DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
FEN ve MÜHENDİSLİK DERGİSİ
Cilt: 6 Sayı: 1 sh. 115-127 Ocak 2004

DİFERANSİYEL QUADRATURE METODU İLE DİKDÖRTGEN VE KARE PLAKLARIN STATİK HESABI

(THE STATIC ANALYSIS OF RECTANGULAR AND SQUARE PLATES BY THE METHOD OF DIFFERENTIAL QUADRATURE)

Ömer CİVALEK, Hikmet H. ÇATAL*

ÖZET/ABSTRACT

Çalışmada diferansiyel quadrature metodu, çeşitli mesnet şartları için dikdörtgen ve kare plakların statik analizine uygulanmıştır. Diferansiyel quadrature metodu; koordinat doğrultusuna göre bir fonksiyonun türevi, çepeçevre saran bir çözüm bölgesindeki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve o doğrultu boyunca bütün ağ noktalarındaki fonksiyon değerlerinin tümünün lineer toplamı olarak ifade edilir. Ağırlık katsayıları bilinmeyenler olarak bulunur. Plağın eğilmesini ifade eden diferansiyel denkleme metot sınır şartları altında tatbik edilerek lineer denklem takımları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar mevcut analitik ve diğer yaklaşık yöntem değerleri ile karşılaştırılmıştır. Metot sonuçları bakımından yeter doğrulukta olup hesaplayıcı bakımından verimlidir.

The differential quadrature method has been presented in this paper to solve the problem of the deflection analysis of rectangular and square plates for various support conditions. In the method of differential quadrature, partial space derivatives of a function appearing in a differential equation are approximated by means of a polynomial expressed as the weighted linear sum of the function values at a reselected grid of discrete points. The weighting coefficients are treated as the unknowns. Applying this concept to partial derivative of the bending differential equation of plates give a set of linear simultaneous equations, which are solved for the unknown weighting coefficients by accounting for the boundary conditions. Results are compared with existing solutions available from other analytical and numerical methods. The method presented gives accurate results and is computationally efficient.

ANAHTAR KELİMELER/*KEYWORDS*

Diferansiyel quadrature, Deplasman analizi, Plak
Differential quadrature, Deflection analysis, Plate

* Dokuz Eylül Üniversitesi, Müh. Fak., İnşaat Müh. Böl., Buca, İZMİR

1. GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarında temel amaç; insan yaşamını kolaylaştıracak sistemler ortaya koymaktır. Bu sistemlerin geliştirilmesindeki temel etken insan ihtiyaçlarının karşılanmasıdır. Uygarlaşma yönündeki olumlu gelişmeler ve teknolojinin günümüzde geldiği nokta ihtiyaçların farklılaşmasına neden olmuştur. Değişen bu ihtiyaçlara cevap vermek için teorik ve pratik çalışmalar yapan mühendislerde farklı teknikler üzerinde yoğunlaşmışlardır. Mühendislik sistemlerinin analizi en genel anlamda iki aşamayı içermektedir. Mevcut bir fiziksel sistemi ifade eden matematik modelin kurulması ve elde edilen matematik denklemin analitik olarak veya çeşitli yaklaşık sayısal metotlar kullanılarak çözülmesidir. Bu iki aşamadan birincisi tecrübe, sezgi ve iyi bir matematik alt yapı; ikincisi ise modelleme de kullanılan sezgi ve bilgiye ilaveten hızlı ve kapsamlı bir hesaplayıcıyı gerektirir (Crandall, 1968).

Yapılan modellemenin gerçek modeli yansıtıp yansıtmaması, gerçek fiziksel olay ile uyumluluk derecesiyle ölçülür. Bu modellerin büyük bir çoğunluğu, sınır değer formundaki diferansiyel denklemlerdir. Bu matematik denklemlerin fiziksel modele en yakın sunuş biçimi ise varyasyonel problemlerdir (Hasanov, 2001). Giriş verileri üzerine konulan süreklilik ve türevlenebilirlik koşuları açısından, varyasyonel problem kendi özdeşi olan sınır değer problemiyle karşılaştırıldığında, uygulama alanı daha geniş olan problemler sınıfına hitap eder. Matematik modelleme işleminin, modelin varyasyonel problem olarak ifade edilmesinden sonraki aşaması, hesaplayıcıya tanıtımı uygun olan ayrık modelin oluşturulmasıdır. Günümüzde, diferansiyel denklemlerle ilgili matematik modellerin ayrık benzeşiklerinin oluşturulması ve elde edilen ayrık problemin bilgisayarda çözümlenmesi açısından en kapsamlı ve bilinen yöntem Sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntemin klasik sonlu farklar yönteminden başlıca ayırt edici özelliği, sonlu elemanlar yöntemi sınır değer problemini değil varyasyonel problemi temel alır.

En genel anlamda, mühendislik problemleri, süreksiz ve sürekli ortam problemleri olmak üzere iki sınıfa ayrılır. Serbestlik derecesi sonsuz büyük olan sürekli ortam problemlerinin çözümü bir diferansiyel denklem, bir integral denklem veya denklem sisteminin çözümünü gerektirdiği halde, serbestlik derecesi sonlu olan süreksiz ortam problemlerinin çözümü lineer denklem takımının çözümüyle elde edilebilmektedir. Sonsuz serbestlik dereceli sistemlerinin çözümünde çeşitli matematik güçlükler ortaya çıkmakta buna karşın süreksiz ortam problemlerinin çözümünde gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve hesap süresi artmaktadır.

