DEÜ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
FEN ve MÜHENDİSLİK DERGİSİ
Cilt: 6 Sayı: 1 sh. 129-138 Ocak 2004

CEBİRSEL KATSAYILI HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN FARK DENKLEMLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

(*SOLUTION OF HOMEGENEOUS DIFFERANTIAL EQUATIONS WITH ALGEBRAIC COEFFICIENTS BY FINITE DIFFERENCE EQUATIONS*)

Seval ÇATAL*

ÖZET/*ABSTRACT*

Genel olarak, değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemler, kendine has özellikler içerdiklerinden kapalı çözümlerinin elde edilebilmeleri için genel bir yöntem yoktur. Bu çalışmada bu tür diferansiyel denklemlerin bazı tiplerinin kapalı çözümleri fark denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca çalışmada bazı cebirsel katsayılı diferansiyel denklemlerin sabit katsayılı fark denklemine indirgenmesi halinde elde edilen kapalı çözümü üzerinde durulmuş ve sayısal örnekler sunulmuştur.

There is no a general method for evaluating the implicit solutions of homogeneous differential equations since they generally have individual properties. In this study, the implicit solutions for some types of these differential equations are obtained by using finite difference equations. The implicit solution obtained by reducing some differential equations with algebraic coefficient to finite difference equations with constant coefficient is also considered and numerical examples are presented.

ANAHTAR KELİMELER/*KEY WORDS*

Adi diferansiyel denklemler, Fark denklemi, Cebirsel denklemler.
Ordinary differential equations, Difference equation, Algebra tic equations.

* Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Müh. Bölümü, Buca, İZMİR

1. GİRİŞ

Fark denklem, bir ve daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Fonksiyonel denklemler olarak da isimlendirilen fark denklemler, diferansiyel denklemlere benzerlik gösterirler. Fakat inceleme süreci yönünden, diferansiyel denklemlerden daha yenidir. Diferansiyel denklemler 200 yılı aşan bir sürede incelendiği halde, fark denklemler 100 yıllık bir inceleme sürecinde sistematik hale gelmiştir.

Diferansiyel denklemlerin vazgeçilmez bilimsel öneminde "doğada kopukluklar yoktur" yanlış varsayımına yer veriliyordu. Bu eski hipoteze göre, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Bu nedenle diferansiyel denklemler, fizik bilimine özgü matematiksel ifadeler olarak kabul ediliyordu. Fakat 20. yüzyıl başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir.
Eski yunanlılara göre, doğa olaylarında görülen süreklilik ile kesiklilik arasındaki zıtlaşma, doğadaki sürekliliğin bir aldatmacısıydı. Günümüzde diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemler kullanılarak ortadan kaldırılmak istenmiştir.

Sonlu fark işlemleri Newton ile yayılmaya başlamış, Poincaré kadar uzanmıştır, Boole ile zirveye ulaşmıştır. Daha sonra Laplace fark denklem üzerinde çalışmıştır. 1825 yılından önce doğrusal fark denklemler ele alınmamıştı. 1885 yılında Poincaré ile doğrusal fark denklem teorisine girilmiş, Lagrange doğrusal diferansiyel denklemin sabit katsayılı olması durumunda çözümünü elde etmiş, Guichard 1887'de ikinci yandaki fonksiyonun polinom olması durumundaki çözümünü incelemiş, Gelgrun asimptotik çözümler üzerinde çalışmış, Birkhoff ve Carmichael bu çalışmaları genişletmişlerdir. Liouville ve Sturm ikinci mertebeden self-adjoint doğrusal diferansiyel operatörünün üzerinde çalışmalar yapmış ve kendi isimleri ile anılan Sturm-Liouville fark denkleminin çözümünü ifade etmişlerdir. March Artznouni, değişken katsayılı doğrusal fark denklemin asimptotik üstel çözümlerinin özelliklerini geliştirmiş; Hooker, Riccati denklemini geliştirmiş; Popenda, ikinci mertebeden fark denklemin osilasyonlu ve osilasyonsuz durumlarındaki teoremleri geliştirmiş ve çözümleri için bazı atıflarda bulunmuştur (Artznouni, 1987; Hooker, 1987; Popenda, 1987a; Popenda, 1987b). Kaczorek, n'inci mertebeden homojen olmayan değişken katsayılı doğrusal fark denklemin implicit formdaki çözümlerini vermiştir (Kaczorek, 1985). Abramov, polinom katsayılı keyfi dereceli fark denklemlerin rasyonel çözümlerini vermiştir (Abramov, 1989). Tuzik, değişken katsayılı konvolüsyon tipteki fark denklemlerin çözülebilirliğine değinmiştir (Tuzik, 1989).

