DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
FEN VE MÜHENDİSLİK DERGİSİ
Cilt: 8 Sayı: 2 s. 111-119 Mayıs 2006

TOPLANABİLEN KATSAYILI ADİ DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN ÖZDEĞERLERİ İÇİN KEYFİ MERTEBE ASİMPTOTİKLER

(ARBITRARY-ORDER ASYMPTOTİCS FOR THE EIGENVALUES OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS WITH SUMMABLE COEFFICIENTS)

Alp Arslan KIRAÇ*

ÖZET/*ABSTRACT*

Bu makalede, toplanabilen katsayılara sahip adi diferansiyel denklem ve t-periyodik sınır koşulları tarafından üretilen diferansiyel operatörün özdeğerleri için keyfi mertebeden asimptotik formüller elde edildi.

In this article, we obtain the asymptotic formulas of arbitrary order for the eigenvalues of the differential operator generated by ordinary differential equation with summable coefficients and t-periodic boundary conditions.

ANAHTAR KELİMELER/*KEYWORDS*

Self-adjoint olmayan diferansiyel operatörler, t-periyodik sınır koşulları, Asimptotik formüller

Non-self-adjoint differential operators, t-periodic boundary conditions, Asymptotic formulas

* Pamukkale Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak., Matematik Böl., Kınıklı, DENİZLİ

1. GİRİŞ

$L_2[0,1]$ uzayında, $p_s(x)$ $(s = 2,3,4)$ katsayıları $L_1[0,1]$ uzayından alınan kompleks değerli

$$\ell(y) = y^{(4)} + p_2(x)y'' + p_3(x)y' + p_4(x)y \tag{1}$$

diferansiyel denklemi ve $t \neq 0,\pi$ sabit bir kompleks parametre olmak üzere

$$y^{(\nu)}(1) = e^{it} y^{(\nu)}(0) \ , \qquad \nu = 0,1,2,3 \tag{2}$$

t -periodik sınır koşulları tarafından üretilen $L_t(p)$ diferansiyel operatörünü gözönüne alalım (Eastham, 1973).

Önceki klasik incelemelerden biliyoruz ki; eğer Eşitlik 1'deki $p_s(x)$ $(s = 2,3,4)$ katsayıları belirli bir mertebeden sürekli türevlere sahipse, $L_t(p)$ operatörünün k 'ıncı özdeğerleri için $O(k^{-1})$'den daha yüksek mertebeden asymptotik formüller elde edildi (Birkhoff, 1908; Tamarkin, 1927; Naimark, 1967). Yani, özdeğerler için elde edilen asimptotik formüller, Eşitlik 1'deki katsayıların sürekli türevlenebilmesine bağlıdır.

Bu makalede, Veliev'in metodu kullanılarak, $L_t(p)$ operatörünün k .özdeğerleri için keyfi mertebeden asimptotik formüller elde edildi. Burada, $p_s(x)$ $(s = 2,3,4)$ katsayıları için, $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde, yalnızca Lebesgue integrallenebilir olması kabul edilmiştir. Yani, Eşitlik 1'in katsayıları için herhangi bir sürekli türevlenebilme şartı yoktur.

2. ÖZDEĞERLER İÇİN KEYFİ MERTEBE ASİMPTOTİK FORMÜLLER

Eşitlik 2'de verilen sınır koşulları, $t \neq 0,\pi$ ve Eşitlik 1'in $n = 4$ çift mertebesi için, kısıtlı düzgün (strongly regular) olduğundan, $|k| \geq N$ ise $L_t(p)$ operatörü basit (simple) özdeğerlere sahiptir (Naimark, 1967). Ayrıca, bu özdeğerlerin $\{\lambda_k(t)\}$ dizisi, $|k| \geq N$ için Eşitlik 3'ü sağlar (Veliev, 1983; Veliev, 1986).

$$\lambda_k(t) = (2k\pi i + it)^4 + O(k^2) \tag{3}$$

Burada, $k \in Z$ ve N yeterince büyük pozitif bir tamsayıyı ifade eder: Yani; $N >> 1$. Dikkat edilirse, $\{(2k\pi i + it)^4 : k \in Z\}$ sistemi $\{e^{(2k\pi i + it)x} : k \in Z\}$ özvektörlerin sistemine karşılık gelen $L_t(0)$ operatörünün özdeğerleridir. $L_t(0)$ operatörü $y^{(4)}$ diferansiyel denklemi ve Eşitlik 2'deki sınır koşulları tarafından üretilmiştir. Eşitlik 3 kullanılarak, $t \neq 0,\pi$ ve $|k| \geq N$ için aşağıdaki eşitsizlikler kolayca gösterilebilir (Eşitlik 4a ve Eşitlik 4b).