Bunlardan başka mühendislik problemleri evrensel bir yaklaşımla; kararlı durum problemlerini içeren denge problemleri, kararlı durum problemlerindeki bazı parametrelerin kritik değerlerinin bulunmasını gerektiren özdeğer problemleri ve başlangıç değer formundaki problemleri içeren propagasyon problemleri olarak üç temel gruba da ayırmak mümkündür. Bu tarz bir sınıflandırmada da elde edilen denklem; kapalı yada açık sınır ve/veya başlangıç değerine sahip kısmi veya adi türevli bir diferansiyel denklem yada lineer bir denklem takımı olarak elde edilir (Bayın, 2000).

Lineer bir diferansiyel denklem takımını sağlayan fonksiyonların bir bölgedeki değerleri tayin edilirken, bazı matematik güçlüklerle karşılaşılır. Bunun için bu hallerde, önce bu fonksiyonların verilen bölgenin sonlu uzunluktaki bazı noktalarına ait değerleri aranır. Daha sonra, bu değerler kullanılarak diğer bilinmeyen noktalardaki değerler elde edilir. Bu şekilde sürekli bir ortam yerine, cebirsel bir denklem takımının çözümünü gerektiren ayrık bir ortam alınmış olur. Hızlı ve yüksek kapasiteli hesaplayıcıların gelişmesi, ve kullanımının yaygınlaşması nedeniyle sürekli ortam yerine süreksiz ortam modeli üzerinden işlem yapmaya elverişli yöntemler artmıştır. Bu yöntemler içinde sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar günümüzde yaygın olarak kullanılabilmektedir. Karakteristik büyüklüklerin ortam içinde değişmesini ifade edebilmesi ve karmaşık sınır şartlarının çözüme katılabilmesine olanak vermesi bakımından sonlu elemanlar daha yaygındır.

Kurulan matematik model çoğunlukla sistemi ifade eden ya bir integral denklem yada kısmi veya adi türevli bir diferansiyel denklemdir. Sınır koşullarının karmaşıklığı nedeniyle elde edilen diferansiyel denklemin analitik çözümü çoğu durumda mümkün olmaz. Bu nedenle sayısal analiz tekniklerine başvurulur. Bilgisayar tekniğindeki gelişmeler ve denklemlerin matris formda ifade edilebilmesi sayısal analiz metotlarında büyük bir gelişmeye neden olmuştur. Bu metotlar içinde; sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, varyasyonel (değişim) hesap, Rayleigh-Ritz gibi yaklaşık metotlar günümüze kadar etkin olarak kullanılmıştır. Çoğu sayısal hesap yönteminde sürekli denge problemi sonlu sayıda serbestlik dereceli bir sisteme indirgenerek çözüme ulaşılır (Mitchell, 1976).

2. AMAÇ VE KAPSAM

Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için; sonlu elemanlar, sonlu farklar, sınır elemanlar gibi birkaç sayısal çözüm yöntemi mevcut olup, bu metotlar günümüze kadar mühendislikte ve fizikte uygulama alanı olan titreşim, stabilite, akışkanlar mekaniği, sürekli ortam mekaniği, sıvı veya termal etkiler maruz yapıların analizi gibi pek çok probleme başarıyla uygulanmıştır.

Gerek sonlu elemanlar ve gerekse sonlu farklar metodunda düğüm noktası sayısı arttıkça elde edilen çözümlerin hassasiyetinin arttığı bilinmektedir. Bununla birlikte, daha hassas sonuçlar elde etmek için düğüm noktası sayısının arttırılması, gerekli olan bilgisayar kapasitesi ve hesap süresi de aynı oranda arttırmaktadır. Ancak pek çok problemde gerçek değere yakın hassas sonuçlar fiziksel anlamda ancak birkaç özel noktada gerekmektedir.

Bilgisayar tekniğindeki gelişmelere paralel olarak denklemlerin matris formda ifade edilmesi ve bilgisayar ortamına aktarılmasındaki kolaylıklar neticesinde hesap yöntemleri sayısal analiz lehine gelişmeler göstermiştir. Hesap tekniklerindeki bu gelişmeler nedeniyle lineer kabul yerine parça parça lineerleştirerek adım adım hesaplama, ardışık yaklaşım veya bu tür sistemlerde süperpozisyon metodu geçerli olmadığından ardışık yük artım metotları gibi lineer olmayan sayısal analiz yöntemleri çok yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır.

Bu metotlar içinde sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotları kullanım alanı diğerlerine göre daha fazla olan iki analiz tekniğidir. Sonlu elemanlar metodunda çözüm için yaklaşık bir fonksiyon seçilerek çözüme başlanır. Ancak sonlu elemanlar metodunda seçilen enterpolasyon fonksiyonları lokal düzeyde olup elemanlar için geçerlidir (Civalek, 1996). Sonlu elemanlar metodunda çözüm bölgesi çok fazla elemana ayrılarak yeter hassasiyette sonuçlar elde etmek mümkündür. Özellikle plak veya kabuk elemanların hassas çözümleri ancak yüksek sayıda elemana bölünerek sağlanır (Civalek, 1998). Elemanın çok fazla bölgeye ayrılarak (mesh generation) çözüme ulaşılması durumunda ise gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve zaman artacaktır. Bununla birlikte yeter yaklaşıkta sonuçlar yani gerçek değere çok yakın sonuçlar mühendislik uygulamalarında çoğunlukla bir veya birkaç spesifik noktada istenir (Celia ve Gray, 1992).

