



DEĞİŞKEN KESİTLİ ANKASTRE TIMOSHENKO KİRİŞİN STATİK STABİLİTE ANALİZİ

(*STATIC STABILITY ANALYSIS OF A CANTILEVER TIMOSHENKO BEAM WITH VARYING CROSS-SECTION*)

Binnur GÖREN*, Seçil ERİM*

ÖZET/ABSTRACT

Bu çalışmada, aksenal yüklemeye maruz ankastre kirişlerin statik stabilitesine, çeşitli kesit değişimlerinin etkileri incelenmiştir. Kiriş, elastik eğriye kesme kuvveti etkisinin de katıldığı Timoshenko kirişidir. Analizlerde kademeli ve kademeli olmak üzere on çeşit kesit kullanılmıştır. Kritik burkulma yükü ve burkulma faktörlerini tespit etmek için Sonlu Eleman ve Sonlu Eleman-Transfer Matris Metotları kullanılmıştır. Her iki yöntemde de kiriş dört serbestlik derecesine sahip sonlu eleman ile modellenmiştir. Bu şekilde, iki metodun birbirlerine olan üstünlüklerini görmek mümkün olmuştur. Her iki metottan elde edilen sonuçlar birbirine çok yakındır. Burkulma parametreleri, integral formdaki sistemin potansiyel enerji ifadelerine varyasyonel prensibi uygulanmasıyla elde edilen özdeğer probleminin çözümüyle saptanmıştır. Nümerik hesaplamalarda MATLAB 5.1 bilgisayar programlama dili kullanılmıştır. Çeşitli tipteki kirişler için elde edilen sonuçlar çizelge ve grafikler halinde sunulmuştur.

In this study, effects of variation of various cross-sections on the static stability of cantilever beams subjected to axial loading have been investigated. The beam is the Timoshenko type where the effect of shear force upon the elastic curve is included to the elastic curve. Ten different types of continuous and stepped beams have been used in the analyses. In order to determine the critical buckling loads and buckling factors, the Finite Element and Finite Element-Transfer Matrix Methods have been employed. In both methods, the beam has been modeled as four degrees of freedom finite elements. Therefore, it has been possible to compare the advantages and disadvantages of both methods. Results obtained from both methods are similar to each other. Buckling parameters are determined from the solution of the eigenvalue problem obtained by the application of the variational principle to the potential energy terms of the integral form system. MATLAB 5.1 computer software has been used in numerical calculations. Results obtained for various kinds of beams have been presented in tables and graphics.

ANAHTAR KELİMELER/KEYWORDS

Statik stabilite, Ankastre Timoshenko Kirişi, Sonlu Elemanlar Metodu
Static stability, Cantilever Timoshenko Beam, Finite Element Method

* DEÜ Makina Mühendisliği Bölümü, Bornova İZMİR

1. GİRİŞ

Kritik yüklemeye maruz pekçok elemanın deformasyon karakteristiklerinde değişiklik meydana gelir. Malzemede herhangi bir hasara ya da mekanik özelliklerinde bir değişime neden olmayan bu fenomen burkulma olarak bilinir. Burkulma genel olarak deformasyon modunun kararsız hale geçip sistemin başka bir kararlı durum aramasından kaynaklanır.

Elastik stabilite konusu deneysel ve teorik olarak önem kazanmadan önce sadece akademisyenler tarafından inceleniyordu. Çünkü mühendisler elastik gerilme değerlerinde burkulma sebebiyle hasara uğrayacak kadar narin bası elemanlarını kullanmaktan çekiniyorlardı. Öte yandan bu tip malzemelerin kullanımı havacılık ve taşımacılıkta korozyon tehlikesi sebebiyle yasaktı. Ne var ki artık ilk uygulamaları uçakların ince plaka konstrüksiyonları olan bu elemanlar makina, inşaat, uçak ve uzay mühendisliği alanlarında kullanılmaktadır.

