frac{1}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(2a+\frac{12}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)}{5(1+(\frac{2}{5}a(L-\Delta)+\frac{4}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6(2a + \frac{27}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)}{5(1 + (\frac{3}{5}a(L-\Delta) + \frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4(2a + \frac{48}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)}{5(1 + (\frac{4}{5}a(L-\Delta) + \frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{2(2a + 3b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)}{(1 + (a(L-\Delta) + \frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6(2a + \frac{108}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)}{5(1 + (\frac{6}{5}a(L-\Delta) + \frac{108}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{14(2a + \frac{147}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)}{5(1 + (\frac{7}{5}a(L-\Delta) + \frac{343}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8(2a + \frac{192}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)}{5(1 + (\frac{8}{5}a(L-\Delta) + \frac{256}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{18(2a + \frac{243}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)}{5(1 + (\frac{9}{5}a(L-\Delta) + \frac{729}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(2a + 12b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)}{(1 + (2a(L-\Delta) + 4b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}(L-\Delta) + \\
& - \frac{P(1 + \sqrt{t})^2(L-\Delta)^3}{24EI} = 0
\end{aligned} \tag{25}$$

ifadesi bulunur.

(19) denkleminde verilen G ifadesi, (21) eşitliğindeki yay uzunluğu formülünde kullanıldığında, Simpson yöntemi yardımıyla, yay uzunluğu eşitliği integre edilerek Δ , yatay yer değiştirme değerleri hesaplanır. $L = 25.4$ m, $P = 1780$ N, $EI = 516.54 \times 10^3$ Nm² sayısal büyüklükleri ve yukarıda nasıl bulunacağından bahsettiğimiz Δ , yatay yer değiştirme değerleri kullanılarak, farklı t değerleri için (24) ve (25) eşitliklerinden, yaklaşık deneme fonksiyonundaki a ve b sabitleri elde edilir. Sabitler bulunduktan sonra (22) denklemindeki yerlerine yazıldığında, y(x) yaklaşık deneme fonksiyonu elde edilmiş olur. $x = L - \Delta$ için y(L- Δ) ifadesi Şekil 1'deki konsol kirişin serbest uç noktasındaki δ_v , düşey yer değiştirme değerlerini vermektedir.

Farklı t değerleri için hesaplanan, yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, Çizelge 1'de gösterilmektedir. Galerkin yöntemiyle hesap yapılacak olursa; (11), (13), (18), (22) ve (23) denklemleri kullanılarak, (22) denklemindeki baz fonksiyonları olan x^2 ve x^4 , ağırlık fonksiyonları olarak alınıp, (23) denklemindeki hata fonksiyonu ile çarpılan ağırlık fonksiyonları, bölge üzerinde Simpson yönteminden yararlanılarak integre edildiğinde, aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\frac{1}{30} \left(\frac{(2a + \frac{3}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^2}{25(1 + (\frac{1}{5}a(L-\Delta) + \frac{1}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(2a + \frac{12}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^2}{25(1 + (\frac{2}{5}a(L-\Delta) + \frac{4}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{9(2a + \frac{27}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^2}{25(1 + (\frac{3}{5}a(L-\Delta) + \frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{8(2a + \frac{48}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^2}{25(1 + (\frac{4}{5}a(L-\Delta) + \frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{(2a + 3b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^2}{(1 + (a(L-\Delta) + \frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{18(2a + \frac{108}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^2}{25(1 + (\frac{6}{5}a(L-\Delta) + \frac{108}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{49(2a + \frac{147}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^2}{25(1 + (\frac{7}{5}a(L-\Delta) + \frac{343}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{32(2a + \frac{192}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^2}{25(1 + (\frac{8}{5}a(L-\Delta) + \frac{256}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{81(2a + \frac{243}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^2}{25(1 + (\frac{9}{5}a(L-\Delta) + \frac{729}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(2a + 12b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^2}{(1 + (2a(L-\Delta) + 4b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}(L-\Delta) + \\
& - \frac{P(1 + \sqrt{t})^2(L-\Delta)^4}{48EIt} = 0
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{30} \left(\frac{(2a + \frac{3}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{2500(1 + (\frac{1}{5}a(L-\Delta) + \frac{1}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2(2a + \frac{12}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{625(1 + (\frac{2}{5}a(L-\Delta) + \frac{4}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\
& + \frac{81(2a + \frac{27}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{2500(1 + (\frac{3}{5}a(L-\Delta) + \frac{27}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{32(2a + \frac{48}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{625(1 + (\frac{4}{5}a(L-\Delta) + \frac{32}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{(2a + 3b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{4(1 + (a(L-\Delta) + \frac{1}{2}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{162(2a + \frac{108}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{625(1 + (\frac{6}{5}a(L-\Delta) + \frac{108}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{2401(2a + \frac{147}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{2500(1 + (\frac{7}{5}a(L-\Delta) + \frac{343}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{512(2a + \frac{192}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{625(1 + (\frac{8}{5}a(L-\Delta) + \frac{256}{125}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
& + \frac{6561(2a + \frac{243}{25}b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{2500(1 + (\frac{9}{5}a(L-\Delta) + \frac{729}{250}b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}} + \left. \frac{(2a + 12b(L-\Delta)^2)(L-\Delta)^4}{(1 + (2a(L-\Delta) + 4b(L-\Delta)^3)^2)^{\frac{3}{2}}}(L-\Delta) + \right. \\
& \left. - \frac{P(1 + \sqrt{t})^2(L-\Delta)^6}{120EIt} = 0
\end{aligned} \tag{27}$$

