KSÜ Mühendislik Bilimleri Dergisi, 29(3), 2026
Araştırma Makalesi

KSU J Eng Sci, 29(3), 2026
Research Article

Kahramanmaras Sutcu Imam University
Journal of Engineering Sciences

Geliş Tarihi : 13.04.2026
Kabul Tarihi : 10.08.2026

Received Date : 13.04.2026
Accepted Date : 10.08.2026

KALİTE KONTROL, YENİDEN İŞLEME VE STOKSUZLUĞA İZİN VEREN BİR EKONOMİK ÜRETİM MİKTARI MODELİ

AN ECONOMIC PRODUCTION QUANTITY MODEL ALLOWING FOR QUALITY CONTROL, REPAIR AND BACKORDERS

Abdullah EROĞLU [1] (ORCID: 0000-0002-3035-8682)
Harun SULAK [2*] (ORCID: 0000-0001-8286-1813)
Nigar KARAGÜL [3] (ORCID: 0000-0002-3644-408X)
Emel TATAR [4] (ORCID: 0000-0002-0150-6383)

[1] Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, Isparta, Türkiye
[2] Süleyman Demirel Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, Isparta, Türkiye
[3] Pamukkale Üniversitesi, Honaz Meslek Yüksekokulu, Yönetim ve Organizasyon Bölümü, Denizli, Türkiye
[4] Süleyman Demirel Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İşletme Anabilim Dalı, Isparta, Türkiye

*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Harun SULAK, harunsulak@sdu.edu.tr

ÖZET

Üretim sistemlerinde belirli bir oranda kusurlu ürün üretilmesi ile ilgili çalışmalar literatürde önemli ve geniş bir yere sahiptir. Bu çalışmalardaki temel varsayımlar; belirli bir oranda kusurlu üretimin varlığı, kusurlu üretim oranının belirli bir olasılık dağılımına göre dağılması, kusurlu ürünlerin kendi içinde hurda, tamir edilebilir ve defolu olarak sınıflandırılması şeklinde gerçek durumları yansıtmaktadır. Bu çalışmada kusurlu ürünler için stoksuzluğa izin veren bir Ekonomik Üretim Miktarı modeli önerilmektedir. Önerilen modelde inceleme hızının üretim hızından düşük olduğu, normal inceleme faaliyetinin üretim bittikten sonra yapıldığı varsayımı yapılmaktadır. Geliştirilen modelin matematiksel denklemleri elde edilmekte, modelin çalışması ve duyarlılık analizleri sayısal örnekle açıklanmaktadır. Modelde kusurlu ürünler için birim stok maliyeti, stoksuzluk maliyeti ve kusurlu ürün oranı arttıkça birim zamandaki beklenen toplam maliyet artmakta, optimal üretim miktarı ile izin verilen stoksuzluk miktarı azalmaktadır. Diğer taraftan üretime hazırlık maliyeti arttıkça, birim zamandaki beklenen toplam maliyet, optimal üretim miktarı ve izin verilen stoksuzluk miktarı artmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Ekonomik üretim miktarı, kalite kontrol, tamir, stoksuzluk, inceleme

ABSTRACT

Studies on the production of a certain percentage of defective products in production systems have a significant and extensive presence in literature. The fundamental assumptions in these studies are the existence of a certain percentage of defective production, the distribution of the defective production rate according to a specific probability distribution, and the classification of defective products as scrap, repairable, or defective, which reflect very real situations. This study proposes an Economic Production Quantity model that allows shortages and backorders for defective products. The proposed model assumes that the inspection speed is lower than the production speed, and that normal inspection activities are conducted after production is completed. The mathematical equations of model are derived, and the model's operation and sensitivity analyses are illustrated with numerical examples. In the model, as the unit inventory cost, backorder cost and defective product rate increases, the expected total cost per unit time increases, while the optimal production quantity and allowable backorder level decreases. On the other hand, as production setup costs increase, the expected total cost per unit time, the optimal production rate, and allowable backorder level increase.

Keywords: Economic production quantity, quality control, repair, backorders, inspection

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0).

GİRİŞ

Üretimde belirli bir oranda kusurlu üretimin varlığını kabul eden Ekonomik Üretim Miktarı (EPQ) modelleri ile ilgili çalışmalar literatürde oldukça kapsamlı bir yere sahiptir. İlgili çalışmalardaki temel varsayımlar; belirli bir oranda kusurlu üretimin kabulü, kusurlu üretim oranının belirli bir olasılık dağılımına uyması; kusurlu ürünlerin de kendi içinde hurda, tamir edilebilir ve defolu (düşük fiyattan satılan ürünler) olarak sınıflandırılması da kullanılan varsayımlardır. Kusurlu ürünleri sağlam ürünlerden ayırma hızının, üretim hızından büyük, küçük veya eşit olma varsayımlarına göre farklı EPQ modelleri elde edilir ve literatürde yaygın olarak çalışılır. Bu varsayımlara dayanan ilk EPQ modelleri Salameh ve Jaber (2000) ve Hayek ve Salameh (2001) tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Kusurlu ürünlerin üretim süreçlerinde varlığı, EPQ modellerinin gerçekçiliğini artırmak için önemli bir faktördür. Bu alandaki ilk önemli çalışmalardan biri Rosenblatt ve Lee (1986) tarafından yapılmıştır. Onlar, üretim sürecinin zamanla bozulduğunu ve rastgele bir zamanda kusurlu ürünler üretmeye başladığını varsayan bir EPQ modeli önermişlerdir. Bu modelde, kusurlu ürünlerin yeniden işlenebilir olduğu ve hurdaya ayrılmadığı kabul edilmiştir. Çalışmaları, kusurlu üretimin optimal üretim döngüsü süresi üzerindeki etkilerini incelemiş ve optimal üretim döngüsünün klasik EPQ modelinden daha kısa olduğunu göstermiştir. Salameh ve Jaber (2000) ise, sipariş edilen partinin bir kısmının kusurlu kalitede olduğu ve bu kusurlu ürünlerin tek bir parti halinde satıldığı bir envanter modeli sunmuşlardır. Bu model, kusurlu ürünlerin varlığının parti büyüklüğünü değiştirdiğini ve daha düşük elde bulundurma maliyeti ile daha büyük parti büyüklüklerine yol açtığını ileri sürmüşlerdir. Ancak, bu modelde stoksuzluğa izin verilmemiştir. Hayek ve Salameh (2001), kusurlu ürünlerin yeniden işlenmesinin sonlu üretim modeli üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Bu modelde, üretim durduğunda kusurlu ürünlerin sabit bir oranla yeniden işlendiği varsayılmıştır. Ayrıca, stoksuzluğa izin verilmiş ve bekleyen siparişler modele dahil edilmiştir. Bu çalışma, kusurlu ürünlerin yeniden işlenmesi ve stoksuzluğa izin verme konularına odaklanarak Salameh ve Jaber (2000) modelini genişletmiştir. Eroglu ve Ozdemir (2007), Salameh ve Jaber (2000) modelini, stoksuzluğa izin vererek ve bekleyen siparişleri hesaba katarak geliştirmişlerdir. Bu model, her sipariş edilen partinin bir miktar kusurlu ürün içerdiği ve yüzde yüz kalite kontrol sürecinden geçirilerek kusursuz ve kusurlu ürünlerin ayrıldığı varsayımına dayanmaktadır. Kusurlu ürünlerin yüzdesinin optimal çözüm üzerindeki etkisi detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. Krishnamoorthi ve Panayappan (2012), kusurlu üretim, düzenli üretim, yeniden işlenme ve satış iadelerini içeren bir EPQ modeli önermişlerdir. Bu model, üretilen kusurlu ürünlerin bir kısmının yanlışlıkla kalite kontrol sürecinden geçirilmediğini ve müşterilere ulaştığını, bunun da kusurlu ürünlerin iadelerine yol açtığı gerçekçi bir senaryoyu ele almıştır. Toplam maliyeti en aza indiren optimal üretim parti büyüklüğü oluşturulmuştur. Daha sonra Krishnamoorthi ve Panayappan (2013) bu modeli, tek aşamalı bir üretim sürecinde kusurlu ürünlerin üretildiği, yeniden işlendiği ve hurdanın yeniden işleme sırasında tespit edilip atıldığı durumlar için yeni envanter modelleri inşa etmişlerdir. Wee vd. (2012), stoksuzluk ve kalite kontrol süreç kısıtlaması olan kusurlu ürünler için ekonomik üretim miktarı (EPQ) modeli ve çözüm algoritması geliştirmişlerdir. Yenileme Ödül Teoremi kullanılarak birim zaman başına beklenen toplam kar formüle edilmiştir. Geleneksel sipariş büyüklüğü ve bekleyen sipariş miktarı yerine zaman aralığını karar değişkeni olarak kullanan bir model ortaya koymuşlardır.

