



**NİCEMLENMİŞ GÖZLEMLERE DAYANAN PARAMETRE
KESTİRİMİNDE OPTİMAL EK GÜRÜLTÜ VE BUNUN EN BÜYÜK
SONSAL OLASILIK KESTİRİCİLERİ ÜZERİNE ETKİLERİ**

**(OPTIMAL ADDITIVE NOISE FOR PARAMETER ESTIMATION BASED
ON QUANTIZED OBSERVATIONS AND ITS EFFECTS ON MAXIMUM
A-POSTERIORI PROBABILITY ESTIMATORS)**

Gökce Osman BALKAN*, Sinan GEZİCİ*

ÖZET/ABSTRACT

Ek gürültünün doğrusal olmayan sistemlerdeki faydaları kısıpırtılandırma ve stokastik rezonans bağlamında gözlemlenmiştir. Ek gürültünün avantajları, ayrıca doğrusal olmayan sistemleri içeren kestirim problemlerinde de görülmüştür. Bu makaledeki temel amaç, optimal ek gürültü eklenmiş gözlemlerin nicemlenmiş sürümlerinin kullanıldığı ve optimal ek gürültünün sonsal Cramer-Rao alt sınırı (SCRAS) cinsinden formüleştirildiği kestirim problemlerinde, en büyük sonsal olasılık kesiricilerinin ortalama karesel hata başarımının gelişimini incelemektir. İlk olarak optimal ek gürültünün formüleştirilmesi sunulmaktadır. Ardından optimal ek gürültünün sabit bir sinyale karşılık geldiği açıklanmaktadır. Bu kuramsal sonuç, önce sayısal bir örnekle gösterilmekte, sonrasında ise optimal ek gürültünün sıkça kullanılan kısıpırtılandırma sinyalleri ile karşılaştırılmasıyla desteklenmektedir. Son olarak, SCRAS cinsinden ifade edilen optimal ek gürültünün yararları, en büyük sonsal olasılık kestiricilerinin ortalama karesel hataları cinsinden incelenmiştir.

The benefits of additive noise in nonlinear systems have been observed in the context of dithering and stochastic resonance. Also, the advantages of additive noise have been observed in parameter estimation problems involving nonlinear systems. In this paper, the main aim is to investigate the mean-squared error (MSE) performance enhancement of the maximum a-posteriori probability (MAP) estimators, where the quantized versions of the observations combined with the optimal additive noise are used to estimate the parameter related to the observation and the optimal additive noise is formulated in terms of the posterior Cramer-Rao lower bound (PCRLB). First, the formulation of the optimal additive noise is presented. Next, it is explained that the optimal additive noise corresponds to a constant signal. This theoretical result is first demonstrated with a numerical example and then supported by the comparison of the optimal additive constant noise with commonly used dither signals. Finally, the benefits of the optimal additive noise, which is described in terms of the PCRLB, are investigated for the MSEs of MAP estimators.

ANAHTAR KELİMELER/KEYWORDS

Kestirim, Nicemleme, Gürültü ile geliştirilmiş kestirim, Sonsal Cramer-Rao alt sınırı, Ortalama karesel hata, En büyük sonsal olasılık

Estimation, Quantization, Noise enhanced estimation, Posterior Cramer-Rao lower bound, Mean-squared error, Maximum a-posteriori probability

* Bilkent Ün., Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü, ANKARA

1. GİRİŞ

Genellikle sistemlerin performansını olumsuz yönde etkilemesiyle bilinen gürültü, stokastik rezonans fenomeni altında doğrusal olmayan bazı sistemlerin performansını artırabilmektedir (Benzi vd., 1981; Gammaitoni vd., 1998). Gürültünün olumlu katkıları, kıpırtılandırma (*dithering*) kavramı altında, nicemlenmiş sistemlerde de gözlemlenmektedir (Dabeer ve Karnik, 2006). Sezim kuramında gürültünün faydaları, ek gürültü ile sezim başarımı geliştirilen optimal olmayan sezicilerde de görülmüştür (Chen vd., 2007; Patel ve Kosko, 2009; Bayram ve Gezici, 2009).

Ek gürültünün yararları parametre kestirim problemlerinde de incelenmiştir (Chapeau-Blondeau ve Rousseau, 2004; Chapeau-Blondeau, 2002). Frekans kestirim problemlerinde, bazı koşullar altında gürültünün artması durumunda optimal Bayes kestiricisinin ortalama karesel hatasının azaldığı gözlemlenmiştir (Chapeau-Blondeau ve Rousseau, 2004). Benzer şekilde Bayes kestiriminde artan gürültü seviyesinin ortalama karesel hata başarımına olumlu katkı sağladığı görülmüştür (Chapeau-Blondeau, 2002). Her iki çalışmada da gürültünün faydaları nicemleyicilerin doğrusal olmayan yapıları sayesinde gözlemlenmiştir.

Gözlem sayısının yüksek olması ile ortalama karesel hatanın hesabı zorlaşmaktadır ve alternatif olarak Cramer-Rao alt sınırı başarımların artış ölçümü için uygun bir ölçüt olarak kullanılmaktadır (Balkan ve Gezici, 2010¹). Nicemlenmiş gözlemlere dayalı dağıtılmış kestirim probleminde Cramer-Rao alt sınırı en küçültmesi, nicemlenme aralıklarının en iyileştirilmesiyle sağlanmıştır (Marano vd., 2006). Ayrıca çoklu seviyeli bir nicemleyicinin kullanıldığı parametre kestirim probleminde, rasgele gürültü kasten eklenilerek Cramer-Rao alt sınırı düşürülmüştür (Papadopoulos vd., 2001). Benzer başarımların artışları, sabit bir gürültünün kasten eklenilmesinin neden olduğu başarımların artışını aynı şekilde sağlayan uygun bir nicemleyici eşliğinin seçimiyle ve girdi sinyalinde var olan gürültü değişiminin uygun bir değere çekilmesiyle de sağlanmaktadır (Riberio ve Giannakis, 2006; Chapeau-Blondeau ve Rousseau, 2003).