Daha az ızgara nokta sayısı kullanılarak yeter hassasiyette sonuçlar verebilecek bir metot olan Diferansiyel Quadrature Metodu (DQM) Richard Bellman tarafından geliştirilerek lineer ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümüne uygulanmıştır. Diferansiyel quadrature metodu; koordinat doğrultusuna göre bir fonksiyonun türevi, çepeçevre saran bir çözüm bölgesindeki yüksek dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşım kurabilen sürekli bir fonksiyon ve o doğrultu boyunca bütün ağ noktalarındaki fonksiyon değerlerinin tümünün lineer toplamı olarak ifade edilebileceği prensibine dayanır.

Bununla birlikte diferansiyel quadrature metodunda elde edilen matrisler band matris olup simetrik değildir. Benzer sayısal yaklaşım yöntemlerinde olduğu gibi, DQ metodu da mevcut türev denklemi, çözüm bölgesinde önceden seçilen düğüm noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden, lineer denklem takımına dönüştürür. Bu denklemlere ilaveten sınır şartları da DQ metoduna uygun formda yazılır. Sınır şartlarının Dirichlet ve/veya Neuman yada karışık olması herhangi bir güçlük doğurmaz.

3. DİFERANSİYEL QUADRATURE YÖNTEM

Diferansiyel quadrature metodu; bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir, şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır (Bellman ve Casti, 1971; Civan ve Sliepcevich, 1983). Yeter yaklaşıkta sonuçlar elde etmek için daha az sayıda ızgara kullanan diferansiyel quadrature metodu ; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemleri için farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur. Bu amaçla tek boyutlu bir $u(x)$ fonksiyonun birinci türevini x_i (*i=1,2,...,N*) noktalarında *N* ayrık nokta için göz önüne alırsak *i*'nci ayrık nokta için birinci türev,

$$u_x(x_i) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x = x_i} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\; u(x_j) \quad ; \qquad \text{i=1,2,........,N} \tag{1}$$

olacaktır. Burada x_j değişken bölgesindeki ayrık noktaları, $u(x_j)$ bu noktalardaki fonksiyon değerlerini, ve A_{ij} birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Ağırlık katsayılarının hesabı, karşılık gelen koordinat yönlerinde fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir. Test fonksiyonu yada yaklaşım fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyonların seçiminde süreklilik şartına dikkat edilmelidir. Benzer zorunluluk sonlu elamanlar yöntemindeki enterpolasyon fonksiyonlarının seçiminde de vardır. Ancak DQ metodunda, seçilen fonksiyonlarının Ritz metodunda olduğu gibi sınır şartını sağlaması zorunluluğu yoktur. Yaklaşım fonksiyonları, alan değişkenlerinin olası kararlı yani üniform durumlarını tanımlayabilmeli ve diferansiyel denklemdeki yada sınır şartlarındaki mevcut en yüksek dereceli diferansiyele kadar türevinin alınabilmesi gerekir. Yani süreklilik şartı için, bir koordinat yönündeki düğüm sayısı, diferansiyel denklemdeki karşılık gelen bağımsız değişkene göre en yüksek dereceli türevin bir fazlasına eşit olmalıdır. Belmann ve arkadaşları ağırlık katsayılarının hesabı için iki farklı yöntem önermişlerdir (Bellman vd., 1972). Bunlardan birincisinde Eşitlik 1 tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak (N-1) veya daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için,

$$u_k(x) = x^{k-1}, \qquad k = 1,2,...,N \tag{2}$$

verilen Eşitlik 1'de yerine yazılırsa aşağıda belirtildiği formda bir lineer denklem takımı verir

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_j^{k-1} \tag{3}$$

i = 1,2,........,N ve k = 1,2,........,N için

Ancak bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı Vandermonde formunda olduğundan tekil bir çözüme sahiptir. Denklem ağırlık katsayıları için analitik olarak

Hamming'in önerdiği metotla yada Vandermonde denklemleri için Bjorck ve Pareyra'nın önerdiği gibi bilinen bazı özel algoritmalar ile sayısal olarak çözülebilir (Hamming, 1973; Bjorck ve Pareyra, 1970). Bu tekilliği gidermek için, ağırlık katsayıları, değişik ızgara nokta sayıları ile Eşitlik 3'ün eşit ızgara değerleri için hesaplanmalıdır. Eşitlik (3) aşağıdaki matris formda da verilebilir.

$$\{x'\}_j = [A_{ij}]\{x\}_j \tag{4}$$

Benzer işlemler iki ve daha fazla derecen türev ifadeleri için de yazılabilir. Böylece, her bir dereceden türev için ağırlık ifadeleri birinci dereceden türev ifadesinden farklı olmaktadır. İkinci dereceden türev için metot

$$u_{xx}(x_i) = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x = x_i} = \sum_{j=1}^{N} B_{ij}\ u(x_j) \quad ; \quad i = 1,2,........,N \tag{5}$$

olarak verilir. Burada B_{ij} ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Denklem (5) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden

$$u_{xx}(x_i) = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x = x_i} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \sum_{k=1}^{N} A_{jk}\, u(x_k) \quad ; \quad i=1,2,........,N \tag{6}$$

Eşitlik 2 ile verilen polinom fonksiyon uygulanarak ikinci dereceden türev ifadesi,