2. FARK DENKLEMİN TANIM VE ÖZELLİKLERİ

Diferansiyel denklemler, fonksiyonların sonlu farkları arasındaki bağıntı olarak tanımlanan fark denklem olarak ifade edilebilirler. Bu bağıntının özellikleri diferansiyel denklemlerde olduğu gibidir. Genel olarak fark denklem aşağıdaki kapalı form ile tanımlanır.

$$F[n, y(n), y(n+1), ..., y(n+r)] = 0 \qquad (1)$$

Eşitlik 1 ile tanımlı fark denklemler, katsayıları cinsinden sabit ve değişken katsayılı olarak ikiye ayrılırlar. Eğer fark denklemde A_0, A_1, A_2, ..., A_r'ler sabitler ise r'inci mertebeden sabit katsayılı fark denklem açık olarak aşağıdaki formda tanımlıdır.

$$A_r\, y(n+r) + A_{r-1}\, y(n+r-1) + ... + A_1\, y(n+1) + A_0\, y(n) = F(n) \qquad (2)$$

Eğer denklemde $A_1(n)$, $A_2(n)$, ..., $A_r(n)$'ler n nin fonksiyonu ise r'inci mertebeden değişken katsayılı fark denklem açık olarak aşağıdaki formda tanımlıdır.

$$A_r(n)\, y(n+r) + A_{r-1}(n)\, y(n+r-1) + ... + A_1(n)\, y(n+1) + A_0(n)\, y(n) = F(n) \quad (3)$$

Eşitlik 2 ve Eşitlik 3'de F(n) = 0 ise denklem homojen olarak isimlendirilir.

Yüksek mertebeden sabit katsayılı homojen denklemin çözümünde $y(n) \neq 0$ olarak tanımlı olmak üzere Eşitlik 2'de F(n) = 0 alınarak elde edilen Eşitlikte, $\alpha^r \neq 0$ çözüm fonksiyonu yazıldığında aşağıdaki karakteristik denklem elde edilir.

$$A_r\, \alpha^r + A_{r-1}\, \alpha^{r-1} + A_{r-2}\, \alpha^{r-2} + ... + A_1\, \alpha + A_0 = 0 \quad (4)$$

Eğer 4'nolu karakteristik denklemin kökleri:

(i) $r_1, r_2, ..., r_m \in R$ olmak üzere reel ve farklı ise çözüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$y(n) = C_1\, (r_1)^n + C_2\, (r_2)^n + ... + C_m\, (r_m)^n \quad (5)$$

(ii) $r_1 = r_2 = ... = r_k$, $r_{k+1}, r_{k+2}, ..., r_m \in R$ şekline tanımlı ise çözüm fonksiyonu aşağıdaki formdadır.

$$y(n) = (C_1 + C_2\, n + ... + C_k\, n^{k-1})\, (r_k)^n + C_{k+1}\, (r_{k+1})^n + ... + C_m\, (r_m)^n \quad (6)$$

(iii) $a + ib = \alpha$ ve $a - ib = \beta$ olacak şekilde sanal olarak tanımlı ise çözüm C ve D keyfi sabitler olmak üzere aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(n) = A\, (\alpha)^n + B\, (\beta)^n = (a^2 + b^2)^{n/2}\, C\, Cos(n\theta + D) \quad (7)$$

Burada; $(a^2 + b^2)^{n/2}$ uzunluk; $n\theta$ ise periyot olmak üzere y(n) çözüm fonksiyonunun periyodik salınımlı olduğunu ifade eder. Sabit katsayılı homojen olmayan doğrusal denklemin çözümü ise diferansiyel denklemlerde olduğu gibi parametrelerin değişimi, belirsiz katsayılar, operatör ve seri yöntemleri kullanılarak elde edilir.

Sabit katsayılı yüksek mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri elde edilebilmesine rağmen değişken katsayılı yüksek mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümü için genel bir yol yoktur. Burada fen ve mühendislik dallarında çeşitli uygulamalara sahip olan yüksek mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlerin fark denklemleri ile çözümleri üzerinde durulacaktır.