Nicemlenmiş gözlemlere bağlı kestirim problemlerinde, ek gürültünün kestirim başarımını arttırdığı çalışmalarda, Cramer-Rao alt sınırını en iyileştiren ek gürültünün olasılık yoğunluk fonksiyonu da bulunmuştur (Balkan ve Gezici, 2010¹). Kuramsal olarak bu alt sınırı en aza indirgeyen ek gürültünün yapısı bulunmuş olsa da, bu gürültünün pratikte ortalama karesel hata başarımına etkisi üzerinde çalışılmamıştır. Bu çalışmadaki temel amaç, kestirilmek istenen parametrenin rasgele olduğu durumda, optimal ek gürültünün incelenmesi ve ortalama karesel hatayı nasıl etkilediğinin belirlenmesidir. Buradaki optimal ek gürültü, SCRAS'a göre elde edilmektedir. SCRAS'ın ölçüt olarak alınmasının sebebi, önsel olasılığa sahip bilinmeyen parametrelerin kestiriminde, SCRAS'ın ortalama karesel hatalar için alt sınır belirlemesi ve sonuçta verimli olan kestiricilerin de bu alt sınıra sonuçta olarak varmasıdır.

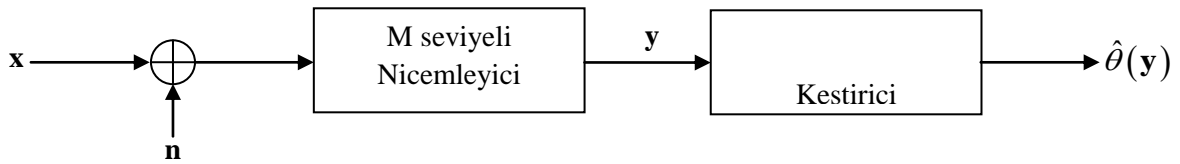
Balkan ve Gezici'nin çalışmasındaki gibi bu makaledeki SCRAS; nicemleyici fonksiyonu, ek gürültü olasılık yoğunluk fonksiyonu ve asıl (gürültü eklenmemiş) gözlemin olasılık yoğunluk fonksiyonu cinsinden tanımlanmıştır (Balkan ve Gezici, 2010¹). Ayrıca nicemleyici,

çoklu seviyeli ve eşikleri her değeri alabilecek şekilde modellenmiştir. çalışmasındaki modelden farklı olarak, gözlemlerin birbirinden bağımsız olduğu varsayılmıştır (Balkan ve Gezici, 2010¹).

Makalenin ikinci bölümünde problem tanımı sunulmaktadır. Ardından üçüncü bölümde, SCRAS'ı en büyüten optimal ek gürültünün sabit bir sinyal ile ifade edilebildiği açıklanmaktadır. Bu sonuç, nicemleyicinin eşik değerlerinin kaydırılmasına denk geldiğinden ve farklı gürültü değerleri arasında rasgeleleştirme gerektirmediğinden, pratik uygulamalar için avantajlıdır. Bu bölümdeki kuramsal sonuçlar ile ilgili olarak, bir sonraki bölümde ek gürültünün SCRAS'a katkı sağladığı bir örnek verilmektedir. Sonrasında optimal ek gürültünün sağladığı kestirim başarımı artışı, Gauss ve bir biçimli kıpırtılandırma sinyallerininki ile karşılaştırılarak, kuramsal sonuçlar pratik bir örnek ile desteklenmektedir. Son olarak, SCRAS cinsinden kestirim başarımını artıran optimal ek gürültünün, aynı zamanda en büyük sonsal olasılık kestiricilerin ortalama karesel hata performansını da arttırdığı gösterilmektedir.

2. PROBLEM TANIMI

Herhangi bir kestirici ile kestirilmek istenen θ rasgele parametresini içeren nicemlenmiş \mathbf{x} gözlemlerinin girdi olarak alındığı bir sistem ele alınmaktadır. $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_L]$ olarak ifade edilen \mathbf{x} vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonu $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; \theta)$ ve nicemleyici $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu ile gösterilmektedir. Bu sistemde θ 'nın kestirim performansının artırılması için gözlemlere $\mathbf{n} = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_L]$ vektörü ve $p_{\mathbf{N}}(\mathbf{n})$ olasılık dağılım fonksiyonu ile gösterilen gürültü eklenmektedir. Bu şekilde θ 'nın kestiriminde $\mathbf{x} + \mathbf{n}$ 'nin nicemlenmiş hali kullanılmaktadır. Şekil 1'deki gibi gösterilen bu sistemde ele alınan problem, kestirim performansını en iyileştiren gürültünün olasılık yoğunluk fonksiyonunun bulunmasıdır.



Şekil 1. Sistem modeli

$\mathbf{x} + \mathbf{n}$ 'nin M farklı seviyede nicemlendiği farzedilmektedir. Nicemleyiciden çıkan gürültülü gözlem $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_L]$ olarak gösterilmekte ve $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{n})$ olarak tanımlanmaktadır. Nicemleyici seviyeleri $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1}$ eşikleri ile belirlenmiştir. Nicemleyicinin girdisi ile çıktısı arasındaki ilişki; $l = 1, 2, \dots, L$ için $i = 0, 1, \dots, M-1$, $\tau_0 \rightarrow -\infty$ ve $\tau_M \rightarrow \infty$ olmak üzere

$$y_l = i, \quad \tau_i < x_l + n_l \leq \tau_{i+1} \quad (1)$$

ile gösterilmektedir. Bu problemde \mathbf{x} ve \mathbf{n} 'nin bileşenlerinin birbirinden bağımsız olduğu ama özdeş dağılımlı olmayabileceği varsayılmaktadır. Bu durumda \mathbf{y} 'nin bileşenlerinin birbirinden bağımsız olduğu düşünülebilir.