Kusurlu ürünlerin kalite kontrol süreci ve bu kalite kontrol sürecinin hızının üretim hızıyla ilişkisi, EPQ modellerinde önemli bir araştırma alanı olmuştur. Moussawi-Haidar vd. (2016), kusurlu ürünlerin ele alınmasında indirimli satış ve yeniden işleme olmak üzere iki senaryoyu analiz etmişlerdir. Bu çalışmada, muayene süresi ekonomik üretim modeline entegre edilmiştir. Özellikle, üretim sırasında talebin sadece kusursuz ürünlerle karşılandığı ve üretim bittikten sonra kapsamlı bir kalite kontrol sürecinin başlatıldığı varsayılmıştır. Yerinde kalite kontrol sürecinin yapıldığı gerçekçi durumu dikkate almadığını ve bunun kusurlu ürünlerin üretim döngüsü tamamlanmadan talep ile aynı hızda kalite kontrol sürecinin tamamlanması ile sonuçlandığını ileri sürmüştür. Model stoksuzluğa izin vermeme varsayımı ile kısıtlanmıştır. Salamah (2019), kusurlu ürünlerin üretildiği bir üretim sürecinde senkron ve asenkron esnek yeniden işleme oranlarını içeren envanter modelleri önermişlerdir. Yeniden işleme oranının üretim oranından farklı olabileceği ve yeniden işleme sürecinin asenkron veya senkron olabileceği durumları ele alan varsayımlar oluşturmuşlardır. Model, optimal parti büyüklüklerini ve bekleyen siparişleri belirlemek için matematiksel modelleri ortaya koymuşlardır. Eroğlu ve Aydemir (2024), kusurlu üretim, kalite kontrol ve yeniden işleme süreçlerini gri belirsizlik altında bekleyen siparişlerle ele alan yeni bir EPQ modeli önermişlerdir. Bu model, üretim hızı, maliyetler ve fiyatları temsil etmek için gri değerler kullanarak belirsizlik modellemesini varsaymaktadır. Bekleyen siparişleri ortadan kaldırmak için azaltılmış üretim süresi sorununu ele almışlardır. Çalışmaları, muayene hızı ve üretim hızı arasındaki ilişkinin önemini ortaya koymaktadır. Aprilianti vd. (2024) tarafından yapılan güncel bir çalışma, hurda ürünleri, kusurlu ürünleri, yeniden işleme süreçlerini ve stoksuzlukları kapsamlı bir şekilde ele alan bir EPQ modeli önermiştir. Bu model, çeşitli kusurlu ürün türlerini (hurda, kusurlu ve yeniden işlenebilir ürünler) içerir ve düzenli

üretimin tamamlanmasının ardından anında yeniden işleme süreçlerini uygulama varsayımını ortaya koyar. Stoksuzluklar kayıp satış olarak varsayılır. Bu çalışma, üretim ve talep oranı ayarlamalarının ve kusurlu ürünlerin envanter maliyetleri üzerindeki etkisini duyarlılık analizleri ile ortaya koymuşlardır. Nakhaeinejad (2024), kusurlu üretim süreçleri için kontrol çizelgesi tasarımı ile EPQ modelini optimize eden bir model önermişlerdir. Geleneksel EPQ modelinin aksine, standartlara uymayan (Non-Conforming Product) ürünlerin (tamir, yeniden işleme, hurda kararı verilmesi gereken ürün grubu) üretimini ve süreç sapmalarını ele alır. Model, EPQ, örneklem büyüklüğü ve kontrol limitini belirleyerek beklenen toplam maliyeti en aza indirmek için envanter ve kalite ile ilgili maliyetleri modele dahil eden farklı bir bakış açısı ortaya koyar.