Değişken katsayılı yüksek mertebeden doğrusal diferansiyel denklemlerin çözümleri:

(i) m*ertebe indirgeme yolu ile* önce dönüşüm ile elde edilen homojen denklem çözülür sonra da ikinci yanlı denklem çözülür.

(ii) *çarpanlara ayırma yolu ile* denklem birinci mertebeden ardışık denklemin çözümüne indirgenerek elde edilir.

(iii) *yerine koyma yöntemi ile* sabit katsayılı forma indirgenerek çözüm elde edilir.

Ancak uygun dönüşümleri her zaman bulmak kolay değildir. Eğer diferansiyel denklem Cauchy-Euler veya Legendre diferansiyel denklem formunda ise sabit katsayılı forma indirgenir ve karakteristik denklemin köklerini çözüm fonksiyonu kabul eden aranan çözüm elde edilir. Bu çalışmada değişken katsayılı denklem Cauchy-Euler veya Legendre diferansiyel denklem formunda değil de cebirsel katsayılı ise çözüm nasıl elde edilir sorusuna yanıt aranmıştır.

2.1. Birinci Mertebeden Değişken Katsayılı Denklemler

Birinci mertebeden değişken katsayılı doğrusal denklem $A(n) \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$A(n)\, y(n+1) + B(n)\, y(n) = C(n) \tag{8}$$

Eşitlik 8'de p(n) = B(n) / C(n), q(n) = C(n) / A(n) olarak seçilirse aşağıdaki forma indirgenir.

$$y(n+1) + p(n)\, y(n) = q(n) \tag{9}$$

Burada p(n) ve q(n) fonksiyonları n'nin tüm integral değerleri için tanımlıdır. Eşitlik 9'da q(n) = 0 ise eşitlik birinci mertebeden homojen fark eşitliği olarak isimlendirilir ve çözüm, p(n+1) + 1 = P(n) dönüşümü ile A, keyfi sabiti göstermek üzere y(0)=A başlangıç koşulu altında aşağıdaki şekilde bulunur.

$$y(n) = A \prod_{k=0}^{n-1} P(k) \tag{10}$$

Genel birinci mertebeden homojen olmayan doğrusal eşitlik $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$ şeklinde tanımlı ileri fark operatörü cinsinden aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\Delta y(n) + P(n)\, y(n) = Q(n) \tag{11}$$

Eşitlik 11'in çözümü ise C keyfi sabit olmak üzere aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - P(k)) \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} \frac{Q(t)}{\prod_{k=0}^{t} \left[1 - P(k)\right]} + C \right\} \tag{12}$$

Bazen birinci mertebeden eşitlikler daha karmaşık olabilir. Bu durumda eşitlik çözülürken y(n) bağımlı değişkeni bir başka bağımlı değişken cinsinden tanımlanıp çözüm elde edilir veya özel fonksiyonlardan olan Gamma fonksiyonları ile ilişkilerinden yararlanılarak çözümleri elde edilir.

2.2. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Denklemler

P(n), Q(n) ve R(n) n'nin fonksiyonları olarak tanımlanmak üzere ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan eşitlik aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$y(n+2) + P(n)\, y(n+1) + Q(n)\, y(n) = R(n) \tag{13}$$

Eğer Eşitlik 13'te R(n) = 0 ise ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen eşitlik olarak isimlendirilir.

Eşitlik 13'ün çözümü A ve B keyfi sabitleri göstermek üzere; u(n) ve v(n) homojen eşitlik esas çözüm fonksiyonlarını; S(n) ikinci yanlı eşitliğin çözümü yani özel çözümü olmak üzere aşağıdaki bağıntı ile tanımlanır (Levy ve Lesman, 1959).

$$y(n) = A\, u(n) + B\, v(n) + S(n) \tag{14}$$

Eşitlik 14'ün çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

(I) Eşitliğin homojen kısmının çözümü biliniyor ise,

u(n) yeni değişken Y(n) denklemi sağlayan fonksiyon olmak üzere; y(n)=Y(n).u(n) dönüşümü ile E basamak operatörü olmak üzere ikinci mertebeden değişken katsayılı eşitlik birinci mertebeden değişken katsayılı eşitliğe aşağıdaki formda indirgenir.

$$[E - Q(n)]\,[Y(n)\, y(n+1) - Y(n+1)\, y(n)] = Y(n+1)\, R(n) \tag{15}$$

Eşitlik 15'in çözümü ise birinci mertebeden eşitliğin çözümünde olduğu gibi bulunur.