(19) denkleminde verilen G ifadesi, (21) eşitliğindeki yay uzunluğu formülünde kullanıldığında, Simpson yöntemi yardımıyla, yay uzunluğu eşitliği integre edilerek Δ , yatay yer değiştirme değerleri bulunur.

Yukarıda daha önceki yöntemde verilen kiriş özellik, boyut ve yük değerleri ve Δ , yatay yer değiştirme değerleri kullanılarak, farklı t değerleri için (26) ve (27) eşitliklerinden yaklaşık deneme fonksiyonundaki a ve b sabitleri elde edilir. Bulunan $y(x)$ yaklaşık deneme fonksiyonundan δ_v , düşey yer değiştirme değerleri hesaplanarak Çizelge 1’de gösterilmiştir.

Alt Bölge Kollokasyon Yönteminde; hata fonksiyonu bölgenin her iki yarısında integrale edilip, $\int_0^{\frac{L-\Delta}{2}} \epsilon_\Omega dx$ ve $\int_{\frac{L-\Delta}{2}}^{L-\Delta} \epsilon_\Omega dx$ ifadeleri sıfıra eşitlenmek suretiyle elde edilen denklemler

kullanılarak, son olarak da, en küçük kareler yöntemiyle hata fonksiyonunun, deneme fonksiyonunun sabit terimlerine göre kısmi türevleri;

$$\partial_a \epsilon_\Omega = -\frac{6x(2a+12bx^2)(2ax+4bx^3)}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (28)$$

$$\partial_b \epsilon_\Omega = -\frac{12x^3(2a+12bx^2)(2ax+4bx^3)}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{12x^2}{(1+(2ax+4bx^3)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (29)$$

ile çarpılıp, bölge üzerinde integrale edilerek sıfıra eşitlendiği denklemler kullanılarak yukarıdaki yöntemlerde uygulanan yaklaşımlarla elde edilen yer değiştirme değerleri Çizelge 1’de verilmiştir.

3. SONUÇLAR

Çift malzemeli konsol kiriş için farklı sayısal yöntemlerle hesaplanan yatay ve düşey yer değiştirme değerleri, karşılaştırmalı olarak aşağıda Çizelge 1’de verilmiştir. Çekmedeki elastiklik modülü, basınçtaki elastiklik modülüne göre arttıkça, yer değiştirme değerlerinin küçüldüğü görülmektedir. Açık Runge-Kutta, Momentler, Alt Bölge Kollokasyon ve En Küçük Kareler yöntemleri ile yapılan hesaplamalarda bulunan yer değiştirme değerleri, birbirine oldukça yakın değerlerdir. Yalnızca Galerkin yönteminde bir iki değer için büyük sapma değerleri gözlemlenmektedir. Çekmedeki ve basınçtaki elastiklik modülleri eşit ($t = 1$) olduğunda, malzeme bilinen doğrusal malzemeye dönüşmektedir. Bu durumda Referans (Fertis, 1999) sonuç ile diğer yöntemlerle bulduğumuz yer değiştirme değerleri karşılaştırmalı olarak görülebilmektedir. Yatay yer değiştirmeler için Referans (Fertis, 1999) sonuçtan sapma % 0,94 iken düşey yer değiştirmelerdeki referans sonuçlardan sapma, Açık Runge Kutta Yönteminde % 0,95, Momentler yönteminde % 1,70, Alt Bölge Kollokasyon Yönteminde % 2,60, En Küçük Kareler Yönteminde % 4,40 ve Galerkin yönteminde % 17,83 olmaktadır.

Çizelge 1. Serbest uç noktasından tekil kuvvet etkileyen doğrusal çift modüllü konsol kirişlerde, farklı sayısal yöntemler kullanarak, büyük yer değiştirmelerin karşılaştırılması (Eren, 2006)