Stoksuzluğa izin veren EPQ modelleri, gerçek dünya senaryolarında envanter yönetiminin önemli bir yönünü odağına alır. Geleneksel modellerin kıyasla, bu modeller talebin karşılanamadığı durumları ve maliyetlerini (bekleyen sipariş maliyetleri, kayıp satış maliyetleri gibi) dikkate alır. Ganesan ve Uthayakumar (2020), Üretim hatalarına açık sistemler için, üretim hazırlık süresi, farklı bakım stratejilerinin (koruyucu, kestirimci, arıza sonrası) bir arada kullanıldığı dönemlerde ortaya çıkan stoksuzluklar ve kısmi bekleyen siparişleri dikkate alan iki EPQ modeli geliştirmişlerdir. Bu modeller, üretim sürecinde kusurlu ürünlerin oluşumunun makinelerin 'kontrol dışı' duruma geçmesiyle ilişkili olduğunu varsaymıştır. Çalışmaları, kusurlu ürünlerin yeniden işlenmesi ve elde bulundurma maliyetleri arasında bir optimizasyonun varlığını ileri sürmüşlerdir. Narang ve De (2024), üretim hatalarına açık sistemler ve bozulabilir ürünler için yeniden işlemeye izin verilen bir EPQ modeli geliştirmişlerdir. Bu model, optimal parti büyüklüğü ve yeniden işleme oranını belirleyerek toplam maliyeti en aza indirmeyi amaçlamaktadır. Model, firmaların ürünleri için garanti süresi verdiği bir senaryoyu da analiz etmektedir. Ceylan ve Aydemir (2026), sürdürülebilir bir ekonomik üretim miktarı modeli önermişlerdir. Bu model, kusurlu ürünlerin üretimi, yeniden işleme süreçleri ve stoksuzlukları dikkate alarak çevresel etkileri de modele dahil etmiştir. Sürdürülebilirlik faktörlerinin EPQ modellerine entegrasyonunun önemini ortaya koymuşlardır.

Moussawi-Haidar vd. (2016) tarafından önerilen EPQ modelinde, üretim döneminde, sadece talebi karşılayacak kadar sağlam ürün üretilmesi, kalite kontrol süreç hızının düşük (düşük inceleme hızı) olduğu, kalite kontrol sürecinin üretim dönemi bittikten sonra yapıldığı ve stoksuzluğa izin verilmediği varsayımları yer almaktadır. Bu çalışmada, Moussawi-Haidar vd. (2016) tarafından önerilen EPQ modeli stoksuzluğa izin verme varsayımı ile genişletilmiştir. Bu varsayım ile yeni bir EPQ modeli geliştirilmiş, matematiksel çözümleri oluşturulmuş ve modelin çalışması ve duyarlılık analizleri sayısal örneklerle ortaya konulmuştur.

MATEMATİKSEL MODEL

Bu bölümde önerilen matematiksel model bir bütün olarak değişken ve parametre tanımları ile detaylı bir şekilde açıklanacaktır.

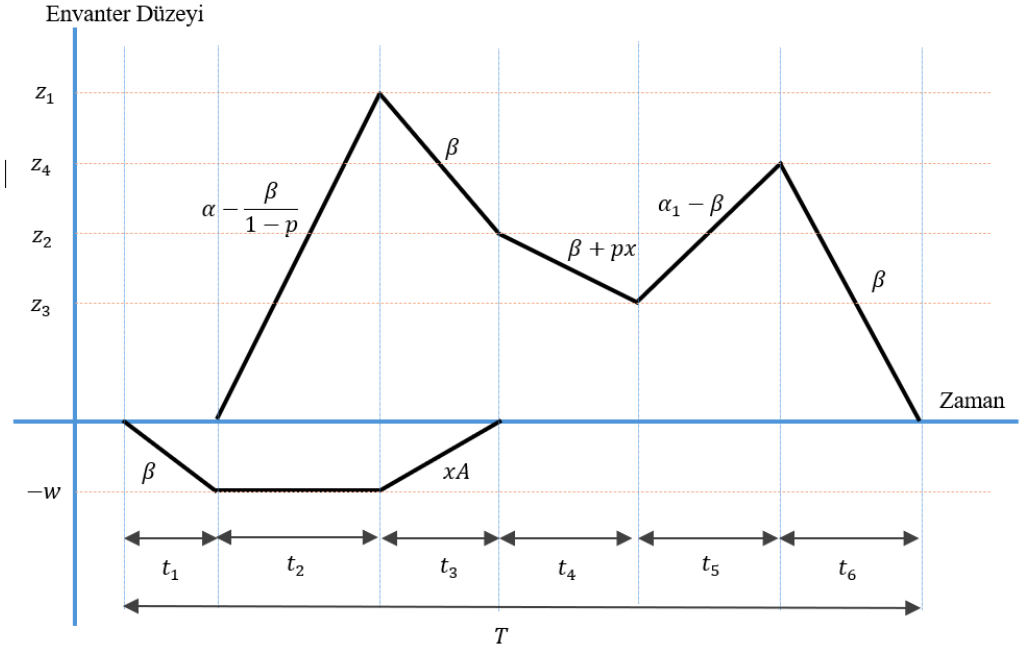
Modelde kullanılan notasyonlar aşağıdaki gibidir:

q : Bir çevrimdeki üretim miktarı, ekonomik üretim miktarı
w : Bir çevrimdeki maksimum stoksuzluk miktarı
β : Birim zamandaki talep miktarı, talep hızı
α : Birim zamandaki üretim miktarı, üretim hızı
α_1 : Birim zamandaki tamir miktarı, tamir hızı
x : Birim zamandaki inceleme miktarı, inceleme hızı
p : Kusurlu ürün oranı
h : Sağlam ürünler içim birim stok maliyeti
h_1 : Kusurlu ürünler için birim stok maliyeti
b : Birim stoksuzluk maliyeti
$E[.]$: Beklenen değer operatörü
t_1 : w miktar stoksuzluk elde etmek için gerekli süre
t_2 : Bir çevrimde q miktar ürün elde etmek için gerekli süre
$t_2 + t_3$: w miktar stoksuzluğu elimine etmek için gerekli süre
$t_2 + t_3 + t_4$: q miktar ürünü incelemek için gerekli süre
t_5 : pq miktar kusurlu ürünü tamir etmek için gerekli süre
t_6 : z_4 miktar sağlam ürün ile talebi karşılamak için gerekli süre
z_1 : Üretim süresi sonundaki stok miktarı (sağlam ve kusurlu ürünlerden oluşmaktadır)