$p_{Y_l}(y_l; \theta)$, verilen bir θ değerine göre çıktının l 'ninci bileşeninin olasılık kütle fonksiyonunu ifade ettiğinde, Eşitlik 1 kullanılarak $i = 0, 1, K, M - 1$ için

$$\begin{aligned} p_{Y_l}(y_l; \theta) &= P(\tau_i < X_l + N_l \leq \tau_{i+1}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau_i - n < X_l \leq \tau_{i+1} - n) p_{N_l}(n) dn \\ &= E\{F_{X_l}(\tau_{i+1} - N_l; \theta) - F_{X_l}(\tau_i - N_l; \theta)\} \end{aligned} \quad (2)$$

sonucu elde edilir. Buradaki beklenti (*expectation*) işlemi N_l üzerindedir ve $F_{X_l}(\cdot; \theta)$, orijinal gözlemin l 'ninci bileşeni olan X_l 'nin olasılık dağılım fonksiyonudur.

Bu çalışmada sistemin kestirim başarısını en iyileştirmek için kullanılacak ölçüt SCRAS (ya da Bayes'sel)'dir. Diğer bir ifadeyle buradaki amaç, SCRAS'ı en büyüten optimal gürültü dağılımının bulunmasıdır. SCRAS herhangi bir yanlı veya yansız $\hat{\theta}$ kestiricisinin ortalama karesel hatasına alt sınır teşkil etmekte ve

$$\text{MSE}\{\hat{\theta}\} = E\left\{\left(\hat{\theta}(\mathbf{y}) - \theta\right)^2\right\} \geq (J_D + J_P)^{-1} \quad (3)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada J_D veriden (gözlemden), J_P ise θ hakkındaki önsel bilgiden gelen Fisher bilgisini simgelemekte ve $w(\theta)$ θ 'nin önsel dağılımı olmak üzere

$$\begin{aligned} J_D &= E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p_Y(\mathbf{y}; \theta)\right)^2\right\} \\ J_P &= E\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log w(\theta)\right)^2\right\} \end{aligned} \quad (4)$$

ifadeleriyle gösterilmektedir. Bu ifadelerdeki beklenti işlemleri hem \mathbf{Y} hem de θ üzerindedir. Y_1, Y_2, K, Y_L rasgele değişkenleri birbirlerinden bağımsızlarsa, gözlemden gelen Fisher bilgisi

$$J_D = \sum_{l=1}^L J_D^{Y_l} = \sum_{l=1}^L E \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p_{Y_l}(y_l; \theta) \right)^2 \right\} \quad (5)$$

olarak ifade edilebilmektedir. \mathbf{Y} 'nin bileşenleri aynı zamanda özdeşçe dağılmışlarsa Eşitlik 5, $J_D = L J_D^{Y_l}$ halinde yazılabilir. Eşitlik 3, Eşitlik 4 ve Eşitlik 5 kullanılarak, optimal gürültünün olasılık yoğunluk fonksiyonu Fisher bilgisi cinsinden aşağıdaki problemle ifade edilebilir.

$$p_N^{\text{opt}}(\mathbf{n}) = \arg \max_{p_N(\cdot)} (J_D + J_P)$$

$$p_N^{\text{opt}}(\mathbf{n}) = \arg \max_{p_N(\cdot)} \sum_{l=1}^L E \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log p_{Y_l}(y_l; \theta) \right)^2 \right\} \quad (6)$$

Eşitlik 6'daki ifadede J_P , ek gürültüden bağımsız olduğu için yer almamaktadır. Eşitlikteki türevin ve beklentinin alınması ile amaç fonksiyonu

$$p_N^{\text{opt}}(\mathbf{n}) = \arg \max_{p_N(\cdot)} \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta) \sum_{l=1}^L \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{p_{Y_l}(i; \theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} p_{Y_l}(i; \theta) \right)^2 d\theta \quad (7)$$

halinde yazılır. Eşitlik 7'deki fonksiyonun yapısından ötürü optimizasyon problemini $l=1, 2, K, L$ için ayrı ayrı çözmek mümkündür. Başka bir deyişle optimal gürültünün l 'ninci bileşeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$p_{N_l}^{\text{opt}}(\mathbf{n}) = \arg \max_{p_{N_l}(\cdot)} \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{p_{Y_l}(i; \theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} p_{Y_l}(i; \theta) \right)^2 d\theta. \quad (8)$$

Eğer Y_1, Y_2, K, Y_L rasgele değişkenleri bağımsız ve özdeşçe dağılmışlarsa, yani $l=1, 2, K, L$ için $p_{Y_l}(i; \theta) = p_Y(i; \theta)$ eşitliği geçerli ise, Eşitlik 8'de geçen optimizasyon problemleri özdeştir ve orijinal gözlem \mathbf{x} 'in bütün bileşenlerine eşit miktarda gürültü eklenmesi gerekir.

3. OPTİMAL GÜRÜLTÜNÜN OLASILIK DAĞILIMI

SCRAS'ı optimize eden gürültünün istatistiksel özelliğini incelemek amacıyla

$$H_{l,i}^{\theta}(n) @ F_{X_l}(\tau_{i+1} - n; \theta) - F_{X_l}(\tau_i - n; \theta) \quad (9)$$

$$G_{l,i}^{\theta}(n) @ \frac{\partial}{\partial \theta} (F_{X_l}(\tau_{i+1} - n; \theta) - F_{X_l}(\tau_i - n; \theta)) \quad (10)$$

fonksiyonları tanımlansın. Eşitlik 2'den anlaşılacağı üzere, $H_{l,i}^{\theta}(n)$ için $0 \leq H_{l,i}^{\theta}(n) \leq 1, \forall n$ ve $\sum_{i=0}^{M-1} H_{l,i}^{\theta}(n) = 1$ geçerlidir. Eşitlik 9 ve Eşitlik 10'daki tanımlara göre, Eşitlik 2'deki olasılık kütle fonksiyonu ile bunun θ 'ya göre türevi, $p_{Y_l}(i; \theta) = E\{H_{l,i}^{\theta}(n)\}$ ve $\partial p_{Y_l}(i; \theta) / \partial \theta = E\{G_{l,i}^{\theta}(n)\}$ olarak ifade edilebilir. Bu durumda Eşitlik 8'deki optimizasyon problemi

$$p_{N_l}^{\text{opt}}(\mathbf{n}) = \arg \max_{p_{N_l}(\cdot)} \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{E\{G_{l,i}^{\theta}(n)\}^2}{E\{H_{l,i}^{\theta}(n)\}} d\theta \quad (11)$$

haline gelir. Eşitlik 11'deki problemin çözümü için ilk önce aşağıdaki önsav sunulmaktadır (Balkan ve Gezici., 2010²).