$$\left|\lambda_k(t) - (2k\pi i + it)^4\right| < c_1 |k|^2 , \tag{4a}$$

$$\left|\lambda_k(t) - (2\pi i(k - k_1) + it)^4\right| > c_2 \big|\, |a - 2\pi i k_1| - |a| \,\big| \left(|a - 2\pi i k_1|^3 + |a|^3\right) \tag{4b}$$

Burada $k_1 \neq 0 \in Z$, $a = (2k\pi i + it)$ ve c_m , $m = 1,2,...,$ gerçek değeri önemli olmayan, N 'den bağımsız pozitif sabitlerdir. Bu eşitsizlikler gösteriyor ki; $L_t(p)$

operatörünün $\lambda_k(t)$ özdeğeri, $L_t(0)$'ın $(2k\pi i+it)^4$ özdeğerine yakın fakat, $L_t(0)$'ın diğer $(2\pi i(k-k_1)+it)^4$ özdeğerlerinden çok uzaktır.

Eşitlik 4a ve Eşitlik 4b'de yer alan eşitsizliklere ilave olarak, $|k|\geq N$ için $|k_1|>3|k|$ $\left(yani\ |k-k_1|>2|k|\right)$ alınacak olursa, Eşitlik 5 elde edilir.

$$\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4\right|>c_3\left|\,|a-2\pi ik_1|-|a|\,\right|\,|a-2\pi ik_1|^3>c_4\,|k_1|^4 \tag{5}$$

Eşitlik 4a ve Eşitlik 4b'de yer alan eşitsizliklerden faydalanarak, ilerideki hesaplamalarda sıkça kullanılan Eşitlik 5 ve Eşitlik 6'daki bağıntılar kolaylıkla elde edilebilir.

$$\sum_{k_1:k_1\neq 0}\frac{|2\pi i(k-k_1)+it\,|^2}{\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4\right|}=O\left(\frac{\ln|k|}{k}\right), \tag{6}$$

$$\sum_{k_1:k_1\neq 0}\frac{|k|^4}{\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4\right|^2}=O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{7}$$

Burada, $|k|\geq N$ ve $t\neq 0,\pi$'dir. Yeterince büyük k'lar için $\psi_{k,t}(x)$ birim özvektörlere karşılık gelen $L_t(p)$ operatörünün $\lambda_k(t)$ özdeğerlerine asimptotik formülleri, Eşitlik 8'deki bağıntı kullanılarak elde edilebilir.

$$\begin{aligned}&(\lambda_k(t)-(2k\pi i+it)^4)(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x})\\&=(p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x})\end{aligned} \tag{8}$$

Burada, $(.,.)$, $L_2[0,1]$ uzayındaki iç çarpımı ifade eder. Bu eşitlik

$$\psi^{(4)}_{k,t}(x)+p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x)=\lambda_k(t)\psi_{k,t}(x)$$

eşitliğinin her iki tarafının $e^{-(2k\pi i+it)x}$ ile çarpılmasıyla bulunan ifadenin, [0,1] üzerinden kısmi integrasyonuyla elde edilir.

Lemma 2.1. $|k|\geq N$, $t\neq 0,\pi$ ve $p_2(x),p_3(x),p_4(x)\in L_1[0,1]$ olmak üzere, Eşitlik 8'in sağındaki ifade Eşitlik 9'u sağlar.

$$\begin{aligned}&\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)\\&=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}p_{2,k_1}\left(\psi''_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)+\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}p_{3,k_1}\left(\psi'_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)+\\&\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}p_{4,k_1}\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

Burada, $p_{s,k}=(p_s(x),e^{i2\pi kx})$, $s=2,3,4$. Ayrıca

$$\left|\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2n\pi i+i\bar{t})x}\right)\right|<c_5|k|^2,\qquad \forall n\in Z. \tag{10}$$

İspat. Lemma'nın ispatı, eğer $p_2(x),p_3(x),p_4(x)\in L_2[0,1]$ ise aşikardır. $p_2(x),p_3(x),$ $p_4(x)\in L_1[0,1]$ ise ispat Veliev'in makalesindeki ispata benzerdir (Veliev vd., 2002). $p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x)\in L_1[0,1]$ olduğundan, Eşitlik 8'in sağındaki ifade sonludur.

