DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
FEN ve MÜHENDİSLİK DERGİSİ
Cilt: 9 Sayı: 1 s. 1-7 Ocak 2007

HİDROLİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE TAŞIMA MATRİSİ YÖNTEMİ

(*METHOD OF TRANSFER MATRIX TO THE ANALYSIS OF HYDRAULIC PROBLEMS*)

Rasoul DANESHFARAZ*, Birol KAYA**

ÖZET/*ABSTRACT*

Literatürde mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılan bir çok yöntem mevcuttur. Bunlardan biri de yapı mekaniği problemlerinin çözümünde kullanılan taşıma matrisi yöntemidir. Bu bildiride taşıma matrisi yönteminin İnşaat Mühendisliğinin Hidrolikte tek boyutlu akım problemlerinin analizinde uygulanması için bir yaklaşım sunulmuştur. Sunulan yaklaşım ile hızlı ve pratik olarak yazılabilen basit bir program yardımıyla sonuca ulaşılmaktadır. Çalışmanın sonunda Literatürden alınan çeşitli sayısal örnekler burada sunulan yaklaşım ile çözülmüş ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sunulan yaklaşımın diğer yöntemlere yeter yakınsaklıkta olduğu görülmüştür.Bu çalışmada yalnızca iki tür hidrolik problemi için uygulaması anlatılan taşıma matrisi yöntemi bir çok mühendislik probleminin çözümünde iyi bir alternatif oluşturmaktadır.

There are numerous methods in literature for the solution the problems of civil engineering. One of these is the transfer matrix, which is used in solving the problems involved in mechanics. In this paper an approach has been presented for the application of the method of transfer matrix to the analysis of one dimensional flow problems hydraulics branch of civil engineering, and to the lateral dynamic analysis of multi-storey building, With the approach presented, and with the help of a method which can be written fast and practically, result can be obtained. At the end of this study, various examples taken from the literature have been solved using the approach presented here and the results of the literature have been obtained. It was seen that the approach presented here was in sufficient agremeent with other methods. Transfer matrix method of which only two applications were presented in this study forms a good alternative for the solution of numerous engineering problems.

ANAHTAR KELİMELER/*KEYWORDS*

Taşıma Matrisi, Hidrolik, Tek boyutlu akım
Transfer matrix, Hydraulics, One Dimensional Flow

*Bonab Azad Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bonab, İRAN
**Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İZMİR

1. GİRİŞ

Mekanik problemlerin çözümünde bir çok farklı yöntem kullanılmaktadır. Bunlardan başlıcaları sonlu elemanlar, sonlu farklar, sonlu hacim, sınır elemanları, diferansiyel quadrature yöntemi gibi yöntemlerdir. Özellikle integral aralığının parçalara bölünmesi gerektiği durumlarda taşıma matrisi ve kalnins yöntemleri çözüm için kullanılabilecek yöntemlerdendir.

Taşıma matrisi yöntemi ilk kez makine mühendisliğinde burulmalı titreşim problemlerinin çözümünde kullanılmıştır (Dimarogonas, 1996). Daha sonra yönteme ait uygulamalar Pestel ve Leckie tarafından bir kitapta toplanmıştır (Petsel ve Leckie, 1963) Yöntem Türkiye'de İnan tarafından tanıtılmış ve geliştirilmiştir (İnan, 1968). Yönteme yönelik olarak son yıllarda da farklı özellikler içeren bir dizi çalışma yapılmıştır. Nam ve Lee çalışmalarında Elastik zemine oturan silindirik tank problemini taşıma matrisi yöntemini kullanarak incelemişlerdir (Nam ve Lee, 2000). Lin analitik transfer matrisi yöntemi ile açık çatlağı olan basit mesnetli kiriş problemlerinin çözümünü incelemiştir (Lin, 2004). Roatolo ve Suroce çok çatlaklı çubuk elemanların açısal frekansların çözümü için taşıma matrisi yöntemini kullanmışlardır (Roatolo ve Suroce, 2004). Değişik özellikli kirişlerin eğilmeli, burulmalı titreşimlerinde, stabilite analizlerinde ve basit çerçevelerin analizinde taşıma matrisi yöntemini içeren bir dizi çalışma yapılmıştır.