Önsav 1: Eşitlik 9 ve Eşitlik 10'da tanımlanmış gerçek değerli fonksiyonlar, bütün θ 'lar ve N_l 'nin muhtemel her olasılık yoğunluk fonksiyonu için

$$\sum_{i=0}^{M-1} \frac{E\{G_{l,i}^{\theta}(N_l)\}^2}{E\{H_{l,i}^{\theta}(N_l)\}} \leq \max_n \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(G_{l,i}^{\theta}(N_l))^2}{H_{l,i}^{\theta}(N_l)} \quad (12)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: $\mathbf{Z} = [Z_1 \ Z_2]$ için $f(\mathbf{Z}) = Z_1^2 / Z_2$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. $f(\mathbf{Z})$ 'nin Hessian matrisi

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} 2/Z_2 & -2Z_1/Z_2^2 \\ -2Z_1/Z_2^2 & 2Z_1^2/Z_2^3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

olarak hesaplanır. $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T$ ve $Z_2 \geq 0$ için $\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{H}_f \boldsymbol{\alpha} = 2(\alpha_1 Z_2 - \alpha_2 Z_1)^2 / Z_2^3 \geq 0$ eşitsizliği geçerli olduğundan $f(\mathbf{Z})$ 'nin dış bükey olduğu anlaşılır. Bu nedenle aşağıdaki Jensen eşitsizliği geçerlidir.

$$\frac{(E\{Z_1\})^2}{E\{Z_2\}} \leq E\left\{\frac{Z_1^2}{Z_2}\right\} \quad (14)$$

$Z_1 @ G_{l,i}^\theta(N_l)$ $Z_2 @ H_{l,i}^\theta(N_l)$ tanımları yapılsın. Eşitlik 9'daki tanıma göre $H_{l,i}^\theta(N_l) \geq 0$, her N_l, l, i , ve θ için geçerli olduğundan, Eşitlik 14'deki eşitsizlik her $p_{N_l}(\cdot)$, θ ve i için

$$\frac{\left(\mathbb{E}\{G_{l,i}^\theta(N_l)\}\right)^2}{\mathbb{E}\{H_{l,i}^\theta(N_l)\}} \leq \mathbb{E}\left\{\frac{\left(G_{l,i}^\theta(N_l)\right)^2}{H_{l,i}^\theta(N_l)}\right\} \quad (15)$$

halini alır. Bu durumda bütün i 'ler için Eşitlik 15'deki eşitsizlik geçerli olduğundan dolayı, $p_{N_l}(\cdot)$ ve θ için

$$\sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(\mathbb{E}\{G_{l,i}^\theta(N_l)\}\right)^2}{\mathbb{E}\{H_{l,i}^\theta(N_l)\}} \leq \mathbb{E}\left\{\sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(G_{l,i}^\theta(N_l)\right)^2}{H_{l,i}^\theta(N_l)}\right\} \quad (16)$$

sonucu çıkar. Eşitlik 16'daki eşitsizliğin sağ tarafı $\max_n \left\{\sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(G_{l,i}^\theta(N_l)\right)^2}{H_{l,i}^\theta(n)}\right\}$ ifadesinden hiçbir zaman daha büyük olamayacağından ötürü önsavdaki sonuca ulaşılır.

Önsav 1, $p_{N_l}(n)$ için $\sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(\mathbb{E}\{G_{l,i}^\theta(N_l)\}\right)^2}{\mathbb{E}\{H_{l,i}^\theta(N_l)\}}$ ile gösterilen Fisher bilgisinin, her gürültü

değerine göre $\sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(G_{l,i}^\theta(N_l)\right)^2}{H_{l,i}^\theta(N_l)}$ ifadesinin en büyük değerini hiçbir zaman aşamayacağını

göstermektedir. Başka bir ifadeyle, farklı gürültü değerleri arasında rasgeleleştirme, Eşitlik 11'deki fonksiyonun değerini arttıramaz. Bu sonuç ile aşağıdaki önermeye varılabilir (Balkan ve Gezici, 2010¹).

Önerme 1: Eşitlik 11'deki ifadede geçen optimal gürültünün olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$n_l^{\text{opt}} = \arg \max_n \int w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(G_{l,i}^\theta(N_l)\right)^2}{H_{l,i}^\theta(N_l)} d\theta \quad (17)$$

için $p_{N_l}^{\text{opt}}(n) = \delta(n - n_l^{\text{opt}})$ ile ifade edilebilir.