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^{N} B_{ij}\, x_j^{k-1} \tag{7}$$

olmaktadır. Bu eşitlik yukarıda verilen Eşitlik 3'e benzer yaklaşımla çözülür. İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık katsayıları B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}, aşağıdaki formda hesaplanır

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik}\, A_{kj} \tag{8}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik}\, B_{kj} \tag{9}$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik}\, C_{kj} \tag{10}$$

Bellman ve arkadaşları tarafından ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen ikinci yöntem de birinciye benzer olup farklı bir test fonksiyonu seçilir. Eşitlik 1'i sağlayacak şekilde x_k ötelenmiş Legendre polinomunun kökleri olarak

$$u_k(x) = \frac{L_N(x)}{(x - x_k)\,L_N^{(1)}(x_k)}, \qquad k=1,2,..........,N \tag{11}$$

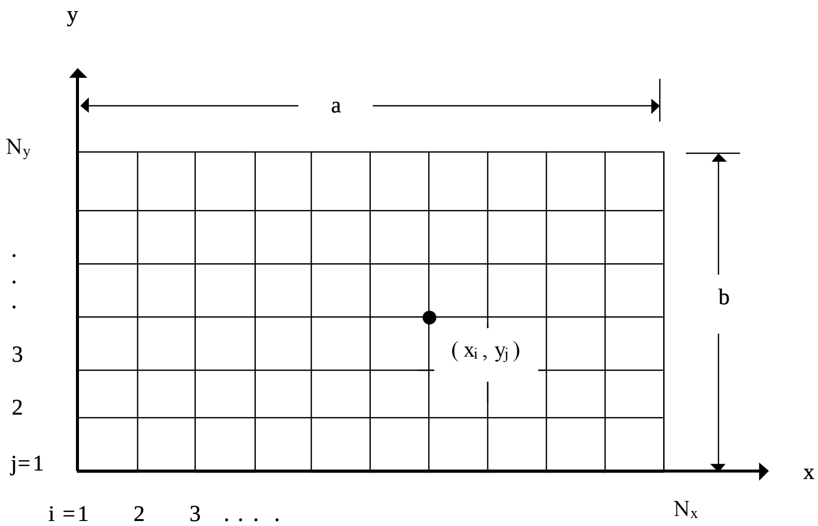
fonksiyonu seçilir. Burada N ızgara nokta sayısı, $L_N(x)$ N. Dereceden legendre polinomu, $L_N^{(1)}(x)$ ise bu polinomun birinci türevidir. Denklemdeki x_k ötelenmiş legendre polinomunun kökleri olarak seçilip Eşitlik 11 ile verilen polinom fonksiyon Eşitlik 1'de yazılırsa ağırlık katsayıları;

$$A_{ij} = \frac{L'_N(x_i)}{(x_i - x_j)L'_N(x_j)} \qquad i \neq j \text{ için} \qquad (12a)$$

$$A_{ii} = \frac{1 - 2x_i}{2x_i(x_i - 1)} \qquad i = j \text{ için} \qquad (12b)$$

i, j= 1,2,.......,N

Bu ikinci yaklaşımda, Eşitlik 12a ve Eşitlik 12b ile tanımlanan ağırlık katsayıları birincide olduğu gibi herhangi bir tekillik problemi ve lineer denklem takımı çözmeden elde edilir. Bir boyutlu problemlere benzer olarak iki boyutlu problemler içinde diferansiyel quadrature metodu geliştirilebilir. Şekil 1'de görülen dikdörtgen düzlem için, N_x x-doğrultusundaki ızgara ve N_y y-doğrultusundaki ızgara sayısı olmak üzere türev ifadeleri yazılabilir.



Şekil 1. İki boyutlu bölge için ızgara noktaları

Bu amaçla *u(x,y)* fonksiyonunun *r*-inci mertebeden *x*'e göre, s'inci mertebeden *y*'e göre ve *(r+s)*'nci mertebeden *x* ve *y* değişkenlerine göre (x_i, y_j) ayrık noktaları için türev ifadeleri;

$$\left.\frac{\partial^r u}{\partial x^r}\right|_{x = x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)}\, u(x_k, y_j) \quad ; \qquad r = 1,2,.......,N_x - 1 \qquad (13)$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial y^s}\right|_{y = y_j} = \sum_{k=1}^{N_x} B_{jk}^{(s)}\, u(x_i, y_k) \quad ; \qquad s = 1,2,.......,N_y - 1 \qquad (14)$$

$$\left.\frac{\partial^{(r+s)}u}{\partial x^r \partial y^s}\right|_{x_i y_j} = \frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(\frac{\partial^s u}{\partial y^s}\right)_{x_i y_j} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm}^{(s)} \; u(x_k, y_m)\;; \qquad (15)$$

i =1,2, ..., N_x , ve j = 1,2,... , N_y

olarak verilir. $A^{(r)}_{ij}$ ve $B^{(s)}_{ij}$ u(x,y) fonksiyonunun sırasıyla *x*'e ve *y'* ye göre *r* inci ve *s* inci mertebeden x_i ve y_j ayrık noktaları için yazılan türev ağırlık katsayılarıdır. Bu katsayılar ilk olarak Shu ve Richards tarafından geliştirilmiştir (Shu ve Richards, 1992; Shu ve Du, 1997). Bu ağırlık katsayıları,