$$\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)\to 0,\ |k_1|\to\infty \tag{11}$$

Böylece,

$$\max_{k_1\in Z}\left|\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)\right|$$

$$=\left|\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2k_0\pi i+i\bar{t})x}\right)\right|=C(k) \tag{12}$$

olacak şekilde bir $C(k)$ pozitif sabiti ve k_0 tamsayısı vardır. Buradan, Eşitlik 8 kullanılarak,

$$\left|\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)\right|\le\frac{C(k)}{\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4\right|} \tag{13}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik 13 ve Eşitlik 5 kullanılarak Eşitlik 14 bulunur.

$$\sum_{k_1:|k_1|>3k_2}\left|\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)\right|\le\sum_{|k_1|>3k_2}\frac{c_6C(k)}{|k_1|^4}<\frac{c_7}{k_2^3} \tag{14}$$

Burada, $k_2>|k|$ ve $|k_1|>3k_2>3|k|$ (yani, $|k-k_1|>2|k|$) şeklindedir. Bu son eşitsizlikten, $\psi_{k,t}(x)$ fonksiyonunun $\{e^{(2\pi i(k-k_1)+it)x}:k_1\in Z\}$ bazı tarafından üretilen aşağıdaki formda bir toplamı elde edilir (Eşitlik 15).

$$\psi_{k,t}(x)=\sum_{k_1:|k_1|\le 3k_2}\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)e^{(2\pi i(k-k_1)+it)x}+g_0(x) \tag{15}$$

Burada, $\sup_{x\in[0,1]}|g_0(x)|<\frac{c_7}{k_2^3}$ olduğu Eşitlik 14'ten görülür. Şimdi $\psi'_{k,t}(x)$'nin de benzer bir forma sahip olduğunu gösterelim. Eşitlik 13 eşitsizliğinin her iki yanı $|2\pi i(k-k_1)+it|$ ile çarpıldıktan sonra, kısmi integrasyon ve Eşitlik 2 sınır koşulları kullanılarak Eşitlik 16'daki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|\left(\psi'_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)\right|\le\frac{|2\pi i(k-k_1)+it|C(k)}{\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4\right|} \tag{16}$$

Eşitlik 5 ve Eşitlik 15'in ispatıyla benzer tartışma göz önüne alınırsa, $\psi'_{k,t}(x)$ fonksiyonunun $\{e^{(2\pi i(k-k_1)+it)x} : k_1 \in Z\}$ bazı tarafından üretilen aşağıdaki formu elde edilir (Eşitlik 17).

$$\psi'_{k,t}(x) = \sum_{k_1:|k_1|\le 3k_2} \left(\psi'_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right) e^{(2\pi i(k-k_1)+it)x} + g_1(x) \tag{17}$$

Burada, $\sup_{x\in[0,1]} |g_1(x)| < \frac{c_7}{k_2^2}$ şeklindedir. Benzer tartışmayla

$$\psi''_{k,t}(x) = \sum_{k_1:|k_1|\le 3k_2} \left(\psi''_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right) e^{(2\pi i(k-k_1)+it)x} + g_2(x) \tag{18}$$

olduğu görülür. Burada, $\sup_{x\in[0,1]} |g_2(x)| < \frac{c_7}{k_2}$ şeklindedir. Elde edilen bu toplamlar $\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x) + p_3(x)\psi'_{k,t}(x) + p_4(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$ iç çarpımında yerine konulur ve $k_2 \to \infty$ için limit alınırsa Eşitlik 9 ispatlanmış olur.

Şimdi Eşitlik 10 ifadesini ispatlayalım. Eşitlik 12'deki *C(k)* eşitliği, Eşitlik 9 ve kısmi integrasyon kullanılarak aşağıdaki form elde edilir.

$$C(k) = \left|\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x) + p_3(x)\psi'_{k,t}(x) + p_4(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2k_0\pi i+i\bar{t})x}\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \eta_{k_0-k_1} \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k_0-k_1)+i\bar{t})x}\right)\right| \tag{19}$$

Burada, $\eta_{k_0-k_1} = \left(p_{2,k_1}[2\pi i(k_0-k_1)+it]^2 + p_{3,k_1}[2\pi i(k_0-k_1)+it] + p_{4,k_1}\right)$'dır.