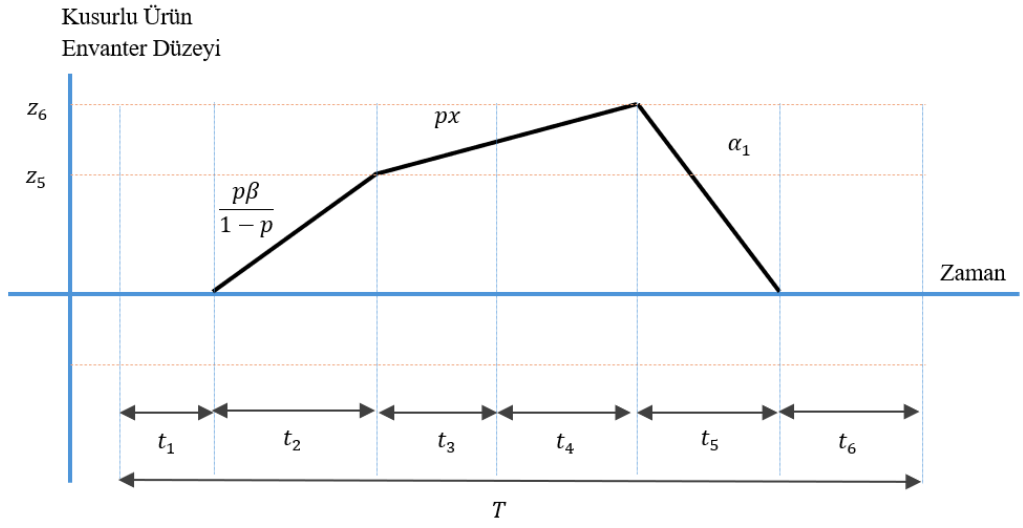
z_2 : Backorder'ın tamamen elimine edildiği andaki stok miktarı (sağlam ve kusurlu ürünlerden oluşmaktadır)
z_3 : İnceleme işleminin bittiği andaki stok miktarı (sadece sağlam ürünlerden oluşmaktadır)
z_4 : Tamir işleminin bittiği andaki stok miktarı (sadece sağlam ürünlerden oluşmaktadır)
z_5 : Üretimin bittiği andaki stok miktarı (sadece kusurlu ürünlerden oluşmaktadır)
z_6 : İnceleme işleminin bittiği andaki stok miktarı (sadece kusurlu ürünlerden oluşmaktadır)

Tek kalem ürün; α üretim hızı ile üretilmekte ve x hızı ile muayene (inceleme) yapılarak kusurlu ürünler ile sağlam ürünler birbirinden ayrılmaktadır. Muayene hızının, üretim hızından küçük olduğu varsayılmaktadır ($x < \alpha$). Bunun anlamı; üretim süresinin inceleme süresinden küçük olmasıdır. Üretim döneminde sadece talebi karşılayacak miktarda sağlam ürün elde edilmesi için düşük hızda inceleme yapılması varsayımı yapılmaktadır.

Sağlam ve kusurlu ürün stoklarının grafiği sırasıyla Şekil 1 ve Şekil 2 ile verilmektedir.



Şekil 1. Sağlam Ürünlerin Zamana Göre Envanter Düzeyi



Şekil 2. Kusurlu Ürünlerin Zamana Göre Envanter Düzeyi

t_1 süresi boyunca β talep hızı ile w miktar stoksuzluk oluşmaktadır. Buradan

$$t_1 = \frac{w}{\beta} \quad (1)$$

t_2 üretim süresi boyunca α üretim hızı ile q miktar ürün üretilmekte ve $\frac{\beta}{1-p}$ düşük muayene hızı ile kusurlu ile kusursuz ürünler birbirinden ayrılmaktadır. Düşük inceleme hızı; talebi karşılayacak kadar sağlam ürün elde etmek için gerekli muayene hızı olarak ifade edilebilir. Bu durumda; t_2 üretim süresi boyunca muayene (inceleme) hızına x dersek, inceleme işlemindeki sağlam ürün hızının, $(1-p)x$, talep hızına, β , eşit olması gerekir. Buradan t_2 üretim süresi boyunca inceleme hızının $\frac{\beta}{1-p}$ olduğu sonucuna varılır.

t_2 üretim süresi boyunca, $\frac{\beta}{1-p}$ $(\beta + \frac{p\beta}{1-p})$ muayene (inceleme) hızı ile ayrılan sağlam ürünler β hızı ile talebi karşılamakta, $\frac{p\beta}{1-p}$ hızı ile oluşan kusurlu ürünler; Şekil 2'deki t_2 süresi boyunca kusurlu ürün stokunu oluşturmaktadır.

Buradan;

$$t_2 = \frac{q}{\alpha} = \frac{z_5}{\frac{p\beta}{1-p}} = \frac{z_1}{\alpha - \frac{\beta}{1-p}} \tag{2}$$

$$z_1 = \left[1 - \frac{\beta}{\alpha(1-p)}\right] q \tag{3}$$

$$z_5 = \frac{p\beta q}{\alpha(1-p)} \tag{4}$$

eşitliklerine ulaşılır. Üretim sona erdiğinde elimizde z_1 adet muayene edilmemiş ürün stoku ve z_5 adet kusurlu ürün stoku mevcuttur. $t_3 + t_4$ muayene süresi boyunca x muayene hızı ile kusurlu ve kusursuz ürünler birbirinden ayrılmaktadır. t_3 dönemi sonunda stoksuzluk miktarının tamamı elimine edilmiş olmaktadır. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$t_3 = \frac{w}{xA} = \frac{z_1 - z_2}{x} \tag{5}$$

$$z_2 = \left[1 - \frac{\beta}{\alpha(1-p)}\right] q - \frac{w}{A} \tag{6}$$

$$z_6 = pq \tag{7}$$

$$t_3 + t_4 = \frac{z_6 - z_5}{px} \tag{8}$$

$$t_4 = \frac{z_2 - z_3}{\beta + px} = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha(1-p)}\right)\frac{q}{x} - \frac{w}{(1-p)x - \beta} \tag{9}$$

$$z_3 = (1 - p - \beta/x)\left(1 - \frac{\beta}{\alpha(1-p)}\right) q - w \tag{10}$$

$$A = (1 - p - \beta/x) \tag{11}$$

Muayene süreci bittikten sonra tamir süreci başlamaktadır. t_5 süresi boyunca kusurlu ürünler α_1 hızı ile tamir edilmektedir. Tamir işlemleri tamamlandığında z_4 miktar sağlam ürün stokuna ulaşılır. Mevcut stok t_6 döneminde β talep hızı ile tüketilir ve çevrim sona erer. Yukarıdaki açıklamalar ve şekiller dikkate alındığında aşağıdaki denklemlere ulaşılır.

$$t_5 = \frac{pq}{\alpha_1} = \frac{z_4 - z_3}{\alpha_1 - \beta} \tag{12}$$

$$z_4 = \left[(1 - \beta/\alpha_1)p + (1 - p - \beta/x)\left(1 - \frac{\beta}{\alpha(1-p)}\right)\right] q - w \tag{13}$$

$$t_6 = \frac{z_4}{\beta} \tag{14}$$

$$t = \sum_{i=1}^{6} t_i = \frac{q}{\beta} \tag{15}$$

Böylece bir çevrimdeki toplam maliyet (TC), aşağıdaki eşitlik ile elde edilir.