$\sigma_1 = E_1\varepsilon$ (Basınç), $\sigma_2 = E_2\varepsilon$ (Çekme)						
$(E_1bh^3 / 12) = EI$ $E_2 = t E_1$, $h = h_1+h_2$, $L = 25,4m$, $P = 1780 N$, $EI = 516,54 \times 10^3 Nm^2$						
t		0,25	0,5	1	2	5
Referans Değer*	Δ (m)			4,61		
	δ_v (m)			13,4198		
Açık Runge Kutta Yöntemi	Δ (m)	9,84867	6,95821	4,65362	3,06576	1,84727
	δ_v (m)	18,1334	15,8023	13,2933	9,72465	8,65842
Moment Yöntemi	Δ (m)	9,84867	6,95821	4,65362	3,06576	1,84727
	δ_v (m)	17,478	15,4333	13,1956	10,9917	8,67377
Galerkin Yöntemi	Δ (m)	9,84867	6,95821	4,65362	3,06576	1,84727
	δ_v (m)	11,9334	14,3213	16,3313	11,8634	8,08435
Alt Bölge Kollokasyon Yöntemi	Δ (m)	9,84867	6,95821	4,65362	3,06576	1,84727
	δ_v (m)	17,2403	15,293	13,0792	10,9096	8,62774
En Küçük Kareler Yöntemi	Δ (m)	9,84867	6,95821	4,65362	3,06576	1,84727
	δ_v (m)	17,7747	16,125	12,8545	10,9397	8,71259

* (Fertis, 1999), Sayfa 13, Örnek 1.1.

KAYNAKLAR

- [1] Bisshopp KE, Drucker DC. "Large Deflections of Cantilever Beams", *Quarterly of Applied Mathematics*, Cilt.3, 1945, s.272-275.
- [2] Lau JH. "Large Deflections of Beams with Combined Loads", *Journal of Engineering Mechanics*, Cilt.108, 1982, s.180-185.
- [3] Rao BN, Rao GV. "On the Large Deflection of Cantilever Beams with End Rotational Load", *ZAMM Journal of applied mathematics and mechanics*, Cilt.66, 1986, s.507-509.
- [4] Baker G. "On the Large Deflections of Non-prismatic Cantilevers with a Finite Depth", *Computers & Structures*, Cilt.46, 1993, s.365-370.
- [5] Lee BK, Wilson JF, Oh SJ "Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross Sections", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Cilt.28, 1993, s.579-589.
- [6] Frisch-Fay R. *Flexible Bars*, London: Butter Worths, 1962.
- [7] Fertis DG. *Nonlinear Mechanics*, New York: CRC Pres, 1999.
- [8] Scott EJ, Carver DR, Kan M. "On the Linear Differential Equation for Beam Deflection", *Journal of Applied Mechanics*, Cilt.22, 1955, s.245-248.
- [9] Prathap G, Varadan TK. "The Inelastic Large Deformation of Beams", *Journal of Applied Mechanics*, Cilt.43, 1976, s.689-690.
- [10] Varadan TL, Joseph D. "Inelastic Finite Deflections of Cantilever Beams", *Journal of the Aeronautical Society of India*, Cilt.39, 1987, s.39-41.
- [11] Lewis G, Monosa F. "Large Deflections of Cantilever Beams of Non-linear Materials", *Computers & Structures*, Cilt.14, 1981, s.357-360.
- [12] Lewis G, Monosa F. "Large Deflections of Cantilever Beams of Non-linear Materials of the Ludwick Type Subjected to an End Moment", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Cilt.17, 1982, s.1-6.
- [13] Lo CC, Gupta SD. "Bending of a Nonlinear Rectangular Beam in Large Deflection", *Journal of Applied Mechanics*, Cilt.45, 1978, s.213-215.
- [14] Lee K. "Large Deflections of Cantilever Beams of Non-linear Elastic Material under a Combined Loading", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Cilt.37, 2002, s.439-443.
- [15] Güven U, Baykara C, Bayer İ. "Large deflections of a cantilever beam of nonlinear bimodulus material subjected to an end moment", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Cilt.24, No.12, 2005, s.1321-1326.
- [16] Eren İ. "Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler Üzerine Bazı Yeni Çözümler", Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006, s.105.
- [17] Eren İ. "Analyses of Large Deflections for Logarithmical Bimodulus Cantilever Beams", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Cilt.28, No.11, 2009, s.1359-1363.
- [18] Kun C, Zhadiang G, Jiao S. "Compliance optimization of a continuum with bimodulus material under multiple load cases", *Computer-Aided Design*, Cilt.45, No.2, 2013, s.195-203.

ÖZGEÇMİŞ / CV**İbrahim EREN; Yrd.Doç.Dr. (Assist.Prof)**

Lisans derecesini 1995'te İstanbul Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü'nden, Yüksek Lisans derecesini 1998'de İstanbul Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü'nden, Doktora derecesini 2006 yılında İstanbul Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü'nden aldı. Hala Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü'nde öğretim üyesi olarak görev yapmaktadır. Temel çalışma alanları: Katı Cisimler Mekaniği, Kompozit Malzemeler Mekaniği, Kirişlerdeki Büyük Yer Değiştirmeler üzerinedir.

He got his bachelors' degree in the Mechanical Engineering Department at Yildiz Technical University, Istanbul/Turkey in 1995, his master degree in the Mechanical Engineering Department at Yildiz Technical University, Istanbul/Turkey in 1998, PhD degree in the Mechanical Engineering Department at Yildiz Technical University, Istanbul/Turkey in 2006. He is still an academic member of the Mechanical Engineering Department at Yildiz Technical University. His major areas of interests are: Mechanics of Solid Materials, Mechanics of Composite Materials, Large Deflections of the Beams.