(II) Eşitliğin homojen kısmının çözümü bilinmiyor ise,

b(n) ve c(n) n'nin fonksiyonları olmak üzere; u(n)=b(n).y(n+1)+c(n).y(n) şeklinde tanımlı fonksiyon Eşitlik 13'ün yerine yazılır ve bazı düzenlemeler yapılır ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$u(n+1) + S(n)\,u(n) = b(n+1)\,y(n+2) + [b(n)\,S(n) + c(n+1)]\,y(n+1) + S(n)\,c(n)\,y(n) \qquad (16)$$

Eşitlik 13 ile Eşitlik 16'nın katsayıları arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibidir.

$$b(n)\,S(n) + c(n+1) = b(n+1)\,P(n) \qquad (17)$$

$$b(n+1)\,Q(n) = c(n)\,S(n) \qquad (18)$$

Eşitlik 18'den c(n) çekilir, c(n+1) türetilir ve Eşitlik 17'de yerine yazılırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$b(n+2)\,Q(n+1) - b(n+1)\,S(n+1)\,P(n) + b(n)\,S(n)\,S(n+1) = 0 \qquad (19)$$

Eşitlik 19'da P(n), Q(n) verilen fonksiyonlar; b(n) ve S(n) henüz tanımlı olmayan fonksiyonlardır. b(n) ve S(n) fonksiyonlarından birisini aşağıdaki gibi seçebiliriz:

(a) S(n) = P(n) / P(n+1) şeklinde keyfi olarak seçildiğinde aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$b(n+2)\,Q(n+1)\,P(n+2) - b(n+1)\,P(n+1)\,P(n) + b(n)\,P(n) = 0$$

(b) S(n) = Q(n) seçildiğinde Eşitlik 18'den b(n+1) = c(n) olarak elde edilen ifade Eşitlik 17'de yerine yazılırsa, aşağıdaki gibi ikinci mertebeden homojen eşitlik elde edilir.

$$b(n+2) + P(n)\,b(n+1) + Q(n)\,b(n) = 0$$

(c) S(n) = -1 olarak seçilirse ve

$$b(n+1)\,Q(n) = -\,c(n)$$

bağıntısı Eşitlik 17'de yerine yazılırsa b(n) ve b(n+1) toplam yada integral çarpanı olan denklem aşağıdaki gibi elde edilir (Levy ve Lesman, 1959).

$$Q(n+1)\,b(n+2) + P(n)\,b(n+1) + b(n) = 0 \qquad (20)$$

Şimdiye kadar ikinci mertebeden değişken katsayılı denklemlerin bilinen çözüm yollarından bahsedilmiştir. İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerde olduğu gibi fark denklemlerin de bazı karakteristik özellikleri vardır ki bu özelliklerden bazılarına aşağıda yer verilmiştir.

3. BAZI ÖZEL TİP DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

3.1. İkinci Mertebeden Denklem

I. $y^{11} + a(x)\,y^{1} + b(x)\,y = 0$ şeklindeki ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemi:

A. $y(n+2) + A(n)\,y(n) = 0$

Formundaki fark denklemine indirgenirse, bu denklemin çözümü A(n)≠0 , y(0) ve y(1) keyfi sabitleri göstermek üzere aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$y(n-1)y(n) = (-1)^{n-2}\,y(0)y(1)\prod_{k=0}^{n-2} A(k)$$

B. $A(n)\,y(n+2) + B(n)\,y(n+1) + C(n)\,y(n) = 0$

Formundaki fark denklemine indirgenirse, burada A(n)≠0 ve B(n)=0 olduğunda aşağıdaki form elde edilir.

y(n+2) = -[C(n) / A(n)] y(n)

Burada y(0) ve y(1) keyfi sabitler olmak üzere çözüm aşağıdaki şekilde yazılır.

$$y(n)y(n+1) = (-1)^{n-1}\, y(0)y(1)\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{C(k)}{A(k)}\right)$$