Kanıt: Kanıt için Balkan ve Gezici'nin çalışmasındakine benzer bir yaklaşım kullanılmaktadır (Balkan ve Gezici, 2010¹). Her $p_{N_l}^{\text{opt}}(n)$ için geçerli olan Eşitlik 16'daki eşitsizlik aynı zamanda her θ için geçerli olduğundan, $p_{N_l}(n)$ için aşağıdaki eşitsizlik çıkarılabilmektedir.

$$\int w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(\mathbb{E} \{ G_{l,i}^\theta(N_l) \} \right)^2}{\mathbb{E} \{ H_{l,i}^\theta(N_l) \}} d\theta \leq \mathbb{E} \left\{ \int w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(G_{l,i}^\theta(N_l) \right)^2}{H_{l,i}^\theta(N_l)} d\theta \right\} \quad (18)$$

Bu yüzden Eşitlik 11'deki fonksiyonun en büyük değeri

$$\max_{p_{N_l}(\cdot)} \int w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(\mathbb{E} \{ G_{l,i}^\theta(N_l) \} \right)^2}{\mathbb{E} \{ H_{l,i}^\theta(N_l) \}} d\theta \leq \max_{p_{N_l}(\cdot)} \mathbb{E} \left\{ \int w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(G_{l,i}^\theta(N_l) \right)^2}{H_{l,i}^\theta(N_l)} d\theta \right\} \quad (19)$$

olarak üstten sınırlıdır. Eşitlik 19'daki üst sınır, en yüksek değerine

$$\max_n \int w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(G_{l,i}^\theta(n) \right)^2}{H_{l,i}^\theta(n)} d\theta$$

ifadesine, ulaştığından aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\max_{p_{N_l}(\cdot)} \int w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(\mathbb{E} \{ G_{l,i}^\theta(n) \} \right)^2}{\mathbb{E} \{ H_{l,i}^\theta(n) \}} d\theta \leq \max_n \int w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(G_{l,i}^\theta(n) \right)^2}{H_{l,i}^\theta(n)} d\theta = \int w(\theta) \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\left(G_{l,i}^\theta(n_l^{\text{opt}}) \right)^2}{H_{l,i}^\theta(n_l^{\text{opt}})} d\theta \quad (20)$$

Burada n_l^{opt} , Eşitlik 17'de tanımlandığı gibidir. Eşitlik 20'de verilen eşitsizlikteki üst sınır, $p_{N_l}(n) = \delta(n - n_l^{\text{opt}})$ iken ulaşıldığından dolayı önermedeki sonuca varılır.

Önerme 1, ek gürültünün muhtemel bütün olasılık yoğunluk fonksiyonları içinde tek kütle noktasıyla gösterilen bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun, yani sabit bir gürültünün, SCRAS'ı en küçülttüğünü belirtmektedir. Bu yüzden gözleme optimal gürültüyü eklemek, nicemleyicinin eşik değerlerini kaydırmak ile denktir. Bu da farklı gürültü değerleri arasında rasgeleleştirme gerektirmediğinden basit bir işlemdir.

4. OPTİMAL EK GÜRÜLTÜNÜN KIPIRTILANDIRMA İLE KARŞILAŞTIRILMASI

Bir önceki bölümde sunulan kuramsal sonuçlar için bir sayısal örnek vermek üzere

$$\gamma(x; \theta, \sigma^2) @ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

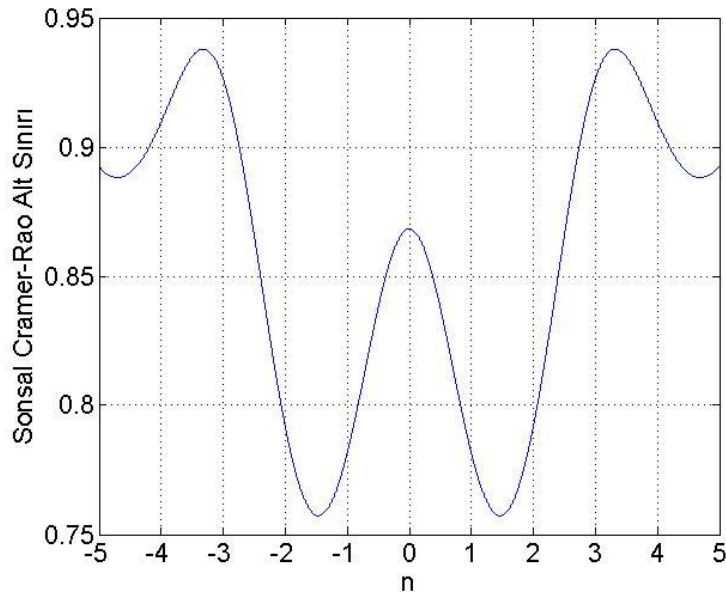
fonksiyonu tanımlanıp, Şekil 1'deki x gözleminin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p_X(x; \theta) = 0.5\gamma(x; -\theta, \sigma^2) + 0.5\gamma(x; \theta, \sigma^2)$$

olarak alınsın. Bu durumda $i = 0, 1, K, M - 1$ için sadece tek gözlem bulunduğundan, Eşitlik 9'daki $H_{i,i}^\theta(n)$ yerine $H_i^\theta(n) = F_X(\tau_{i+1} - n; \theta) - F_X(\tau_i - n; \theta)$ kullanılabilir. Burada $F_X(x; \theta)$, X 'in olasılık dağılım fonksiyonu olup

$$F_X(\tau_{i+1} - n; \theta) = 0.5Q\left(\frac{-x + \theta}{\sigma}\right) + 0.5Q\left(\frac{-x - \theta}{\sigma}\right)$$

olarak tanımlıdır ve $Q(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-0.5t^2} dt$ Q-fonksiyonunu ifade etmektedir. Ayrıca $H_i^\theta(n)$ 'nin θ 'ya göre türevi $G_i^\theta(n)$ 'yi vermektedir. Bunlara ek olarak, bu örnekte kullanılan 4 seviyeli nicemleyici $\tau_1 = -3$, $\tau_2 = 0$, $\tau_3 = 3$ eşik değerlerine sahiptir ve θ 'nın olasılık dağılımı $w(\theta) = \lambda \exp(-\lambda\theta)$ olarak varsayılmıştır.