$$A_{ij}^{(r)} = r\left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j}\right]; \text{ i,j =1,2,...,}N_x\text{ , j}\neq\text{i; ve r= 2,3,...., }N_x\text{-1} \qquad (16)$$

$$B_{ij}^{(s)} = s\left[B_{ii}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j}\right]; \text{ i,j =1,2,.,}N_y\text{ , j}\neq\text{i; ve s = 2,3,....., }N_y\text{-1} \qquad (17)$$

$$A_{ii}^{(r)} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N_x} A_{ij}^{(r)}; \; i = 1,2,....,N_x \;\; \text{ve} \;\; r = 1,2,.....,N_x - 1 \qquad (18)$$

$$B_{ii}^{(s)} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N_y} B_{ij}^{(s)}; \; i = 1,2,....,N_y \;\; ve \;\; r = 1,2,.....,N_y - 1 \qquad (19)$$

olmaktadır. Dikkat edilmelidir ki örnek noktaların sayısı verilen bağıntıların performansında yani ağırlık katsayılarının hesabında etkili değildir. Hesap performansını geliştirmek açısından önemlidir. Bundan başka, bazı durumlarda bu noktalar çözümün doğruluğunu etkileyebilmektedir. Örneğin eşit aralıklı noktalar ile işlem kısmen daha kolay ve uygulaması daha basittir, ancak eşit olmayan nokta aralığı için az da olsa sonuçların hassaslığı düşür. Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen metot her iki doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (tek boyutlu problemler için bir yönde) eşit aralıklı seçilen

$$x_i = \frac{i-1}{N_x - 1}\;; \qquad \text{i = 1,2,..........}N_x \qquad (20)$$

$$y_j = \frac{j-1}{N_y - 1}; \qquad \text{j = 1,2,..........}N_y \qquad (21)$$

olarak verilir. Bazı durumlarda eşit aralıklı olmayan noktaların seçiminin daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir. Yine iki boyutlu problemler için eşit olmayan ızgara noktaları Chebyshev-Gauss-Lobatto noktaları için

$$x_i = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{i-1}{N_x - 1}\pi\right)\right], \qquad i = 1,2,.......,N_x \tag{22}$$

$$y_j = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{j-1}{N_y - 1}\pi\right)\right], \qquad j = 1,2,.......,N_y \tag{23}$$

şeklinde seçilir. Bununla birlikte diferansiyel quadrature çözümlerinde farklı koordinat yönlerindeki ızgara noktaları sayısı ve tipi bakımından farklı seçilebileceği gibi, farklı koordinat yönlerinde farklı test fonksiyonları da seçilebilir.

5. SAYISAL UYGULAMALAR

İnce, dikdörtgen bir plağın eğilmesini ifade eden diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} \tag{24}$$

olarak verilir (Şekil 1) (Timoshenko ve Kriege.,1959). Burada, *u* plağın orta düzleminin deplasmanı *D* plağın eğilme rijitliği olup, $D = Eh^3 /12(1-\nu^2)$ ile verilir. Eşitlik boyutsuz formda

$$\frac{\partial^4 U}{\partial X^4} + 2k^2\frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial Y^2} + k^4\frac{\partial^4 U}{\partial Y^4} = \frac{q a^4}{D} \tag{25}$$

şeklinde yazılır. Burada $X = x/a$ ve $Y = y/b$ boyutsuz koordinatlar, *a* ve *b* plağın *x* ve *y* doğrultusundaki boyutları, $k = a/b$ plak kenarlarının oranıdır. Yukarıda boyutsuz formda verilmiş olan Eşitlik 25'e DQ metodu uygulanarak

$$\sum_{k=1}^{N_x} D_{ik} U_{kj} + 2k^2 \sum_{k=1}^{N_x}\sum_{m=1}^{N_y} B_{ik} B_{jm} U_{km} + k^4 \sum_{k=1}^{N_y} D_{jk} U_{ik} = \frac{q a^4}{D} \tag{26}$$

$i = 1,2,.....,N_x$ ve $j = 1,2,......,N_y$ için

Burada N_x ve N_y sırasıyla *x* ve *y* doğrultularındaki ızgara noktaları, ve D_{ik}, D_{ik}, B_{ik}, B_{jm} değerleri ise diferansiyel quadrature yaklaşımı için dördüncü ve ikinci dereceden ağırlık katsayılarıdır (Şekil 1). Verilen Eşitlik 26 dördüncü dereceden olup her bir kenar için ilave iki sınır şartı yazılmalıdır.

Sınır Koşulları

<u>1- Dört kenarı tutulmuş (C-C -C-C) :</u> Deplasmanlar ve dönmelerin kenarlarda sıfır olması şartından

$$U(X,0) = U(X,1) = 0 \quad \text{ve} \quad U(0,Y) = U(1,Y) = 0 \tag{27a}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y}(X,0)=\frac{\partial U}{\partial Y}(X,1)=0 \text{ ve } \frac{\partial U}{\partial X}(0,Y)=\frac{\partial U}{\partial X}(1,Y)=0 \qquad (27b)$$

yazılır. DQ metodu bu sınır koşullarına uygulanırsa

$$U_{1j}=U_{Nj}=0 \text{ ve } U_{i1}=U_{iN}=0 \qquad (28a)$$

$$U_{1j}=U_{Nj}=0 \text{ ve } U_{i1}=U_{iN}=0 \qquad (28b)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} A_{1k}U_{kj}=\sum_{k=1}^{N_x} A_{Nk}U_{kj}=0 \qquad (28c)$$