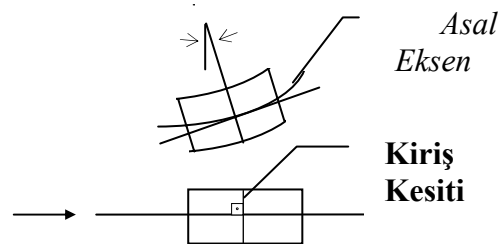
Eksenel yüklemeye maruz ideal narin kiriş problemi ilk olarak (Leonhard Euler, 1744) tarafından çözüldü. Euler çözümüne göre, eğilmeden sonra düzlem kesit alanı yine düzlem ve kiriş eksenine dik kalır. Bu kabul Euler-Bernoulli kiriş teorisi olarak bilinir. Bu kabule göre tüm kayma şekil değiştirmeleri sıfırdır. Kirişlerin stabilite analizinde Euler yüküne alternatif olarak Timoshenko ve Gere tarafından iki formülasyon geliştirilmiştir (Timoshenko ve Gere, 1961). Bu formüllerde kesme kuvvetinin etkisi de hesaba katılmıştır. Bu yolla eksenel bası yüküne ve sınır şartlarına maruz kirişin elastik eğri denklemleri için sıfırdan farklı çözümler (sıfırdan farklı transvers yer değiştirmeler) bulunmakta ve problem özdeğer-sınır değer problemine indirgenmektedir (Simitses, 1986).

Burkulma yükü ve burkulma sebebiyle oluşan gerilmeler için yazılan formüller çeşitli eleman ve sınır koşulları için bulunmuştur. Bu formüller elastik eğrinin diferansiyel denklemi integre edilerek veya enerji metodları kullanılarak matematiksel olarak elde edilebilir. Sınır koşullarını sağlayan tüm eğriler içinde kritik yükü minimum yapan eğri problemin çözümüdür. Karmaşık sistemlerin yaklaşık çözümleri, kabul edilebilir hata sınırları içinde şekil değiştirme enerjisi metoduyla bulunabilir.

2. PROBLEMİN UYGULAMA VE ANALİZİ

Stabilite ve elastisite teorileri arasında temel bir fark vardır. Elastisite teorisinde, denge denklemleri yazılırken şekil değiştirmeler gözardı edilir. Buna karşın stabilite teorisinde ise, denge denklemleri deforme olmuş eleman için yazılır.

Kesme deformasyonlarının dikkate alınmadığı kiriş için eğilme analizindeki temel varsayım deformasyon süresince kiriş kesitinin kirişin asal eksenine dik olmasıdır. Şekil 1’ de görüleceği gibi kiriş-eğilme diferansiyel denklemi sadece transvers yerdeğiştirme w ’ ya bağlıdır.



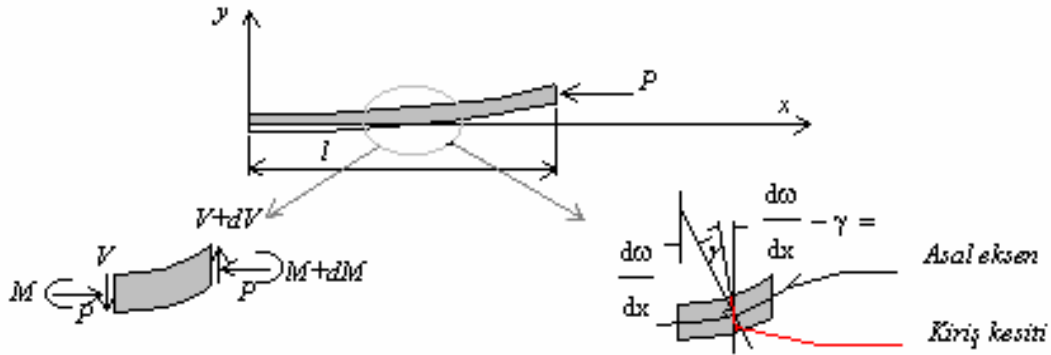
Şekil 1. Kesme kuvveti etkisiz kiriş deformasyonları

Kesme deformasyonlarının hesaba katıldığı kiriş-eğilme analizlerinde asal eksenin normali yönündeki düzlem kesit alanı yine düzlem kalır, fakat kayma deformasyonları yüzünden, Şekil 2' de gösterildiği gibi artık asal eksenin normali yönünde değildir. Bu sebeple kesit alanının toplam dönme miktarı ;

$$\theta = \frac{d\omega}{dx} - \gamma$$

Burada γ kayma şekil değiştirmesidir. Gerçek kayma gerilmesi ve şekil değiştirmesi değerleri kesitin her noktasında değişken olup kayma yüzeyi üzerinde sabittir.

$$\tau = \frac{V}{A_s} ; \gamma = \frac{\tau}{G} ; \kappa = \frac{A_s}{A}$$



Şekil 2. Kesme kuvveti etkili aksel yükü maruz kiriş elemanının serbest cisim diyagramı

Şekil 2' de iki boyutlu dikdörtgen kesite sahip kiriş görülmektedir. Transvers kesme etkisini de içeren böyle bir sistem için toplam potansiyel enerji ifadesi

$$U = U_b + U_s - W$$

şeklindedir. Burada U_b ve U_s sırasıyla eğilme momenti ve kesme kuvvetinin şekil değiştirme enerjisi, W ise P bası yükünün yaptığı iştir.