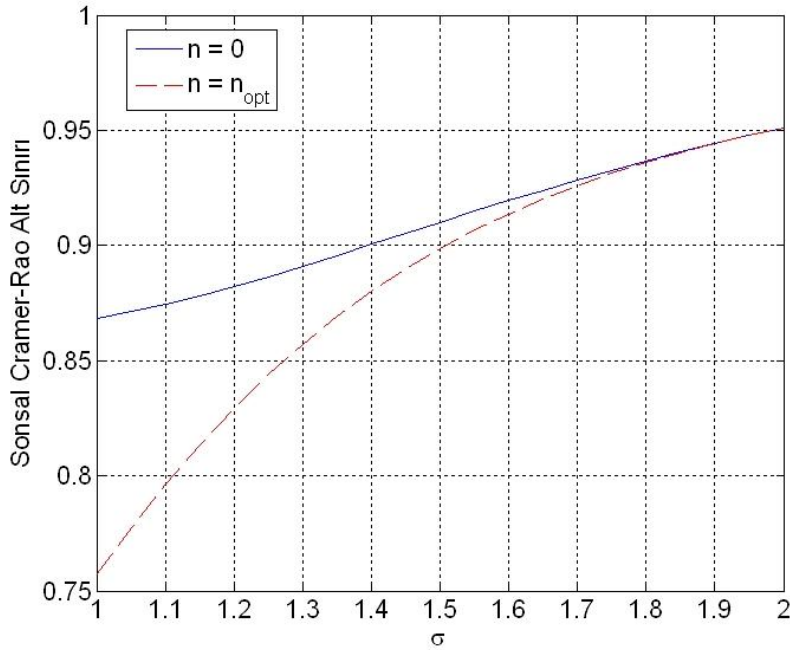


Şekil 2. n'ye göre SCRAS değerleri

Önerme 1'e göre optimal gürültü değerlerinin sabit bir değer ile ifade edilebilmesi sayesinde, $\theta \in [0, \infty)$, $\sigma = 1$ ve $\lambda = 1$ olduğu durumlarda, sabit ek gürültü değerlerine karşılık gelen SCRAS değerleri Şekil 2'de gösterilmiştir. Bu örnekte 0.7573 değerini alan en düşük SCRAS $n = \pm 1.463$ iken görülmektedir. Bu da ek gürültünün kestirim başarımını SCRAS

cinsinden arttırdığını göstermektedir. Ek gürültünün olmadığı durumda 0.8683 olan SCRAS optimal ek gürültü sayesinde 0.7573'e inmiştir.

Bu problemde SCRAS'a göre optimal olduğu bulunan tek kütle noktalı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ek gürültü dışında, doğrusal olmayan sistemlerde ek gürültünün faydaları, sisteme eklenen Gauss ve bir biçimli kısırtılama (*dithering*) sinyalleri ile de görülmüştür (Papadopoulos vd., 2001; Wannamaker vd., 2000). Bu bölümde, kuramsal olarak bulunan optimal ek gürültünün kestirim isabetine katkısı, Gauss ve bir biçimli kısırtılama sinyallerinin katkılarıyla karşılaştırılmaktadır. Bu karşılaştırma için sıfır ortalamalı ve değişintisi σ_N olan Gauss kısırtılama sinyali ile $[-\varepsilon, \varepsilon]$ aralığında tanımlı bir biçimli kısırtılama sinyalleri kullanılmaktadır.



Şekil 3. σ 'ya göre $n=0$ ve n_{opt} için SCRAS'ın karşılaştırması

SCRAS'a göre başarımlı karşılaştırılmasında kullanılmak üzere, ilk önce en iyi başarımlı sağlayan Gauss kısırtılama sinyalinin değişintisi hesaplanmıştır. Bu hesaplamada, gözlemin olasılık yoğunluk fonksiyonunun bileşenleri aynı değişintiye sahip Gauss karışımı ve gözlemin ek gürültüden bağımsız olmasından faydalanılmıştır. Birbirinden bağımsız iki Gauss dağılımlı rasgele değişkenin toplamından ortaya çıkan Gauss dağılımlı yeni rasgele değişkenin değişintisi, her iki rasgele değişkenin değişintilerinin toplamı olduğundan, bu örnekte X , N ve $X+N$ 'nin standart sapmaları arasındaki ilişki

$$\sigma_{X+N} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_N^2} \quad (21)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu durumda $X+N$ 'nin optimal standart sapması $\sigma_{X+N}^{\text{opt}}$ sayısal olarak hesaplanmak suretiyle optimal ek gürültünün standart sapması

$$\sigma_N^{\text{opt}} = \sqrt{(\sigma_{X+N}^{\text{opt}})^2 - \sigma_X^2} \quad (22)$$

ifadesiyle bulunulabilmektedir. Karşılaştırmayı ifade eden Çizelge 1'in ilk satırında σ_N^{opt} , optimal değişintili Gauss kısırtılardırma sinyalinin ifade etmektedir. Onun dışında yer alan $\varepsilon=1$, $\varepsilon=0.5$, $\varepsilon=0.25$ ve $\varepsilon=0$, burada verilen ε değerlerini almış bir biçimli kısırtılardırma sinyallerini temsil etmekte ve n^{opt} ise optimal sabit ek gürültüyü ifade etmektedir. Nicemleme öncesinde eklenen bu sinyaller ile elde edilen SCRAS değerleri Çizelge 1'in ikinci satırında yer almaktadır. Bu çizelgeye bakıldığında, optimal sabit ek gürültünün en iyi kestirim başarımını sağladığı görülmektedir. Optimal Gauss kısırtılardırma sinyali en iyi SCRAS değeri olan 0.8683'ü $\sigma_N^{\text{opt}}=0$ durumunda verdiği için, bu örneğe göre ek Gauss kısırtılardırma sinyali hiçbir şekilde kestirim performansına SCRAS cinsinden katkı sağlamamaktadır. $\sigma_X=1$ olarak alındığı göz önüne alınarak X 'in değişintisini artırmanın X 'e σ_N^2 değişintili Gauss kısırtılardırma sinyali eklemekle denk olmasından dolayı bu sonuç Şekil 3'den de çıkarılabilmektedir. Aynı şekilde, bir biçimli kısırtılardırma sinyalinin eklenmesiyle elde edilen en iyi SCRAS değerine $\varepsilon=0$ iken ulaşıldığından bir biçimli kısırtılardırma sinyalinin kestirim başarımını arttırdığı söylenemez. $\varepsilon=0.25$, $\varepsilon=0.5$ ve $\varepsilon=1$ iken elde edilen SCRAS değerlerinin giderek artması bu durumu desteklemektedir. Sonuçta bu çizelgeye göre kuramsal olarak en iyi ek gürültünün sabit sinyal olduğu, bu pratik örnekte Gauss ve bir biçimli kısırtılardırma sinyallerinin sabit ek gürültü ile karşılaştırılması ile görülmektedir.