Son yıllarda hidrolikte taşıma matrisi yönteminin kullanıldığı bazı çalışmalar yapılmıştır. Chaudry vd. boruların dinamiğine yönelik çalışmalarında taşıma matrisi kullanmışlardır (Chaudry, 1993). Shimada vd. boru şebekelerinde polinomiyal taşıma matrisiyle enterpolasyon hatalarını araştırmışlardır (Shimada vd., 2006). Litrico ve Fromion açık kanal akımlarının frekans modellenmesini Saint venant denklemlerini lineerleştirerek elde ettikleri taşıma matrisi yardımıyla gerçekleştirmişlerdir (Litrico ve Fromion, 2004). Benzer şekilde aynı yazarlar sulama kanallarının kontrolü tasarımının modellenmesini taşıma matrisi yaklaşımıyla yapmışlardır. Bunların dışında dalga problemlerinin çözümünde de taşıma matrisi yöntemi kullanilmiştir.

Bu çalışmada su mühendisliğinde boru hidroliğinde taşıma matrisi yönteminin kullanılması 2 örnekle anlatılmaktadır.

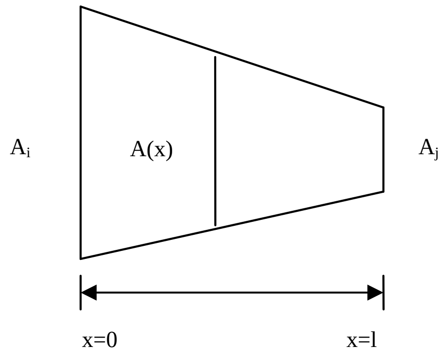
2. TAŞIMA MATRİSİ YÖNTEMİ

İlk kez 1856 da Holzer Van Dungen tarafından burulmalı kapalı kesitlerin dinamik analizi için kullanılan taşıma matrisi yöntemi ülkemizde Mustafa İnan tarafından Başlangıç Değerleri yöntemi adıyla tanıtılmıştır (Jun vd., 2004; İnan, 1968). Yöntemde başlangıçta bilinmeyenlerin bir kısmı seçilmekte daha sonra diğer bilinmeyenler başlangıçtaki bilinmeyenlere bağlı olarak ifade edilmekte ve sonuçta bilinmeyenler sınır şartları yardımıyla bulunmaktadır.Yöntem ile bazı problemlerin çözümünde diğer yöntemlere göre daha kısa sürede ve kolaylıkla sonuca gidilebilmektedir. Yöntemin dezavantajı ise stabilite sorunudur.

Aşağıda hidrolikte tek boyutlu akım problemlerinin çözümü için taşıma matrisi yönteminin uygulama aşamaları ve bir örnek verilmektedir.

3. TEK BOYUTLU AKIM PROBLEMİ

Şekil 1'de içinden yoğunluğu r olan bir sıvının akmakta olduğu bir boru gösterilmektedir.



Şekil 1. Değişken kesitli boru

Burada l: boru uzunluğunu, u :borudaki sıvı hızını göstermek üzere borunun her kesitinden geçen su miktarının aynı olması gerektiğinden c bir sabit olmak üzere

$$rAu = c \tag{1}$$

bağıntısı yazılabilmektedir. Borudaki sıvı viskozitesiz olduğu takdirde, sıvı hızı *u*, *f* potansiyel fonksiyon olmak üzere

$$u = df / dx \tag{2}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu ifadeyi Eşitlik 1'de yerine yazıp x'e göre türevini aldığımızda

$$d / dx\left[rA(df / dx)\right] = 0 \tag{3}$$

bağıntısı elde edilmekte ve boru içinden i kesitinden geçen akımın toplam kütlesi ise (Q_i)

$$Q_i = rA_i(df / dx) \tag{4}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Her eleman için A'nın sabit olduğu kabul edilerek, Eşitlik 3 ikinci mertebeden homojen adi diferansiyel denklem x e göre integre edildiğinde

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = C_2 \tag{5}$$

ve bir kez daha integre edilirse

$$f_i = C_2 x_i + C_1 \tag{6}$$

şeklinde potansiyel fonksiyonu elde edilebilmektedir. Eşitlik 5, Eşitlik 4'te yerine yazıldığında

$$Q_i = rA_i C_2 \tag{7}$$

bağıntısı elde edilmekte ve Eşitlik 6 ve Eşitlik 7'nin matris formu da

$$\begin{bmatrix} f_i \\ Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 0 & rA_i \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} f_i \\ Q_i \end{bmatrix} = \underline{Z}_i . \underline{C} \tag{9}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Borunun başlangıcında x=0 için Eşitlik 8 ve Eşitlik 9 matris bağıntılar

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & rA_0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \underline{Z}_0 . \underline{C} \tag{11}$$