Eşitlik 19'daki $\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$ ifadesini içeren terim ayrılır (yani; $k_0 - k_1 = k$ için) ve Eşitlik 8 kullanılırsa, Eşitlik 20 elde edilir.

$$C(k) = \left| \sum_{k_1:k_0-k_1\ne k} \frac{\eta_{k_0-k_1}\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x) + p_3(x)\psi'_{k,t}(x) + p_4(x)\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k_0-k_1)+i\bar{t})x}\right)}{\lambda_k(t) - (2\pi i(k_0-k_1)+it)^4} \right.$$

$$\left. + \left(p_{2,k_0-k}[2k\pi i+it]^2 + p_{3,k_0-k}[2k\pi i+it] + p_{4,k_0-k}\right)\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)\right|$$

$$\le \sum_{k_1:k_0-k_1\ne k} \frac{|\eta_{k_0-k_1}| C(k)}{\left|\lambda_k(t) - (2\pi i(k_0-k_1)+it)^4\right|} + c_8|k|^2 \tag{20}$$

Burada, $\left|\left(p_{2,k_0-k}[2k\pi i+it]^2+p_{3,k_0-k}[2k\pi i+it]+p_{4,k_0-k}\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)\right|<c_8|k|^2$ ’dır.
Böylece, Eşitlik 6 kullanılarak

$$\sum_{k_1:k_0-k_1\neq k}\frac{|\eta_{k_0-k_1}|}{\left|\lambda_k(t)-(2\pi i(k_0-k_1)+it)^4\right|}=O\left(\frac{\ln|k|}{k}\right) \tag{21}$$

olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak; Eşitlik 20 ve Eşitlik 21’den $C(k)<\frac{C(k)}{2}+c_8|k|^2$ bağıntısı elde edilir. Böylece, $C(k)<c_5|k|^2$ olacak şekilde pozitif ve k ’dan bağımsız c_5 sabiti vardır. Bu sonuç Lemma’nın ispatını tamamlar.

Eşitlik 8 ve Eşitlik 9’dan, kısmi integrasyon kullanılarak aşağıdaki form elde edilir.

$$\left(\lambda_k(t)-(2k\pi i+it)^4\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)=\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\eta_{k-k_1}\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right) \tag{22}$$

Burada, $\eta_{k-k_1}=\left(p_{2,k_1}[2\pi i(k-k_1)+it]^2+p_{3,k_1}[2\pi i(k-k_1)+it]+p_{4,k_1}\right)$. Şimdi Eşitlik 22’nin sağ tarafındaki, $\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$ ifadesini içeren terim ayırılır (yani; $k_1=0$ için) ve $\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)$ ifadesi için Eşitlik 8 kullanılırsa, Eşitlik 23 elde edilir.

$$\left(\lambda_k(t)-(2k\pi i+it)^4\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)=\eta_{k-0}\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$$

$$\sum_{k_1:k_1\neq 0}\frac{\eta_{k-k_1}\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)}{\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4} \tag{23}$$

Eşitlik 23’te, Eşitlik 9 *k₂* indeksine göre göz önüne alınırsa

$$\left(\lambda_k(t)-(2k\pi i+it)^4\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)=\eta_{k-0}\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$$

$$+\sum_{k_1,k_2:k_1\neq 0}\frac{\eta_{k-k_1}\eta_{k-k_1-k_2}\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1-k_2)+i\bar{t})x}\right)}{\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4} \tag{24}$$

elde edilir. Burada

$$\eta_{k-0}=\left(p_{2,0}[2k\pi i+it]^2+p_{3,0}[2k\pi i+it]+p_{4,0}\right)$$

$$\eta_{k-k_1-k_2}=\left(p_{2,k_2}[2\pi i(k-k_1-k_2)+it]^2+p_{3,k_2}[2\pi i(k-k_1-k_2)+it]+p_{4,k_2}\right) \tag{25}$$