Çizelge 1. Optimal ek gürültü ile Gauss ve bir biçimli kısırtılardırma sinyallerinin SCRAS başarımını bakımından karşılaştırılması

	σ_N^{opt}	$\varepsilon=1$	$\varepsilon=0.5$	$\varepsilon=0.25$	$\varepsilon=0$	n^{opt}
SCRAS	0.8683	0.8762	0.8705	0.8689	0.8683	0.7573

5. EK GÜRÜLTÜNÜN EN BÜYÜK SONSAK OLASILIK KESTİRİCİSİNE ETKİLERİ

Bu bölümde, pratik durumlarda kestirim başarımını değerlendirmek amacıyla, SCRAS kriterine göre en iyilenen ek gürültünün kestiricilerin ortalama karesel hatalarına etkileri incelenmektedir. Ortalama karesel hata başarımını değerlendirmek amacıyla, sonuçurda verimli (*asymptotically efficient*) olan en büyük sonsal olasılık kestiricisi ele alınmaktadır. En büyük sonsal olasılık kestiricisinin sonuçurda verimlilik özelliği

$$\lim_{l \rightarrow \infty} E \left\{ \left(\hat{\theta}_{\text{MAP}}(\mathbf{y}) - \theta \right)^2 \right\} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(J_D^Y + J_P \right) = \lim_{l \rightarrow \infty} J_D^Y \quad (23)$$

ifadesiyle gösterilebilir. Eşitlik 23'de $\hat{\theta}_{\text{MAP}}(\mathbf{y})$ en büyük sonsal olasılık kestiricisini, J_D^Y ile J_P sırası ile 2. bölümde tanıtıldığı üzere gözlemlerden gelen Fisher bilgisi ile kestirilecek parametrenin önsel olasılık dağılımından gelen Fisher bilgisini ve l gözlem sayısını belirtmektedir. Bu eşitlikte ifade edilen, gözlem sayısının sonsuza kadar arttığında, ortalama karesel hatanın SCRAS'a ulaşmasıdır. Bu yüzden en büyük sonsal olasılık kestiricisi 'sonuşurda verimli' bir kestiricidir. Ayrıca, gözlem sayısı arttıkça, kestirilecek parametrenin önsel olasılık dağılımından gelen Fisher bilgisinin önemi kalmamaktadır ve sadece J_D^Y terimi SCRAS değerini etkiler hale gelmektedir. Bu durumda gözlem sayısı arttıkça, en büyük sonsal olasılık kestiricisinin ortalama karesel hatanın SCRAS değerine yaklaşması beklenmektedir.

En büyük sonsal olasılık kestiricisi

$$\hat{\theta}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\theta} p_Y(\mathbf{y}; \theta) \quad (24)$$

ifadesiyle gösterilmektedir. Bu ifade, \mathbf{y} 'nin bileşenlerinin birbirinden bağımsız ve özdeşçe dağılmış olduğu durumda

$$\hat{\theta}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\theta} \prod_{l=1}^L p_Y(y; \theta) \quad (25)$$

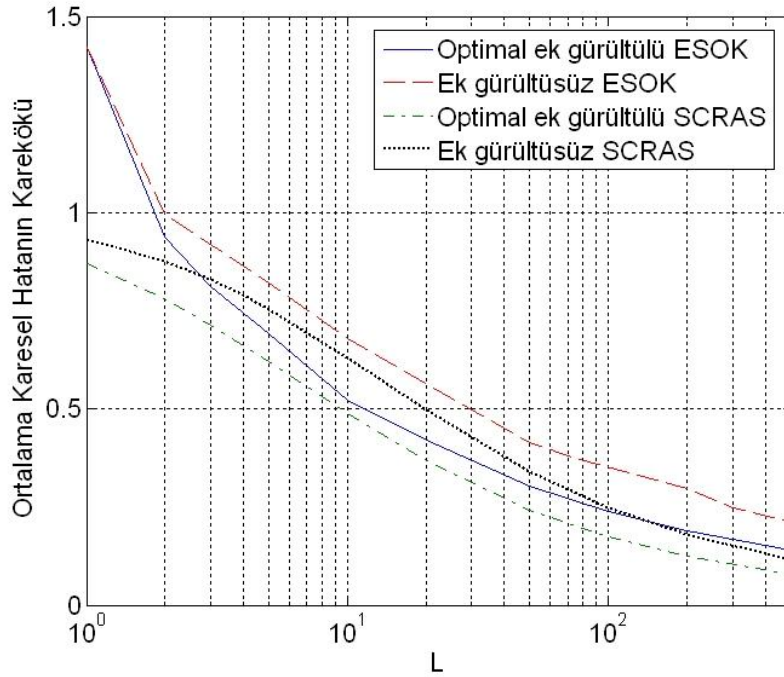
haline gelmektedir. Nicemlenmiş gözlemlerin kullanıldığı en büyük sonsal olasılık kestiricisinde geçen Y 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$H_i^{\theta}(n) = F_X(\tau_{i+1} - n; \theta) - F_X(\tau_i - n; \theta) \quad (26)$$

olarak gösterilmektedir.