$$TC = cq + dq + c_r pq + K + h\left[\frac{z_1 t_2}{2} + \frac{(z_1+z_2)t_3}{2} + \frac{(z_2+z_3)t_4}{2} + \frac{(z_3+z_4)t_5}{2} + \frac{z_4 t_6}{2}\right] + h_1\left[\frac{z_5 t_2}{2} + \frac{(z_5+z_6)(t_3+t_4)}{2} + \frac{z_6 t_5}{2}\right] + b\left[\frac{t_1+2t_2+t_3}{2}\right]w \tag{16}$$

$$TC = (c + d + c_r p)q + K + \langle\frac{h-h_1}{2}\left\{\frac{\beta}{\alpha^2}\left[\frac{\beta p}{x(1-p)^2} - \frac{p}{1-p}\right] - \frac{p}{x} - \frac{p^2}{\alpha_1}\right\} + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\rangle q^2 - \left[\frac{h}{\beta} - \frac{h+b}{\alpha}\right]qw + \left(\frac{h+b}{2\beta}\right)\left(\frac{1-p}{1-p-\beta/x}\right)w^2 \tag{17}$$

Çevrim başına toplam maliyetin beklenen değeri, ETC , (16) eşitliği dikkate alınarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ETC = (c + d + c_r p)q + K + \langle\frac{h-h_1}{2}\left\{\frac{\beta}{\alpha^2}\left[\frac{\beta}{x}E\left[\frac{p}{(1-p)^2}\right] - E\left[\frac{p}{1-p}\right]\right] - \frac{E[p]}{x} - \frac{E[p^2]}{\alpha_1}\right\} + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\rangle q^2 - \left[\frac{h}{\beta} - \frac{h+b}{\alpha}\right]qw + \left(\frac{h+b}{2\beta}\right)E\left[\frac{1-p}{1-p-\beta/x}\right]w^2 \tag{18}$$

Birim zamandaki toplam maliyetin beklenen değeri, $ETCU$, ise çevrim başına beklenen toplam maliyetin, çevrim süresine oranlanması ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$ETCU = \frac{ETC}{t} = \frac{\beta(ETC)}{q} = m_1 + \frac{\beta K}{q} + m_2 q - m_3 w + \frac{m_4 w^2}{q} \tag{19}$$

Burada;

$$m_1 = \beta(c + d + c_r E[p])$$

$$m_2 = \beta\left[\frac{(h-h_1)u}{2} + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

$$u = \frac{\beta}{\alpha^2}\left[\frac{\beta}{x}E\left[\frac{p}{(1-p)^2}\right] - E\left[\frac{p}{1-p}\right]\right] - \frac{E[p]}{x} - \frac{E[p^2]}{\alpha_1}$$

$$m_3 = h - \frac{(h+b)\beta}{\alpha}$$

$$m_4 = \left(\frac{h+b}{2}\right)E\left[\frac{1-p}{1-p-\beta/x}\right]$$

Optimum üretim ve maksimum stoksuzluk miktarlarını bulmak için; $ETCU$ fonksiyonunun karar değişkenlerine göre kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial ETCU}{\partial w} = -m_3 + \frac{2m_4 w}{q} = 0$$

$$\frac{\partial ETCU}{\partial q} = -\frac{K\beta}{q^2} + m_2 - \frac{m_4 w^2}{q^2} = 0$$

Aşağıdaki optimum üretim ve maksimum stoksuzluk miktarlarına ulaşılır.

$$q = \sqrt{\frac{4m_4 K\beta}{4m_2 m_4 - m_3^2}} \tag{20}$$

$$w = \sqrt{\frac{m_3^2 K\beta}{m_4(4m_2m_4 - m_3^2)}} \tag{21}$$

Kusur oranı (p) rassal değişken olduğu için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$E[z_1] = \left\{1 - \frac{\beta}{\alpha}E\left[\frac{1}{1-p}\right]\right\}q \tag{22}$$

$$E[z_2] = \left\{1 - \frac{\beta}{\alpha}E\left[\frac{1}{1-p}\right]\right\}q - \left\{E\left[\frac{1}{1-p-\beta/x}\right]\right\}w \tag{23}$$

$$E[z_3] = \left\{1 - E[p] - \frac{\beta}{x} - \frac{\beta}{\alpha}E\left[\frac{1-p-\beta/x}{1-p}\right]\right\}q - w \tag{24}$$

$$E[z_4] = \left\{1 - \frac{\beta}{x} - \frac{\beta}{\alpha_1}E[p] - \frac{\beta}{\alpha}E\left[\frac{1-p-\beta/x}{1-p}\right]\right\}q - w \tag{25}$$

$$E[z_5] = \left\{\frac{\beta}{\alpha}E\left[\frac{p}{1-p}\right]\right\}q \tag{26}$$

$$E[z_6] = \{E[p]\}q \tag{27}$$

$$E[t_1] = \frac{w}{\beta} \tag{28}$$

$$E[t_2] = \frac{q}{\alpha} \tag{29}$$

$$E[t_3] = \left\{\frac{1}{x}E\left[\frac{1}{1-p-\beta/x}\right]\right\}w \tag{30}$$

$$E[t_4] = \left\{\frac{1}{x} - \frac{\beta}{\alpha x}E\left[\frac{1}{1-p}\right]\right\}q - \left\{\frac{1}{x}E\left[\frac{1}{1-p-\beta/x}\right]\right\}w \tag{31}$$

$$E[t_5] = \left\{\frac{1}{\alpha_1}E[p]\right\}q \tag{32}$$

$$E[t_6] = \frac{1}{\beta}E[z_4] \tag{33}$$

SAYISAL ÖRNEK VE DUYARLILIK ANALİZİ

Bir ürüne ilişkin aylık talep miktarı 1600 adet ve aylık üretim kapasitesi 6400 adettir. Üretimdeki kusurlu oranının sürekli düzgün/tekdüze (uniform) dağılıma uyduğu bilinmektedir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$f(p) = \begin{cases} 20, & 0{,}02 \le p \le 0{,}07 \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