Benzer şekilde Eşitlik 24’ün sağ tarafındaki, z ifadesini içeren terim ayırılır (yani; $k_1+k_2=0$ için) ve $k_1+k_2\neq 0$ için $\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1-k_2)+i\bar{t})x}\right)$ ifadesi yerine Eşitlik 8 kullanılırsa

$$\left(\lambda_k(t)-(2k\pi i+it)^4\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)=\eta_{k-0}\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$$

$$+\sum_{k_1:k_1\neq 0}\frac{\eta_{k-k_1}\left(p_{2,-k_1}[2k\pi i+it]^2+p_{3,-k_1}[2k\pi i+it]+p_{4,-k_1}\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)}{\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4}$$

$$+\sum_{\substack{k_1,k_2:k_1\neq 0\\ k_1+k_2\neq 0}}\frac{\eta_{k-k_1}\eta_{k-k_1-k_2}\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1-k_2)+i\bar{t})x}\right)}{[\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4]\,[\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1-k_2)+it)^4]} \tag{26}$$

eşitliği elde edilir. Burada, $p_{s,-k}=(p_s(x),e^{-i2k\pi x})$, $s=2,3,4$ için Fourier katsayılarını ifade eder. Bu işlemler sırasıyla m kez tekrar edilirse, aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\left(\lambda_k(t)-(2k\pi i+it)^4\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)=\left(\eta_{k-0}+A_m(\lambda_k(t))\right)\left(\psi_{k,t}(x),e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)+R_m \tag{27}$$

Burada, $m>1$ için $A_m(\lambda_k(t))=\sum_{\ell=1}^{m-1}a_\ell(\lambda_k(t))$

$$a_\ell(\lambda_k(t))=\sum_{k_1,\dots,k_\ell}\frac{\eta_{k-k_1}\cdots\eta_{k-k_1-\dots-k_\ell}\left(p_{2,-k_1\cdots-k_\ell}[2k\pi i+it]^2+p_{3,-k_1\cdots-k_\ell}[2k\pi i+it]+p_{4,-k_1\cdots-k_\ell}\right)}{[\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4]\cdots[\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1\cdots-k_\ell)+it)^4]}$$

$$R_m=$$

$$\sum_{k_1,\dots,k_m}\frac{\eta_{k-k_1}\cdots\eta_{k-k_1\cdots-k_m}\left(p_2(x)\psi''_{k,t}(x)+p_3(x)\psi'_{k,t}(x)+p_4(x)\psi_{k,t}(x),e^{(2\pi i(k-k_1\cdots-k_m)+i\bar{t})x}\right)}{[\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1)+it)^4]\cdots[\lambda_k(t)-(2\pi i(k-k_1\cdots-k_m)+it)^4]}, \tag{28}$$

ve $k_1\neq 0$; $\sum_{j=1}^{\ell}k_j\neq 0$, $\forall\ell=1,2,\dots,m.$

Eşitlik 25 kullanılarak

$$\left|\eta_{k-k_1-\dots-k_s}\right|<c_9\left|2\pi i(k-k_1-\dots-k_s)+it\right| \quad ; \quad s=1,2,\dots,\ell \tag{29}$$

ve $a_\ell(\lambda_k(t))$'nın genel teriminin payındaki diğer çarpan için

$$\left|p_{2,-k_1\cdots-k_\ell}[2k\pi i+it]^2+p_{3,-k_1\cdots-k_\ell}[2k\pi i+it]+p_{4,-k_1\cdots-k_\ell}\right|<c_{10}|k|^2 \tag{30}$$

olduğu açıkça görülür. Buradan, Eşitlik 10, Eşitlik 29, Eşitlik 30 eşitsizlikleri ve Eşitlik 6 bağıntısı kullanılarak

$$a_\ell=O\left(k^2\left(\frac{\ln|k|}{k}\right)^{\ell}\right),\quad R_m=O\left(k^2\left(\frac{\ln|k|}{k}\right)^{m}\right) \tag{31}$$

eşitliklerinin doğruluğunu göstermek zor değildir. Eşitlik 27 ve Eşitlik 31 formülleri göz önüne alındığında aşağıdaki teorem elede edilir.

Teorem 2.2. $L_t(p)$ operatörünün $\lambda_k(t)$ özdeğerleri aşağıdaki formülü sağlar.

$$\lambda_k(t) = (2k\pi i + it)^4 + \eta_{k-0} + F_m + O\left(k^2\left(\frac{\ln|k|}{k}\right)^m\right) \quad ; \quad \forall m = 1,2,\ldots \tag{32}$$

Burada, $t \neq 0,\pi$ ve $F_1 = 0$, $F_\ell = A_\ell\left((2k\pi i + it)^4 + \eta_{k-0} + F_{\ell-1}\right)$; $\forall \ell = 2,3,\ldots$.