P aksel yüküne maruz Timoshenko kirişinin toplam potansiyel enerjisi integral formda (Petyt, 1990, Thomas ve Abbas,1976),

$$U = \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} EI \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \kappa GA \left(\frac{d\omega}{dx} - \theta \right)^2 - \frac{1}{2} P \left(\frac{d\omega}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (1)$$

burada ise ω transvers çökme, θ eğimdir.

2.1. TIMOSHENKO KİRİŞİNİN SONLU ELEMAN MODELİ

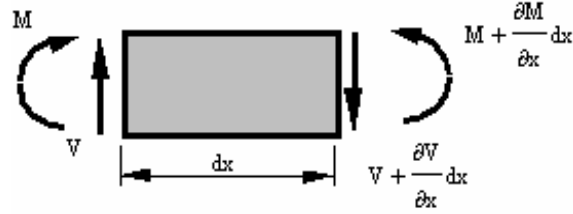
Enerji ifadesinde yer alan hem ω hem de θ' nın sadece x' e göre türevi alınmaktaydı. ω ve θ değişkenleri farklı fiziksel büyüklüğe sahiptir. ω ve θ arasındaki bağıntı

$$\frac{d\omega}{dx} = \theta + \gamma \quad (2)$$

burada γ transvers kayma şekil değiştirmesidir. ω ve θ aşağıdaki gibi 3. ve 2.dereceden polinomlarla tanımlanabilir (Yardımoğlu & Sabuncu, 1995).

$$\omega = \sum_{i=0}^{n=3} a_i x^n, \quad \theta = \sum_{j=0}^{m=2} c_j x^m \quad (3)$$

Şekil 3, kiriş elemanının moment dengesini göstermektedir.



Şekil 3

$$dM - V dx = 0 \Rightarrow dM/dx - V = 0 \quad (4)$$

Eğilme momenti ve elastik eğrinin eğimi arasındaki bağıntı

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} \quad (5)$$

kayma şekil değiştirmesi ve kesme kuvveti arasındaki bağıntı ise

$$V = \kappa GA \gamma \quad (6)$$

Denklem 2, 3, 5, 6' yı Denklem 4' te yerine yazarsak, kayma şekil değiştirmesi γ , x' den bağımsız olarak bulunur (Narayananaswami ve Adelman, 1974).

$$\gamma = c_0$$

Aynı denklemleri kullanarak, a_i and c_i katsayıları ise aşağıdaki gibi tespit edilir.

$$c_0 = 6ea_3, \quad c_1 = 2a_2, \quad c_2 = 3a_3$$

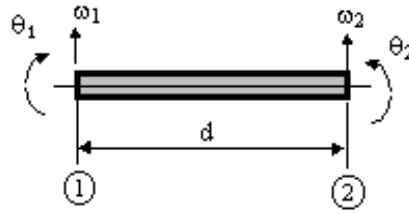
burada $e = \frac{EI(x)}{\kappa GA(x)}$ olarak tanımlanmıştır. θ , a_i katsayılarına bağlı olarak

$$\theta = a_1 + 2a_2x + (3x^2 + 6e)a_3$$

yazılabilir. ω ve θ arasındaki bağıntı kapalı formda $\theta = D\omega$ şeklinde olup transformasyon matrisi $[D]$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 6e \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4

Burada ω_1 sonlu elemanın sol ucundaki çökme, θ_1 sonlu elemanın sol ucundaki dönme, ω_2 sonlu elemanın sağ ucundaki çökme, θ_2 sonlu elemanın sağ ucundaki dönmedir. Sonlu elemanın deplasman vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\{q\}_e^T = \{\omega_1 \quad \theta_1 \quad \omega_2 \quad \theta_2\}$$

Kapalı formda deplasman vektörü $q_e = Ca$ ise

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6e \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 0 & 1 & 2d & (6e + 3d^2) \end{bmatrix}$$

şekindedir. Transformasyon matrisi $[C]$, $\{a\}$ vektöründen $\{q_e\}$ vektörüne geçişi sağlar. Transvers çökme ve dönme ifadeleri artık aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\omega = \{x_i\}[C]^{-1}\{q\}_e, \quad \theta = \{x_j\}[B][C]^{-1}\{q\}_e$$

Toplam potansiyel enerji,

$$U = \frac{1}{2}\{q\}_e^T[K_e]\{q\}_e - \frac{1}{2}\{q\}_e^T[K_g]\{q\}_e$$

burada $[K_e]$ and $[K_g]$ sırasıyla elastik ve geometrik direngenlik matrisleridir.