Aylık inceleme ve tamir kapasiteleri sırasıyla 4000 adet ve 3200 adettir. Birim üretim ve inceleme maliyetleri sırasıyla 120₺ ve 4₺. Birim tamir maliyeti 22₺ ve birim stoksuzluk maliyeti 3₺. Kusurlu ve kusursuz ürünlerin birim stok maliyetleri ise sırasıyla 2,8₺ ve 2,6₺'dir. Hazırlık maliyeti 6000₺'dir. Bu durumda parametreler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$\beta = 1600$ $\alpha = 6400$ $x = 4000$ $\alpha_1 = 3200$ $c = 120₺$ $d = 4₺$ $c_r = 22₺$ $b = 3₺$ $h_1 = 2{,}8₺$
$h = 2{,}6₺$ $K = 6000₺$

Parametrelere ilişkin sayısal verilere dayanarak modeldeki beklenen değerler aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$E[p] = \int_{0,02}^{0,07} pf(p)dp = 0{,}045$
$E[p^2] = 0{,}002233$

$E\left[\frac{1}{1-p}\right] = 1{,}047360$
$E\left[\frac{p}{1-p}\right] = 0{,}047360$
$E\left[\frac{p}{(1-p)^2}\right] = 0{,}049853$
$E\left[\left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right] = 0{,}002494$
$E\left[\frac{1}{(1-p)^2}\right] = 1{,}097213$
$E\left[\frac{1-p}{1-p-\beta/x}\right] = 1{,}721209$
$E\left[\frac{1-p-\beta/x}{1-p}\right] = 0{,}581056$
$E\left[\frac{1}{1-p-\beta/x}\right] = 1{,}803022$
$E\left[\frac{p}{1-p-\beta/x}\right] = 0{,}081813$

Daha sonra (20), (21) ve (19) eşitliklerinden;

$q = 3261{,}7$ $w = 406{,}1$ $ETCU = 205870{,}56$ elde edilir.

(22) ve (33) arası denklemler kullanılarak aşağıdaki beklenen değerler hesaplanabilir.

$E[t_1] = 0{,}253793$ $E[z_1] = 2407{,}6$
$E[t_2] = 0{,}509636$ $E[z_2] = 1675{,}5$
$E[t_3] = 0{,}183038$ $E[z_3] = 930{,}4$
$E[t_4] = 0{,}418871$ $E[z_4] = 1003{,}8$
$E[t_5] = 0{,}045867$ $E[z_5] = 38{,}6$
$E[t_6] = 0{,}627339$ $E[z_6] = 146{,}8$
$t = \sum_{i=1}^{6} E[t_i] = 2.038543$

Tablo 1 incelendiğinde, birim stok maliyeti (h) arttıkça; birim zamandaki beklenen toplam maliyet ($ETCU$) artarken, ekonomik üretim miktarı (q) azalmakta ve maksimum stoksuzluk seviyesi (w) içbükey bir yapı ortaya koymaktadır.

Tablo 1. Birim Stok Maliyetine Göre ETCU Fonksiyonunun Davranışı

h	$ETCU$	q	w	Olursuzluk nedeni	Çözüm türü
0,5	202753,78	6931,96	-431,51	$E[t_1], E[t_3] < 0$	Olursuz
0,8	203484,55	5484,86	-125,79	$E[t_1], E[t_3] < 0$	(Infeasible)
1,1	204046,58	4726,06	50,23		
4,0	206987,76	2741,38	511,94		
8,2	209304,82	2059,91	577,02		
8,3	209350,40	2049,88	577,03		Olurlu
8,4	209395,69	2040,02	577,02		(Feasible)
8,5	209440,69	2030,31	576,97		
15	211933,76	1606,73	544,53		
40	218400,69	1042,53	412,02		
60	222219,64	863,48	352,36		
63	222736,41	843,87	345,42		
64	222906,05	837,62	343,20	$E[z_2], E[t_4] < 0$	Olursuz
66	223241,57	825,54	338,87	$E[z_2], E[z_3], E[t_4] < 0$	(Infeasible)
80	225465,67	753,48	312,50		

Tablo 2'de görüldüğü gibi kusurlu ürünlerin birim stok maliyeti (h_1) arttıkça; birim zamandaki beklenen toplam maliyet ($ETCU$) artarken, ekonomik üretim miktarı (q) ve maksimum stoksuzluk seviyesi (w) azalmaktadır.

Tablo 2. Kusurlu Ürünlerin Birim Stok Maliyetine Göre ETCU Fonksiyonun Davranışı

h_1	$ETCU$	q	w
1	205809,09	3296,09	410,35
9	206077,54	3150,88	392,28
17	206334,65	3023,31	376,39
25	206581,74	2910,09	362,30
41	207050,06	2717,21	338,29
57	207489,22	2558,22	318,49
65	207699,43	2488,52	309,81
73	207904,06	2424,22	301,81
81	208103,53	2364,67	294,39
89	208298,23	2309,30	287,50

Tablo 3. Birim Stoksuzluk Maliyetine Göre ETCU Fonksiyonun Davranışı

b	$ETCU$	q	w	Olursuzluk nedeni	Çözüm türü
1	205328,63	3592,39	985,59		Olurlu (Feasible)
3	205870,56	3261,67	406,07		
5	206050,37	3164,99	169,36		
7	206105,56	3136,45	37,96		
7,5	206108,85	3134,77	13,52		
7,7	206109,30	3134,54	4,42		
7,9	206109,30	3134,54	-4,34	$E[t_1], E[t_3] < 0$	Olursuz (Infeasible)
8,1	206108,88	3134,76	-12,77	$E[t_1], E[t_3] < 0$	
15	205939,37	3223,98	-191,57	$E[t_1], E[t_3] < 0$	

Birim stoksuzluk maliyeti (b) arttıkça; birim zamandaki beklenen toplam maliyet ($ETCU$) artarken, ekonomik üretim miktarı (q) ve maksimum stoksuzluk seviyesi (w) azalmaktadır (Tablo 3).