$$\sum_{k=1}^{N_y} A_{1k}U_{ik}=\sum_{k=1}^{N_y} A_{Nk}U_{ik}=0 \qquad (28d)$$

$i = 1,2,.....,N_x$ ve $j = 2,3,....,N_y-1$ için

<u>2- Dört kenar basit mesnetli (S-S -S-S) :</u> Deplasman ve momentlerin kenarlarda sıfır olması şartından

$$U(X,0)=U(X,1)=0 \text{ ve } U(0,Y)=U(1,Y)=0 \qquad (29a)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}(X,0)=\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}(X,1)=0 \text{ ve } \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(0,Y)=\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}(1,Y)=0 \qquad (29b)$$

elde edilir. DQ metodu bu sınır koşulları için tekrar uygulanırsa

$$U_{1j}=U_{Nj}=0 \text{ ve } U_{i1}=U_{iN}=0 \qquad (30a)$$

$$U_{1j}=U_{Nj}=0 \text{ ve } U_{i1}=U_{iN}=0 \qquad (30b)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} B_{1k}U_{kj}=\sum_{k=1}^{N_x} B_{Nk}U_{kj}=0 \qquad (30c)$$

$$\sum_{k=1}^{N_y} B_{1k}U_{ik}=\sum_{k=1}^{N_y} B_{Nk}U_{ik}=0 \qquad (30d)$$

$i = 1,2,.....,N_x$ ve $j = 2,3,....,N_y-1$ için

<u>3- Kenarlar serbest mesnetli (F-F-F-F)</u> : Bu mesnet koşulu için sınır şartları

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\upsilon k^2\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}=0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^3 U}{\partial X^3}+(2-u)k^2\frac{\partial^3 U}{\partial X\partial Y^2}=0 \qquad (31a, 31b)$$

X = 0, 1 noktalarında

$$k^2\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}+\upsilon\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}=0 \quad \text{ve} \quad k^2\frac{\partial^3 U}{\partial Y^3}+(2-u)\frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial Y}=0 \qquad \text{(32a, 32b)}$$

Y = 0, 1 noktalarında

ve iki bitişik kenarın köşe noktası için

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}=0 \qquad (33)$$

Diğer sınır şartları için yazılan sınır koşullarına benzer olarak

$$\sum_{k=1}^{N_x} B_{Nk} U_{kj} + u\, k^2 \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm} U_{im} = 0 \qquad \text{(34a)}$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} C_{mk} U_{kj} + (2-u) k^2 \sum_{k=1}^{N_x} A_{mk} \sum_{m=1}^{N_y} B_{jm} U_{km} = 0 \qquad \text{(34b)}$$

X = 1 kenar noktası için

$$k^2 \sum_{m=1}^{N_y} B_{nm} U_{im} + u \sum_{k=1}^{N_x} B_{mk} U_{kn} = 0 \qquad \text{(35a)}$$

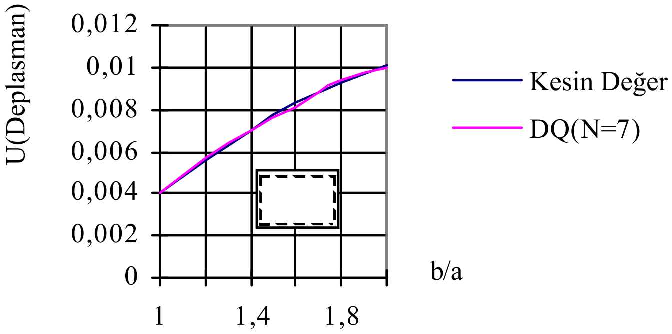
$$k^2 \sum_{m=1}^{N_y} C_{nm} U_{im} + (2-u) \sum_{k=1}^{N_x} B_{ik} \sum_{m=1}^{N_y} A_{nm} U_{km} = 0 \qquad \text{(35b)}$$

Y = 1 kenarı için

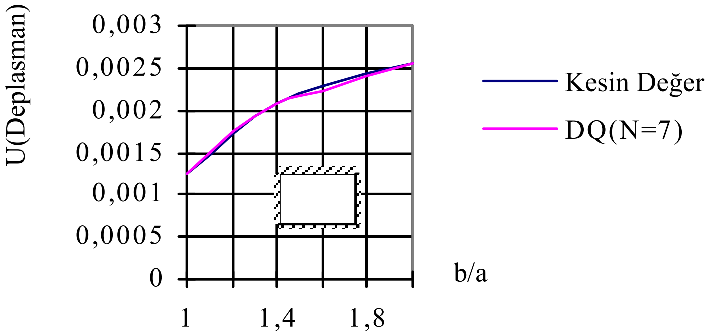
İki bitişik kenarın birleştiği köşe için

$$\sum_{k=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} A_{ik} B_{jm} U_{km} = 0 \qquad (36)$$

olarak verilir. Yukarıda verilmiş olan denklemler dikdörtgen ve kare geometrisine sahip ince plak için çözülmüştür. Kenar boyutları eşit kare bir plak için orta nokta deplasmanı (Çizelge 1) ve dikdörtgen bir plak için deplasman değeri bütün kenarların basit mesnet ve bütün kenarların ankastre mesnet olması durumunda b/a' nın çeşitli değeri için elde edilmiştir (Şekil 2, Şekil 3). Elde edilen değerler mümkün olduğu durumda kesin değerler ile ve diğer sayısal yöntemler ile bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Izgara sayısı 15 için bulunan sonuçlar kesin değerler ile çakışmıştır.