SCRAS en iyileştirmesinin ortalama karesel hata başarımına etkisini incelemek amacıyla, bir önceki bölümdeki parametrik değerlerin kullanıldığı Monte Carlo benzetimiyle en büyük sonsal olasılık kestiricisinin gözlem sayısına göre ortalama karesel hata değerleri hesaplanıp, SCRAS ile karşılaştırılmıştır. İlk önce $\lambda = 1$ için $w(\theta) = \lambda \exp(-\lambda\theta)$ dağılımına göre 100 tane θ oluşturulmuştur. Ardından her θ için L sayıda nicemlenmiş gürültülü gözlem oluşturulmuş ve ortalama karesel hata hesaplanmıştır. Daha sağlıklı sonuç elde etmek amacıyla bu işlem 1000 defa tekrarlanmış ve gürültülü ve gürültüsüz durumlarda L sayıda Y için ortalama karesel hata ile SCRAS değerlerinin karşılaştırıldığı Şekil 4'teki grafik ortaya çıkmıştır. Bu grafikten beklenildiği üzere, SCRAS değerleri ortalama karesel hata değerlerinin altındadır ve

gözlem sayısının yüksek olduğu durumda SCRAS ile ortalama karesel hata değerlerinin birbirlerine yakın olduğu gözlemlenmektedir. Grafikte aynı zamanda, optimal gürültünün eklendiği durumda SCRAS değerlerinin dışında ortalama karesel hata değerlerinin de gürültüsüz duruma göre daha düşük olduğu görülmektedir. Kısacası, nicemlenmeden önce gözlemlere gürültü eklemek, kestirim isabetini sadece SCRAS cinsinden değil, aynı zamanda ortalama karesel hata cinsinden de arttırmıştır. Bu da, SCRAS optimizasyonunun ortalama karesel hata optimizasyonuna iyi bir alternatif olduğunu gösterir.



Şekil 4. Ek gürültüsüz ve optimal ek gürültülü durumlarda en büyük sonsal olasılık kestiricisi performansının SCRAS değerleri ile karşılaştırılması

6. SONUÇ

Bu makalede, nicemlenmiş gözlemler kullanılarak yapılan rasgele parametre kestiriminde en yüksek başarıyı sağlayan ek gürültünün sabit bir sinyal olduğu sonucu incelenmiştir. Bu sonuç, optimal sabit sinyalin Gauss ve bir biçimli kısıpıtlandırma sinyalleri ile karşılaştırıldığı sayısal bir örnek ile pratik olarak desteklenmiştir. Ayrıca kestirim başarımını SCRAS cinsinden en iyileştiren ek gürültünün aynı zamanda ortalama karesel hata başarımını da arttırdığı pratik bir örnekle gösterilmiştir. Optimal gürültünün sabit bir sinyal gösterilebilmesi sayesinde, aynı başarıyı en iyileştirmesi, nicemlenme aralıklarının sabit bir değer ile kaydırılmasıyla da gerçekleştirilebilmektedir. Bu şekilde, SCRAS'ı farklı gürültü bileşenlerini rasgeleştirmeye gerek kalmadan en küçültmek mümkündür. Bu da pratik uygulamalar için oldukça kullanışlı bir sonuçtur.

KAYNAKLAR

- Balkan G., Gezici S. (2010¹): “CRLB Based Optimal Noise Enhanced Parameter Estimation Using Quantized Observations”, IEEE Signal Processing Letters, Cilt. 17, No. 5, s. 477-480.
- Balkan G., Gezici S. (2010²): “Nicemlenmiş Ölçümlere Bağımsız Gürülü Eklerek Ortalama Fisher Bilgisi Optimizasyonu”, Antalya, Türkiye, IEEE 18.Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı.
- Bayram S., Gezici S. (2009): “Noise-enhanced M-ary Hypothesis Testing in the Minimax Framework”, in Proc. International Conference on Signal Processing and Commun. Systems, (Omaha, Nebraska), s. 31-36.
- Benzi R., Sutera A., Vulpiani A. (1981): “The Mechanism of Stochastic Resonance”, J. Phys. A: Math. General, Cilt 14, s. 453-457.
- Chapeau-Blondeau F. (2002): “Noise-aided Nonlinear Bayesian Estimation”, Physical Review E., Cilt 66, No. 3, s. 1-3.
- Chapeau-Blondeau F., Rousseau D. (2003): “Nonlinear Estimation from Quantized Signals: Quantizer Optimization and Stochastic Resonance”, Grenoble, France, Third International Symposium on Physics in Signal and Image Processing, s. 89-92.
- Chapeau-Blondeau F., Rousseau D. (2004): “Noise Enhanced Performance for an Optimal Bayesian Estimator”, IEEE Trans. Signal Processing, Cilt 54, No. 10, s. 1327-1334.
- Chen H., Varshney P. K., Michels J. H. (2008): “Noise Enhanced Parameter Estimation”, IEEE Trans. Signal Processing, Cilt 56, s. 5074-5081.
- Dabeer O., Karnik A. (2006): “Signal Parameter Estimation Using 1-bit Dithered Quantization”, IEEE Trans. Information Theory, Cilt 52, No. 5, s. 5389-5405.
- Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F. (1998): “Stochastic Resonance”, Rev. Mod. Phys., Cilt 70, s. 223-287.
- Marano S., Matta V., Willett P. (2006): “Quantizer Precision for Distributed Estimation in a Large Sensor Network”, IEEE Trans. Signal Processing, Cilt 54, No. 10, s. 4073-4078.
- Papadopoulos H. C., Wornell G. W., Oppenheim A. V. (2001): “Sequential Signal Encoding from Noisy Measurements Using Quantizers with Dynamic Bias Control”, IEEE Trans. Information Theory, Cilt. 47, No. 3, s. 978-1002.
- Patel A., Kosko B. (2009): “Optimal Noise Benefits in Neyman-Pearson and Inequality-Constrained Signal Detection”, IEEE Trans. Signal Processing, Cilt 57, s. 1655-1669.
- Riberio A., Giannakis G. B. (2006): “Bandwidth-constrained Distributed Estimation for Wireless Sensor Networks – Part II: Unknown Probability Density Function”, IEEE Trans. Signal Processing Cilt 54, No. 7, s. 2784-2796.
- Wannamaker R. A., Lipshitz S. P., Vanderkooy J. (2000): “A Theory of Nonsubtractive Dither”, IEEE Trans. Signal Processing, Cilt 48, s. 449-516.