şeklini almaktadırlar. Eşitlik 11'deki katsayılar vektörü C Eşitlik 9'da yerine yazılırsa i.boru parçası için taşıma matrisi ifadesi

$$\begin{bmatrix} f_i \\ Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i / rA_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

veya

$$\begin{bmatrix} f_i \\ Q_i \end{bmatrix} = \underline{Z}_i . \underline{Z}_0^{-1} . \begin{bmatrix} f_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada

$$T_i = \underline{Z}_i . \underline{Z}_0^{-1} \tag{14}$$

ifadesi i. boru parçasının taşıma matrisidir. Boru başlangıcı ile bitişi arasındaki ilişkiyi sağlayan eleman taşıma matrisinin elde edilmesi için $x=l_i$ yazılmalıdır. Böylece Eşitlik 13 ve Eşitlik 14

$$\begin{bmatrix} f_i \\ Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l_i / rA_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$T_i = \underline{Z}_i . \underline{Z}_0^{-1} \tag{16}$$

şeklini almaktadır. n adet boru parçası için Eşitlik 16 ardışık olarak yazılırsa

$$\begin{bmatrix} f_n \\ Q_n \end{bmatrix} = \underline{T}_n . \underline{T}_{n-1} ..... \underline{T}_{3.} \underline{T}_2 \underline{T}_1 \begin{bmatrix} f_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

bağıntısı elde edilmektedir. Buradaki

$$\underline{t} = \underline{T}_n . \underline{T}_{n-1} ..... \underline{T}_{3.} \underline{T}_2 \underline{T}_1 \tag{18}$$

ifadesi sistem taşıma matrisi olmaktadır.

Eşitlik 17'de sınır şartları yazılarak bilinmeyenler bulunabilmektedir. Daha sonra bu bilinmeyenler ve Eşitlik 15 bağıntı yardımıyla ara noktalardaki bilinmeyenler hesaplanabilmekdir.

İstenirse eleman taşıma matrisi yardımıyla sonlu elemanlar yöntemi için eleman matriside bulunabilmektedir. Bunun için Eşitlik 15 eleman taşıma matrisinde gerekli düzenlemeler yapılırsa sonlu elemanlar matrisi k

$$k = \frac{rA_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

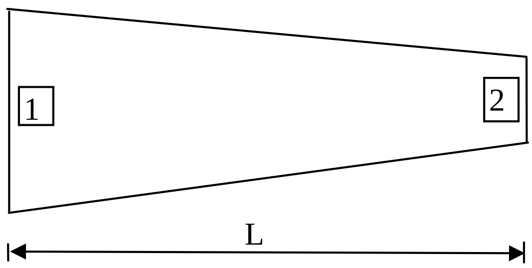
şeklinde bulunabilmektedir.

4. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde bu çalışma kapsamında sunulan taşıma matrisi yönteminin yakınsaklığını araştırmak üzere iki adet sayısal örnek çözülerek sonuçlar karşılaştırılmıştır. Örneklerin taşıma matrisi yöntemi ile çözümü sırasında Matlab hazır paket programı yardımıyla oluşturulmuş programlar kullanılmıştır.

4.1. Sayısal Örnek 1

Şekil 2’de gösterilen değişken enkesitli boruda enkesit değişimi $A(x) = A_0[2-(X/L)]$ ifadesi ile verilmektedir.



Şekil 2. Değişken enkesitli genel tek boyutlu sistem

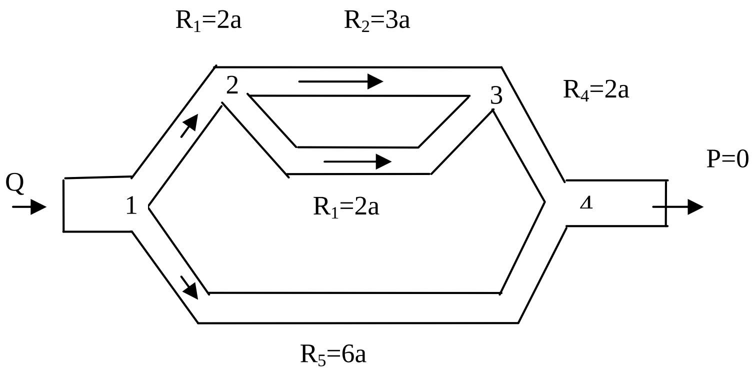
Kesik koni biçiminde olan bu sistemin sol ucundaki kesit alanı $2A_0$, hız u0 ve sağ ucundaki kesit alanı A_0 olmaktadır. 1 ve 2 noktalarındaki potansiyel değerleri için sonlu elemanlar yöntemiyle çözümden elde edilen sonçlarla bu çalışmada verilen taşıma matrisi yöntemi ile elde edilen sonuçlar Çizelge 1’de verilmektedir (Wasti, 1994).