Şekil 2. Basit mesnetli dikdörtgen plak için deplasman değerleri



Şekil 3. Ankastre mesnetli dikdörtgen plak için deplasman değerleri

Çizelge 1. Kare bir plağın x = y = a /2 noktasındaki deplasman değeri

b/a=1 Kare plak	Kesin değer (Timoshenko, 1959)	DQM(7*7) Bu çalışma	DQM(9*9) Bu çalışma	DQM(15*15) Bu çalışma	Sonlu elemanlar (Civalek,1998)	GDQ(9*9) Du ve diğ,1994
(S-S-S-S)	0.00406	0.00401	0.00406	0.00406	0.00405	0.00406
(C-C-C-C)	0.00126	0.00122	0.00125	0.00126	0.00128	0.00126

Çalışmada diferansiyel quadrature metodu ile dikdörtgen ve kare plakların statik analizi verilen sınır koşulları altında çözülmüştür. Sonuçların yaklaşıklığı, gerektirdiği hesaplayıcı kapasitesi ve uygulama alanının çeşitliği dikkate alınınca, metodun son yıllarda yaygın olarak kullanılmasının nedenleri anlaşılmaktadır. Diğer yaklaşık yöntemler ile kıyaslandığında çok küçük ızgara sayısı ile yüksek hassasiyette sonuçlar bulunabilmesi komplike problemler için metodun gerektireceği hesaplayıcı kapasitesi ve hesap süresinde ekonomi sağladığını göstermektedir (Liew vd., 1999; Kukreti vd., 1992; Jang, 1989). Yeni yaklaşım fonksiyonları ve ağırlık katsayılarının hesaplanmasında yeni yaklaşımların ortaya konulması ile metot artık evrensel olarak bilinen ve uygulanan bir yöntem olmuştur (Farsa vd., 1993, Du ve Lin, 1994, Bert vd., 1993; Civalek, 2001).

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Fiziksel bir sistemin matematik modelinin elde edilmesi, mühendislik uygulamalarındaki ilk aşamadır (Civalek, 2002). Bu denklem; sistemin sürekli ve ayrık kabul çözümüne göre, kısmi veya adi türevli bir diferansiyel, bir integral veya bir lineer denklem olur. Mühendisliğin; akışkanlar ve katı cisimler mekaniği, sürekli ortamlar mekaniği gibi alanlarında karşılaşılan denklemler genelde lineer yada nonlineer türde bir kısmi diferansiyel denklem olmakta ve problem bir sınır değer veya başlangıç değer probleminin çözümüne indirgenmektedir. Elde edilen sınır değer formundaki bu tür denklemlerin çözümü ikinci bir aşama olup, kapalı matematik çözüm çoğu durumda mümkün olmamaktadır. Bu aşamada mevcut sayısal analiz tekniklerinden faydalanılır.

Günümüzde, sonlu farklar ve sonlu elemanlar daha hassas sonuçlar vermekte ancak hala yüksek sayıda ızgara (mesh generation) gerekmektedir. Bu ise çözüm için gerekli hesaplayıcı kapasitesi ihtiyacını ve analiz süresini artırmaktadır. Daha az ızgara kullanarak daha kısa sürede sonuca ulaşma çabaları neticesinde 1970'li yılların ilk yarısında Richard Belmann tarafından diferansiyel quadrature yöntemi önerilmiştir. Bununla birlikte yöntem; ağırlık katsayılarının hesaplanmasındaki güçlüklerin giderilmesi ve kullanılan yaklaşım fonksiyonlarının bulunmasından sonra yaygınlaşmış ve ancak 1987 yılında yapı mekaniği ve akışkanlar mekaniği problemlerine başarıyla uygulanmıştır (Bert ve Malik., 1996; Bert vd., 1993; Bert ve Malik, 1996; Civan ve Sliepcevich, 1984; Han ve Liew, 1997; Mingle, 1977). Günümüze kadar son on yıl içinde plak ve kirişlerin statik, dinamik ve stabilite hesabına başarıyla uygulanmış olup, metodun harmonik DQ, genelleştirilmiş DQ gibi farklı versiyonları geliştirilmiştir. Sonlu elemanlarda seçilen yaklaşım fonksiyonu eleman bazında iken DQ metodunda tüm sistem için geçerlidir. Ritz metodunda seçilen polinom fonksiyonu sınır koşullarını sağlamalıdır. Bununla birlikte DQ metodunda böyle bir zorunluluk yoktur. Sonlu farklar metodu problemin çözümüne seriler ile yaklaşım kurarken, DQ metodunda polinom yaklaşım kurulur. Bunlara ilaveten daha az ızgara noktası ile daha kısa sürede ve daha düşük kapasitede hesaplayıcı ile çok hassas sonuçlar elde edilebilmesi metodun en belirgin avantajıdır (Bert ve Malik, 1996; Sherbourne ve Pandey, 1991). Yüksek sayıda düğüm noktası kullanılan problemlerde ağırlık katsayılarının hesaplanmasındaki güçlükler ise metodun gözüken tek dezavantajıdır. Ancak metodun genelleştirilmiş diferansiyel quadrature ve harmonik diferansiyel quadrature adıyla bilinen versiyonu bu güçlüğü de ortadan kaldırmıştır (Liew,1999; Shu ve Richards, 1992).