İspat. Eşitlik 8, Eşitlik 10 ve Eşitlik 7 göz önüne alınacak olursa,

$$\sum_{k_1 \neq 0}\left|\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)\right|^2 < \sum_{k_1 \neq 0}\frac{c_{11}|k|^4}{\left|\lambda_k(t) - (2\pi i(k-k_1)+it)^4\right|^2} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left\|\sum_{k_1 \neq 0}\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2\pi i(k-k_1)+i\bar{t})x}\right)e^{(2\pi i(k-k_1)+it)x}\right\| = O\left(\frac{1}{k}\right) \tag{33}$$

Böylece, $\{e^{(2k\pi i+it)x} : k \in Z\}$ bazı tarafından üretilen, $\psi_{k,t}(x)$ birim özvektör aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\psi_{k,t}(x) = \left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)e^{(2k\pi i+it)x} + h(x) \tag{34}$$

$$\left|\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)\right| = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \tag{35}$$

Burada, $\|h(x)\| = O\left(\frac{1}{k}\right)$.

Eşitlik 27'nin her iki yanı $\left(\psi_{k,t}(x), e^{(2k\pi i+i\bar{t})x}\right)$ ile bölünür ve Eşitlik 31 kullanılırsa

$$\lambda_k(t) = (2k\pi i + it)^4 + \eta_{k-0} + A_m(\lambda_k(t)) + O\left(k^2\left(\frac{\ln|k|}{k}\right)^m\right) \tag{36}$$

bulunur. Özel olarak $m = 1$ için Eşitlik 32'nin sağlandığı görülür. Şimdi Eşitlik 32'nin sağlandığını m üzerinden tümevarımla gösterelim: Kabul edelim ki Eşitlik 32 formülü $m = j-1$ için sağlasın, yani

$$\lambda_k(t) = (2k\pi i + it)^4 + \eta_{k-0} + F_{j-1} + O\left(k^2\left(\frac{\ln|k|}{k}\right)^{j-1}\right) \tag{37}$$

olsun. $\lambda_k(t)$'nin bu değeri Eşitlik 36 formülünde, $m=j$ için, $A_j(\lambda_k(t))$'de yerine konulacak olursa, $\lambda_k(t)$ aşağıdaki formda elde edilir.

$$\lambda_k(t) = (2k\pi i + it)^4 + \eta_{k-0} + A_j\left\{(2k\pi i + it)^4 + \eta_{k-0} + F_{j-1} + O\left(k^2(\frac{\ln|k|}{k})^{j-1}\right)\right\}$$

$$+O\left(k^2(\frac{\ln|k|}{k})^{j}\right) \tag{38}$$

Son olarak Eşitlik 28'deki $a_\ell(\lambda_k(t))$ formu gözönüne alınırsa; Eşitlik 29, Eşitlik 30 ve Eşitlik 6 kullanılarak Eşitlik 39'daki bağıntı elde edilir.

$$A_j(\lambda_k(t)) = A_j\left\{(2k\pi i + it)^4 + \eta_{k-0} + F_{j-1} + O\left(k^2(\frac{\ln|k|}{k})^{j-1}\right)\right\}$$

$$= A_j\left((2k\pi i + it)^4 + \eta_{k-0} + F_{j-1}\right) + O\left(k^2(\frac{\ln|k|}{k})^{j}\right) \tag{39}$$

Son iki formül Eşitlik 38 ve Eşitlik 39, $m=j$ için, Eşitlik 32 formülünü ispatlar.

KAYNAKLAR

Birkhoff G.D. (1908): "Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations", Trans. Amer. Math. Soc., 9, pp. 373-95.

Eastham M.S.P. (1973): "The Spectral Theory of Periodic Differential Equations", Scottish Acedemic Pres, Edinburg.

Naimark M.A. (1967): "Linear Differential Operators", Volume I, George G. Harap and Company Ltd., London.

Tamarkin J.D. (1927): "Some General Problems of The Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansion of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions", Math. Zeit., 27, pp. 1-54.

Veliev O.A. (1983): "The Spectrum and Spectral Singularities of Differential Operators with Complex-Valued Periodic Coefficients", Differential Cprime nye Uravneniya, 19, pp. 1316-1324.

Veliev O.A. (1986): "Spectral Expansion Related to Non-Selfadjoint Diffrential Operator with Periodic Coefficients" (Russian, English), Diffrential Equations, 22 (12), pp. 1403-1408.

Veliev O.A., Duman M.T. (2002): "The Spectral Expansion for a Nonself-Adjoint Hill Operator with a Locally Integrable Potential", J. Math. Anal. Appl., 265, pp. 76-90.