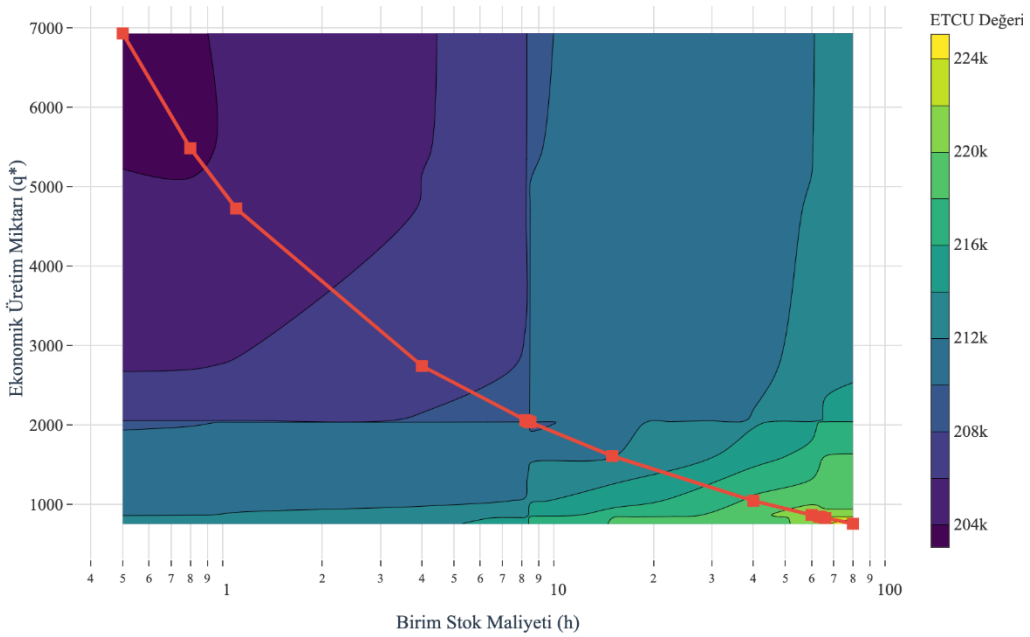
Tablo 4. Hazırlık Maliyetine Göre ETCU Fonksiyonunun Davranış Analizi

K	$ETCU$	q	w
50	200521,37	297,75	37,07
100	200743,95	421,08	52,42
150	200914,75	515,72	64,21
500	201683,30	941,56	117,22
800	202133,47	1190,99	148,28
1000	202387,18	1331,57	165,78
2000	203382,61	1883,12	234,44
5000	205357,67	2977,48	370,69
6000	205870,56	3261,67	406,07
15000	209291,47	5157,15	642,05
25000	211999,89	6657,85	828,88
50000	216977,03	9415,62	1172,22

Tablo 4'ten hazırlık maliyeti (K) arttıkça; birim zamandaki beklenen toplam maliyet ($ETCU$), ekonomik üretim miktarı (q) ve maksimum stoksuzluk seviyesinin (w) arttığı görülmektedir.

Şekil 3 incelendiğinde, birim stok maliyetinin (h) artması envanter yönetimi parametreleri üzerinde belirgin etkiler göstermektedir. h değerinin 0,5'ten 80'e artması durumunda birim zamandaki beklenen toplam maliyet ($ETCU$) 202753,78'den 225465,67'ye monoton artış sergilerken, ekonomik üretim miktarı (q) eksponansiyel azalma göstererek 6931,96'dan 753,48'e düşmektedir. Maksimum stoksuzluk seviyesi (w) ise içbükey bir davranış izlemekte, başlangıçta negatif değerlerden $h \approx 8{,}2 - 8{,}4$ civarında maksimuma (577.03) ulaştıktan sonra kademeli olarak azalmaktadır. Analiz edilen tüm parametre aralığında çözümlerin stoksuzluk varsayımı altında olurlu durumda kalması, modelin matematiksel tutarlılığını doğrulamaktadır.

Tablo 5 incelendiğinde, sürekli tekdüze dağılım için kusur oranı aralığı ($g - f = ,05$) sabit kalmak şartıyla ortalama kusur oranı ($E[p]$) arttıkça; birim zamandaki beklenen toplam maliyet ($ETCU$) artarken, ekonomik üretim miktarı (q) ve maksimum stoksuzluk seviyesi (w) azalmaktadır.



Şekil 3. ETCU Fonksiyonunun Davranışsal Analizi Kontur Grafiği

Tablo 5. Kusur Oranı Aralığına Göre ETCU Fonksiyonun Davranışı

f	g	$E[p]$	$ETCU$	q	w	Olursuzluk nedeni	Çözüm türü
0,02	0,07	0,045	205870,56	3261,67	406,07		
0,08	0,13	0,105	208004,37	3249,63	384,98		
0,14	0,19	0,165	210140,97	3236,15	361,07		Olurlu
0,20	0,25	0,225	212280,69	3221,11	333,73		(Feasible)
0,40	0,45	0,425	219442,63	3156,53	204,88		
0,50	0,55	0,525	223049,52	3112,07	101,89		
0,52	0,57	0,545	223774,62	3101,46	75,12	$E[z_2], E[t_4] < 0$	
0,53	0,58	0,555	224138,09	3095,73	60,19	$E[z_2], E[t_4] < 0$	Olursuz
0,54	0,59	0,565	224502,78	3089,41	43,17	$E[z_2], E[t_4] < 0$	(Infeasible)

SONUÇ

Bu çalışmada stoksuzluğa izin verme varsayımı altında kusurlu ürünlerin incelenmesi, yeniden işlenmesi durumunu ele alan yeni bir EPQ modeli geliştirilmiştir. Önerilen modelin matematiksel çözümleri oluşturulmuş ve modelin çalışması ve duyarlılık analizleri sayısal örneklerle ortaya konulmuştur. Modelin matematiksel ispatı gerçekleştirilerek, modelin değişkenlerine ilişkin optimal denklemler elde edilmiştir. Ayrıca sayısal bir örnek üzerinde modelin matematiksel çözümüne ilişkin kısıtlar, çözüm uzayı ve çözüm sonuçları, duyarlılık analizleri sayısal simülasyonlarla ortaya konulmuştur. Böylece hem cebirsel hem sayısal olarak modelin çalışma mantığı ve tutarlılığı ortaya konulmuştur.

Gelecek araştırmalar, bu modelleri daha da gerçekçi hale getirmek için çeşitli yönlere odaklanabilir. Örneğin, çok ürünlü sistemler, dinamik talep ve üretim oranları, tedarik zinciri entegrasyonu ve sürdürülebilirlik faktörleri gibi unsurların EPQ modellerine dahil edilmesi faydalı olacaktır. Ayrıca, yapay zekâ ve makine öğrenimi tekniklerinin, kusurlu ürün oranlarının tahmini ve muayene süreçlerinin optimizasyonu gibi alanlarda kullanılması, daha doğru ve uyarlanabilir EPQ modellerinin geliştirilmesine olanak sağlayabilir. Son olarak, farklı endüstriyel uygulamalara yönelik örnek olay çalışmaları ve deneysel analizler, teorik modellerin uygulama geçerliliğini test etmek ve endüstriyel karar vericilere daha somut rehberlik sağlamak açısından değerli olabilir.