KAYNAKLAR

Bayın S.Ş. (2000): "Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler", ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayınları, Ankara.

Bellman R., Casti J. (1971): "Differential Quadrature And Long-Term Integration", Journal Of Mathematical Analysis and Applications, 34, pp. 235-238.

Bellman R., Kashef B.G., Casti J. (1972): "Differential Quadrature: A Technique For The Rapid Solution Of Nonlinear Partial Differential Equation", Journal of Computational Physics, 10, pp. 40-52.

Bert C.W., M Malik (1996): "The Differential Quadrature Method For Irregular Domains And Application To Plate Vibration", Int. J. Mech. Sci., Vol. 38(6), pp. 589-606.

Bert C.W., Wang Z., Striz A. G. (1993): "Differential Quadrature For Static and Free Vibration Analysis of Anisotropic Plates"., International Journal Of Solids and Structures, 30(13), pp. 1737-1744.

Björck A., Pereyra, V., (1970): "Solution of Vandermonde System of Equations", Math. comput., Vol. 24, pp. 893-903.

Celia M.A., Gray W.G. (1992): "Numerical Methods for Differential Equations, Fundamental Concepts for Scientific and Engineering Applications", Prentice Hall, New Jersey.

Civalek Ö. (1998): "Plak ve Kabukların Sonlu Elemanlar Metoduyla Analizi", Yüksek lisans semineri, Fırat Üniversitesi.

Civalek Ö. (1996): "Düzlem Kafes ve Çerçeve Elemanların Sonlu Elemanlar Metoduyla Analizi", Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi.

Civalek Ö. (2001): "Diferansiyel Quadrature Metodu ile Elastik Çubukların Statik, Dinamik Ve Burkulma Analizi", XVI Mühendislik Teknik Kongresi, Kasım, ODTU, Ankara.

Civalek Ö. (2002): "Düzlem Kafes ve Çerçeve Sistemlerin Lineer Olmayan Analizi", Doktora Semineri, Dokuz Eylül Üniversitesi Fenbilimleri Enstitüsü, İzmir.

Cıvan F., Sliepcevıch C.M. (1983): "Application of Differential Quadrature To Transport Process.", Journal of Mathematical Analysis And Applications, 93, pp. 206-221.

Civan F., Sliepcevich C.M. (1984): "On The Solution of The Thomas- Fermi Equation By Differential Quadrature.", Journal of Computational Physics, 56, pp. 343-348.

Crandall S.H. (1968): "Mühendislik Analizi, Sayısal Hesap Metotlarına Genel Bakış"¸ Çevirenler: Utku, Ş., Özden, E.Y., Berksoy matbaası.

Çakıroğlu A., Özmen G., Özden E. (1974): "Yapı Sistemlerinin Hesabı İçin Matris Metotları Ve Elektronik Hesap Makinası Programları", Cilt II, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.

Du H. Lim, Lin M.K., R.M. (1994): "Application of Generalized Differential Quadrature Method To Structural Problems.", International Journal For Numerical Methods In Engineering, 37, pp. 1881-1896.

Farsa J., Kukreti A.R., Bert C.W. (1993): "Fundamental Frequency Analysis of Laminated Rectangular Plates by Differential Quadrature Method.", "International Journal for Numerical Methods In Engineering", 36, pp. 2341-2356.

Hasanov A.H. (2001): "Varyasyonel Problemler Ve Sonlu Elemanlar Yöntemi", Literatür yayınları, İstanbul.

Hamming R.W. (1973): "Numerical Methods for Scientists and Engineers", McGraw-Hill, New York.

Han J.B., Liew K.M. (1997): "Analysis of Moderately Thick Circular Plates Using Differential Quadrature Method", Journal of Eng. Mech., ASCE, Vol. 123 (12), pp. 1247-1252.

Jang S.K., Bert C.W., Striz A.,G. (1989) "Application of Differential Quadrature to Static Analysis of Structural Components", International Journal For Numerical Methods in Engineering, 28, pp.561-577.

Kukreti A.R., Farsa J., Bert C.W. (1992): "Fundamental Frequency of Tapered Plates By Differential Quadrature.", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 118(6), pp. 1221-1238.

Liew K.M., Teo T.M., Han J.B. (1999): "Comparative Accuracy of DQ And HDQ Methods for Three- Dimensional Vibration Analysis of Rectangular Plates", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45, pp. 1831-1848.

Mıtchell A.R. (1976): "Computational Methods in Partial Differential Equations", John Wiley.

Mingle J.O. (1977): "The Method Of Differential Quadrature For Transient Nonlinear Diffusion.", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 60, 559-569.

Sherbourne A.N., Pandey M.D. (1991): "Differential Quadrature Method in The Buckling Analysis of Beams and Composite Plates.", Computers & Structures, 40(4), pp. 903-913.

Shu C., Richards B.E. (1992): "Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two- Dimensional Incompressible Navier -Stokes Equations", International Journal for Numerical Methods In Fluids, 15, pp.791-798.

Shu C., Du H. (1997): "Implementation of Clamped and Simply Supported Boundary Conditions in GDQ Free Vibration Analysis of Beams And Plates", International Journal Of Solids and Structures, 34(7), pp. 819-835.

Timoshenko S., Krieger W.S. (1959): "Theory of Plates and Shells", 2nd Ed. McGraw-Hill, New York.