II. $A(x)\, y^{II} + 2\, A^{I}(x)\, y^{I} + A^{II}(x)\, y = 0$ şeklindeki ikinci mertebeden değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemi:

A. $A(x) = ax^2 + bx + c;$

$A^{I}(x) = 2ax + b;$

$A^{II}(x) = 2a$

olduğunda aşağıdaki seri dönüşüm yardımı ile ikinci mertebeden diferansiyel denklem sabit katsayılı fark denklemine indirgenir (Alku, 1992).

$$y(x) = y(0) + y(1)\, x + y(2)\, x^2 + ... + y(n)\, x^n + y(n+1)\, x^{n+1} + y(n+2)\, x^{n+3} + ...$$

$$y^{I}(x) = y(1) + ... + (n+1)\, y(n+1)\, x^n + (n+2)y(n+2)\, x^{n+1} + (n+3)y(n+3)\, x^{n+2} + ... \qquad (21)$$

$$y^{II}(x) = 2y(2) + ... + (n+2)(n+1)\, y(n+2)\, x^n + (n+3)(n+2)y(n+3)\, x^{n+1} + ...$$

$$c\, y(n+2) + b\, y(n+1) + a\, y(n) = 0 \qquad (22)$$

Eşitlik 22'de y(n) yerine α^n yazılarak aşağıdaki karakteristik denklem elde edilir.

$$c\, \alpha^2 + b\, \alpha + a = 0$$

$\alpha^n \neq 0$ olmak üzere ikinci dereceden karakteristik denklemin kökleri $\alpha_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ *ve* $\alpha_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ şeklinde olup A ve B keyfi sabitler olmak üzere 22'nolu fark denklemin çözümü aşağıdaki formda yazılır.

$$y(n) = A\, (\alpha_1)^n + B\, (\alpha_2)^n$$

Diferansiyel denklemin çözümü ise aşağıdaki gibidir.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A\, (\alpha_1)^n + B(\alpha_2)^n\right] x^n$$

B. $A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;$

$^{I}(x) = 3ax^2 + 2bx + c;$

$A^{II}(x) = 6ax + 2b;$

$A^{III}(x) = 6a$

olduğunda 21'nolu seri dönüşüm yardımı ile ikinci mertebeden diferansiyel denklem sabit katsayılı fark denklemine indirgenir.

$$d\, y(n+3) + c\, y(n+2) + b\, y(n+1) + a\, y(n) = 0 \tag{23}$$

Eşitlik 23'ün karakteristik denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$d\, \alpha^3 + c\, \alpha^2 + b\, \alpha + a = 0$$

Üçüncü dereceden denklemin kökleri, Cardano formulünden bulunarak çözüm aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(n) = A\, (\alpha_1)^n + B\, (\alpha_2)^n + C(\alpha_3)^n$$

C. Genel olarak $A(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ formunda olduğunda ise fark denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$(n+2)(n+1)\, [\, a_0\, y(n+2) + a_1\, y(n+1) + a_2\, y(n) + ... + a_n\, y(2)] = 0 \tag{24}$$

Eşitlik 24'ün karakteristik denklemi n'inci dereceden bir polinoma karşı gelir. n'inci dereceden denklemin kökleri istenen çözüm fonksiyonlarını oluşturur.

B ve C şıklarında diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit olacağından karakteristik denklemin kökleri birbiri cinsinden ifade edildiğinde diferansiyel denklemin mertebesi kadardır.

3.2. Üçüncü Mertebeden Denklem

Eğer üçüncü mertebeden diferansiyel denklem aşağıdaki formda ise

$$A(x)\, y^{III} + 3\, A^{I}(x)\, y^{II} + 3A^{II}(x)\, y^{I} + A^{III}(x)\, y = 0$$

A. $A(x) = ax^2 + bx + c;$

$A^{I}(x) = 2ax + b;$

$A^{II}(x) = 2a$

olduğunda 21'nolu seri dönüşüm yardımı ile sabit katsayılı fark denklemine aşağıdaki gibi indirgenir.

$$c\, y(n+3) + b\, y(n+2) + a\, y(n+1) = 0 \tag{25}$$

Bu denklemin karakteristik denklemi $(c\, \alpha^2 + b\alpha + a)\, \alpha = 0$ olup karakteristik denklemin kökleri fark denklemin çözüm fonksiyonları olup aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(n) = A\, (0)^n + B\, (\alpha_1)^n + C\, (\alpha_2)^n$$