Yapay Zeka Katkı Beyanı

Bu makale tamamen herhangi bir yapay zeka aracının yardımı olmadan yazılmış, düzenlenmiş, analiz edilmiş ve hazırlanmıştır. Metin, veri analizi ve şekiller dahil tüm içeriğin yalnızca yazarlar tarafından oluşturulduğunu beyan ederim.

KAYNAKLAR

Al-Salamah, M. (2019). Economic production quantity in an imperfect manufacturing process with synchronous and asynchronous flexible rework rates, Operations Research Perspectives, 6, 100103. https://doi.org/10.1016/j.orp.2019.100103

Aprilianti, C., Garside, A. K., Khoidir, A., & Saputro, T. E. (2024). Economic production quantity model with defective items, imperfect rework process, and lost sales, Jurnal Sistem dan Manajemen Industri, 8(1), 35-46. https://doi.org/10.30656/jsmi.v8i1.7580

Ceylan, M., & Aydemir, E. (2026). A new sustainable economic production quantity model with imperfect production and shortage, Arabian Journal for Science and Engineering, 51, 15613-15624. https://doi.org/10.1007/s13369-025-10109-w

Eroglu, A., & Ozdemir, G. (2007). An economic order quantity model with defective items and shortages, International Journal of Production Economics, 106(2), 544-549. https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2006.06.015

Eroğlu, A., & Aydemir, E. (2024). A new EPQ model for imperfect production, screening, and rework with backorders under grey uncertainty, Alphanumeric, 12(3), 195-214. https://doi.org/10.17093/alphanumeric.1507650

Ganesan, S., & Uthayakumar, R. (2020). EPQ models for an imperfect manufacturing system considering warm-up production run, shortages during hybrid maintenance period and partial backordering, Advances in Industrial and Manufacturing Engineering, 1, 100005. https://doi.org/10.1016/j.aime.2020.100005

Hayek, P. A., & Salameh, M. K. (2001). Production lot sizing with the reworking of imperfect quality items produced, Production Planning and Control, 12(6), 584-590. https://doi.org/10.1080/095372801750397707

Krishnamoorthi, C., & Panayappan, S. (2013). An EPQ model with reworking of imperfect production items and shortages. International Journal of Management Science and Engineering Management, 7(3), 220-228. https://doi.org/10.1080/17509653.2012.10671227

Krishnamoorthi, C., & Panayappan, S. (2012). An EPQ model with imperfect production systems with rework of regular production and sales return, American Journal of Operations Research, 2(2), 225-234. https://doi.org/10.4236/ajor.2012.22026.

Moussawi-Haidar, L. M., Salameh, M., & Nasr, W. (2016). Production lot sizing with quality screening and rework, Applied Mathematical Modelling, 40(5-6), 3242-3256. https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.09.095

Nakhaeinejad, M. (2024). The economic production quantity model for an imperfect production process by control chart design, Journal of Statistical Computation and Simulation, 94(13), 2813-2829. https://doi.org/10.1080/00949655.2024.2355536

Narang, P., & De, P. K. (2024). Economic production quantity model considering rework of imperfect goods under stock, advertisement, selling price and replacement period-dependent demand, Journal of Industrial Integration and Management, 9(01), 1-21. https://doi.org/10.1142/S2424862223500306

Rosenblatt, M. J., & Lee, H. L. (1986). Economic production cycles with imperfect production processes, IIE Transactions, 18(1), 48-55. https://doi.org/10.1080/07408178608975329

Salameh, M. K., & Jaber, M. Y. (2000). Economic production quantity model for items with imperfect quality, International Journal of Production Economics, 64(1-3), 59-64. https://doi.org/10.1016/S0925-5273(99)00044-4

Wee, H. M., Wang, W. T., & Yang, P. C. (2012). A production quantity model for imperfect quality items with shortage and screening constraint, International Journal of Production Research, 51(6), 1869-1884. https://doi.org/10.1080/00207543.2012.718453

EKLER

Ek-1: ETCU fonksiyonunun konveksliğinin ispatı

Hessian matrisini göz önünde bulunduralım (H): $H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 ETCU}{\partial q^2} & \frac{\partial^2 ETCU}{\partial q \partial w} \\ \frac{\partial^2 ETCU}{\partial w \partial q} & \frac{\partial^2 ETCU}{\partial w^2} \end{bmatrix}$

Eğer $[q \quad w] H \begin{bmatrix} q \\ w \end{bmatrix} > 0, \ q, w \neq 0$ ise $ETCU$ fonksiyonu kesin olarak konvekstir.

$H = \begin{bmatrix} \frac{2K\beta + 2m_4 w^2}{q^3} & -\frac{2m_4 w}{q^2} \\ -\frac{2m_4 w}{q^2} & \frac{2m_4}{q} \end{bmatrix}$ ve $[q \quad w] H \begin{bmatrix} q \\ w \end{bmatrix} = \frac{2K\beta}{q} > 0.$

Dolayısıyla $ETCU$ fonksiyonu kesin olarak konvekstir. Böylece $ETCU$'yu minimum yapan q ve w değerlerinin tekil (benzersiz) çözümleri vardır.

Ek 2. Beklenen değer formülleri

$f(p) = \begin{cases} \frac{1}{a-b} & , \quad a \leq p \leq b \\ 0 & , \ diğer \ durumlar \end{cases}$ fonksiyonu için;

$E[p] = \frac{a+b}{2}$

$E[p^2] = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$

$E\left[\frac{1}{1-p}\right] = \frac{\ln(1-a)-\ln(1-b)}{b-a}$

$E\left[\frac{1}{(1-p)^2}\right] = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1-b} - \frac{1}{1-a}\right)$

$E\left[\frac{p}{1-p}\right] = E\left[\frac{1}{1-p}\right] - 1$

$E\left[\frac{p}{(1-p)^2}\right] = E\left[\frac{1}{(1-p)^2}\right] - E\left[\frac{1}{1-p}\right]$

$E\left[\frac{p^2}{(1-p)^2}\right] = E\left[\frac{1}{(1-p)^2}\right] + 1 - 2E\left[\frac{1}{1-p}\right]$

$E\left[\frac{1}{1-p-\beta/x}\right] = \frac{\ln(1-a-\beta/x)-\ln(1-b-\beta/x)}{b-a}$

$E\left[\frac{1-p}{1-p-\beta/x}\right] = 1 + \frac{\beta}{x} E\left[\frac{1}{1-p-\beta/x}\right]$

$E\left[\frac{1-p-\beta/x}{1-p}\right] = 1 - \frac{\beta}{x} E\left[\frac{1}{1-p}\right]$