Çizelge 1. Potansiyel değerlerin karşılaştırılması

Potansiyel değerleri	Taşıma matrisi	Sonlu elemanlar
f_1	$1{,}3714.u_0L$	$1{,}3714.u_0L$
f_2	$0{,}8000.u_0L$	$0{,}8000.u_0L$

4.2. Sayısal Örnek 2

Şekil 3’te görülen hidrolik şebekede akım laminer olarak dikkate alınmaktadır (Reedy, 1993). Şebeke 2 düğüm noktaya sahip tipik elemanlardan (sabit çaplı dairesel boru) oluşmaktadır. Sistemde 1.bilinmeyen düğüm noktalarındaki basınç (P) ve 2.dereceden bilinmeyen giren akım(Q)’dır. d_e boru çapını h_e uzunluğunu m viskoziteyi göstermektedir. Sistemde $a=1/R_e$ olup R_e değeri ise $128\,m\,.h/p\;d_e^4$ ‘dür. Şebeke bu çalışmada verilen taşıma matrisi yöntemi ile çözülmüş ve elde edilen basınç değerleri Çizelge 2’de verilmiştir. Reedy tarafından yapılan sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır (Reedy, 1993).



Şekil 3. Sayısal örnek 2'ye ait şebeke

Çizelge 2. Düğüm noktalarındaki basınç değerleri

Düğüm no	Taşıma matrisi	Sonlu elemanlar
1	$\frac{39}{14}Qa$	$\frac{39}{14}Qa$
2	$\frac{12}{7}Qa$	$\frac{12}{7}Qa$
3	$\frac{15}{14}Qa$	$\frac{15}{14}Qa$

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada hidrolik problemlerine yönelik olarak taşıma matrisi yönteminin kullanılması anlatılmaktadır. Çalışmada boru hidroliğine ait 2 örnek ele alınmış ve taşıma matrisleri yardımıyla ele edilen souçlar sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak verilmiştir. Sunulan yöntem oldukça kısa sürede sonuca ulaşmakta ve çözüm algoritmasının kurulması da diğer yöntemlere göre daha kolay olmaktadır. Çalışmanın sonunda sunulan örnekler, yöntemin yeterince yakınsak olduğu göstermektedir. Sonuç olarak burada bazı uygulama alanları tanıtılmış ve uygulanmış olan yöntemin uygulamaları matematik alanındaki gelişmelere bağlı olarak diğer mühendislik problemlerinin çözümünde de iyi bir alternatif oluşturacağına inanılmaktadır.

KAYNAKLAR

Chaudry M.H. (1993): "Applied Hydraulic Transient".

Dimarogonas A. (1996): "Vibration for Engineers", Second Edition, Prentice Hall.

Inan M. (1968): "The Method of Initial Values and Carry–Over Matrix in Elastomechanics", Metu Faculty of Engineering, Publication No: 20.

Jun L., Rongying S., Hongxing H., Xianding J. (2004): "Coupled Bending and Torsional Vibration of Axially Loaded Bernoulli-Euler Beams Including Warping Effects", Applied Acoustic, 65, pp. 153-170.

Lin H.P. (2004): "Direct and Inverse Methods on Free Vibration Analysis of Simply Supported Beams with Crack", Engineering Structures, 26, pp. 427-436.

Litrico X., Fromion V. (2004): "Frequency Modeling of Open Channel Flow", Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 130, No. 8, pp. 806-815.

Nam M.H., Lee K.H. (2000): “Unsymetrically Loaded Cylindrical Tank on Elastic Foundation”, ASCE Journal of Engineering Mechanics, December 2000, pp. 1257-1261.

Pestel E.C., Leckie F.A. (1963): “Matrix Methods in Elastomechanics”, Mc-Graw Hill.

Reddy J.N.,(1993): “An Introduction to The Finite Element Method”, McGraw-Hill.

Ruotolo R., Surace C. (2004): “Natural Frequencies of a bar with Multiple Cracks”, Journal of Sound and Vibration, 272, pp. 301-316.

Shimada M., Brown J., Leslie D., Vordy A. (2006): “A Time Line Interpolation Errors in Pipe Networks”, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 32, No. 3.

Wasti T.S. (1994): “Tek Boyutlu Akım Problemlerinin Sonlu Eleman Çözümü”,Yapı Mekaniği semineri, Dumlupınar Üniversitesi, Orta Doğu Teknik üniversitesi ve Osmangazi Üniversitesi, Kütahya, 1-13.