Diferansiyel denklemin çözümü ise aşağıdaki şekildedir.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A\, (\alpha_1)^n + B(\alpha_2)^n \right] x^n$$

B. $A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;$

$A^{I}(x) = 3ax^2 + 2bx + c;$

$A^{II}(x) = 6ax + 2b;$

$A^{III}(x) = 6a$

olduğunda 21'nolu seri dönüşüm yardımı ile üçüncü mertebeden diferansiyel denklem 23'nolu sabit katsayılı fark denklemine indirgenir ve üçüncü dereceden denklemin kökleri fark denklemin çözüm fonksiyonlarıdır.

C. $A(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e;$

$A^{I}(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d;$

$A^{II}(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c;$

$A^{III}(x) = 24ax + 6b$

olduğunda 21'nolu seri dönüşüm yardımı ile üçüncü mertebeden diferansiyel denklem aşağıdaki sabit katsayılı fark denklemine indirgenir.

$$e\, y(n+4) + d\, y(n+3) + c\, y(n+2) + b\, y(n+1) + a\, y(n) = 0 \qquad (26)$$

26'nolu fark denklemin karakteristik denklemi dördüncü dereceden denklem olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$e\,\alpha^4 + d\,\alpha^3 + c\,\alpha^2 + b\,\alpha + a = 0$$

Bu karakteristik denklemin çözümü istenen fonksiyonları verecektir.

D. Genel olarak $A(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ formunda olduğunda fark denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$(n+3)(n+2)(n+1)\,[\,a_0\, y(n+3) + a_1\, y(n+2) + a_2\, y(n+1) + ... + a_n\, y(3)] = 0 \qquad (27)$$

Eşitlik 27'nin karakteristik denklemi n'inci dereceden bir polinoma karşı gelir. n'inci dereceden denklemin kökleri istenen çözüm için temel fonksiyonları oluşturur.

C ve D şıklarında, sabitlerin sayısı, diferansiyel denklemin mertebesi kadar olacağından karakteristik denklemin kökleri birbiri cinsinden ifade edildiğinde diferansiyel denklemin mertebesi ile örtüşür.

3.3. Yüksek Mertebeden Denklem

Eğer n'inci mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklem aşağıdaki formda olup

$$\binom{n}{0}A(x)y^{(n)} + \binom{n}{1}A'(x)y^{(n-1)} + ... + \binom{n}{n-1}A^{(n-1)}(x)y' + \binom{n}{n}A^{(n)}(x)y = 0 \qquad (28)$$

Burada diferansiyel denklemin mertebesi n ve A(x) polinom fonksiyonun derecesi r ise aşağıdaki şu sonuçlar elde edilir.

SONUÇ 1: $r < n$ ise $(n - r)$ kadar sıfır çarpanı karakteristik denklemin kökünde yer alır.

SONUÇ 2: $r = n$ ise karakteristik denklemin kökleri r tanedir.

SONUÇ 3: $r > n$ ise karakteristik denklemin kökleri polinomun derecesi olan r tanedir.

4. SAYISAL UYGULAMA

Örnek 1. $(6x^2 - 5x + 1)\, y^{II} + 2(12x - 5)\, y^{I} + 12y = 0$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 1$ ve $y^{I}(0) = 0$ başlangıç koşulu altındaki çözümü aşağıdaki gibidir.

Diferansiyel denklem 21'nolu dönüşümler yardımı ile aşağıdaki fark denklemine indirgenir.

(n+2)(n+1)[y(n+2) – 5y(n+1) + 6y(n)] = 0

Fark denklemin E basamak operatörü cinsinden ifadesi ve karakteristik denklemi sırası ile aşağıdaki şekildedir.

$(E^2 - 5E + 6)\ y(n) = 0$

$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$

Karakteristik denklemin çözümü aşağıdaki gibidir.

$y(n) = A*2^n + B*3^n$

Bu çözüm, başlangıç koşulları altında aşağıdaki formda yazılır.

$y(n) = 3 *2^n - 2 *3^n$

Diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[3*2^n - 2*3^n\right]x^n = 1 - 6x^2 - 30x^3 - ...$$

Örnek 2. $(x^3 + 1)\ y^{II} + 2(3x^2)\ y^{I} + 6x\ y = 0$ diferansiyel denkleminin 21'nolu dönüşümler yardımı ile fark denklemi ifadesi aşağıdaki sabit katsayılı denklem ile ifade edilir.

$y(n+3) + y(n) = 0$

$(E^3 + 1)\ y(n) = 0$

$\alpha^3 + 1 = 0$

Yukarıdaki şekilde ifade edilen karakteristik denklemin kökleri Cardano formüllerinden $\alpha_1 = -1, \quad \alpha_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ olarak bulunur. Fark denklemin ve diferansiyel denklemin çözümleri sırası ile aşağıda verilmiştir.

$$y(n) = A(-1)^n + B\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + C\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n = A(-1)^n + BCos\frac{\pi}{3}n + CSin\frac{\pi}{3}n$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A*(-1)^n + B*Cos\frac{\pi}{3}n + C*Sin\frac{\pi}{3}n\right]x^n = B + (-A + BCos\frac{1}{3} + CSin\frac{1}{3})x + ...$$

Örnek 3. $(x^4 - x^2)\ y^{II} + 2(4x^3 - 2x)\ y^{I} + (12x^2 - 2)\ y = 0$ diferansiyel denklemi 21'nolu bağıntılar yardımı ile aşağıdaki fark denklemine indirgenir.

$y(n+2) - y(n+4) = 0$

$(E^2 - E^4)\ y(n) = 0$

$\alpha^2 - \alpha^4 = 0$

Karakteristik denklemin çözümü sırası ile fark denklemin ve diferansiyel denklemin çözümünü verecektir.

$y(n) = A + B*(-1)^n$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A + B*(-1)^n\right]x^n = A(1 + x + x^2 + x^3 + ...) + B(1 - x + x^2 - x^3 + ...)$$

5. SONUÇ

Bu çalışmada ikinci mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin fark denklemleri ile kapalı çözümleri incelenmiştir. Diferansiyel denklemlerin katsayıları cebirsel yapıda ve Binom açılımına sahip ise diferansiyel denklem sabit katsayılı fark denklemine indirgenebilmektedir. Diferansiyel denklemin, kapalı çözümü fark denklemi ile yapılabilmekte ve bu çözümü diferansiyel denklemin n'inci mertebesine kadar uygulanabilmektedir. Burada uygulanan yöntem değişken katsayılı diferansiyel denklemin kapalı çözümünün elde edilebilmesi bakımından diferansiyel denkleme uygulanan seri yönteminden daha kullanışlıdır. Bu yöntem ile çözüm tekniği daha basit olup işlem karışıklığına sebep olmamaktadır. Ancak yöntemin çözüm algoritması seri yönteminden uzundur.

KAYNAKLAR

Alku S. (1992): "A Solution of Homegeneous Differential Equations with Variable Coefficients by Finite Difference Equations", D.E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İzmir.

Abramov S.A. (1989): "Rational Solutions of of Linear Differantial and Difference Equations with Polynomial Coefficients", Zh.Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 29, no.11, 1611-1620, 1787.

Artzrouni M. (1987): "Conditions for Asymptotically Exponential Solutions of Linear Difference Equations with Variable Coefficients", J. Math. Anal. Appl. 121, no.1, 160-172.

Hooker J.W. (1987): "Oscillatory Second Order Linear Difference Equations and Riccati Equations", Siam J. Math. Anal., 18, no.1, 54-63.

Kaczorek T. (1985): "Extension of the Method of Continuants for n-order Linear Difference Equations with Variable Coefficients", Bull.Polish.Acad.Sci.Tech.Sci. 33, no.7-8, 395-400.

Levy H., Lessman F. (1959): "Finite Difference Equations", Sir Isaac Pitman&Sons Ltd., London.

Popenda J. (1987a): "Oscilation and Nonoscilation Theorems for Second Order Difference Equations", J.Math.Anal.Appl. 123, no.1, 34-38.

Popenda J. (1987b): "One Expression for The Solutions of Second Order Difference Equations", Proc.Amer.Math.Soc. 100, no.1, 87-93.

Tuzik A.I. (1989): "Solvability of a Discrete Equations of Convolution Type with Variable Coefficients", Differentsial'nye Urauneniya 25, no.8, 1462-1464, 1472.