Denklem 1 ile verilen Timoshenko kirişin toplam potansiyel enerjisi ve tespit edilen eşitlikler kullanılarak elastik direngenlik matrisi

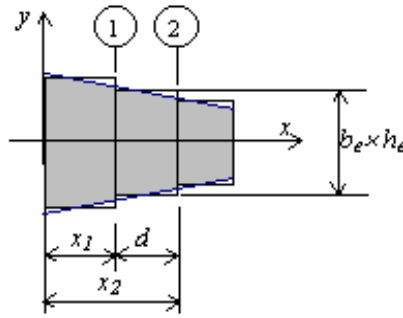
$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_e]_e &= EI_e [\mathbf{C}]^{-T} [\mathbf{B}]^T \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} \{x'_j\}^T \{x_j\} dx \right) [\mathbf{B}] [\mathbf{C}]^{-1} + \kappa GA_e [\mathbf{C}]^{-T} \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} \{x'_i\}^T \{x'_i\} dx \right) [\mathbf{C}]^{-1} \\
&\quad - \kappa GA_e [\mathbf{C}]^{-T} \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} \{x'_i\}^T \{x_j\} dx \right) [\mathbf{B}] [\mathbf{C}]^{-1} - \kappa GA_e [\mathbf{C}]^{-T} [\mathbf{B}]^T \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} \{x_j\}^T \{x_i\} dx \right) [\mathbf{C}]^{-1} \quad \text{ve} \\
&\quad + \kappa GA_e [\mathbf{C}]^{-T} [\mathbf{B}]^T \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} \{x_j\}^T \{x_j\} dx \right) [\mathbf{B}] [\mathbf{C}]^{-1}
\end{aligned}$$

geometrik direngenlik matrisi

$$[\mathbf{K}_g]_e = [\mathbf{C}]^{-T} \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} \{x'_i\}^T \{x'_i\} dx \right) [\mathbf{C}]^{-1}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada A_e ve I_e değişken kesite sahip kirişin her bir elemanın ortalama genişlik ve yükseklik ölçüleri kullanılarak hesaplanan alan ve alan atalet moment ifadeleridir.



Şekil 5. Kirişin ortalama boyutları

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Sonlu Elemanlar ve Sonlu Elemanlar-Transfer Matris Metodları kullanılarak kritik burkulma yükü ve kritik burkulma yükü ile hesaplanan burkulma katsayıları tespit edildi. Değişken kesitli ankastre kirişlerin statik stabilite analizi için bilgisayar programı hazırlandı.

Elde edilen nümerik çözümlerin doğruluğunu kontrol için bir ucu serbest aksenal yüke maruz üniform kiriş gözönüne alınmıştır. Çünkü literatürde sadece üniform kesit durumu için kritik burkulma yükünün gerçek değerinin bulunması mümkündür (Timoshenko ve Gere, 1961). Sözedilen burkulma katsayısı

$$B = \frac{P_{cr} l^2}{EI_0}$$

ile hesaplanır. Burada I_0 mesnetteki kesit alanının atalet momentidir.

Çizelge 1 ve Çizelge 2'de eleman sayısının statik stabiliteye etkileri gösterilmiştir. Analizlerde yeterli hassasiyet sağlandığından sürekli kirişlerde eleman sayısı beş, kademeli kirişlerde ise on olarak alınmıştır.

Çizelge 1. Eleman sayısının stabiliteye etkisi (Sonlu Elemanlar Metodu ve Sonlu Elemanlar-Transfer Matris Metodu), ($l=200$ mm, $b_0=h_0=b_1=h_1=55$ mm, $\nu=0.3$, $E=206 \cdot 10^3$ N/mm², $\kappa=5/6$, $P_{cr(exact)}=9260467.2168$ N)

Eleman Sayısı	P_{cr} (N) (SE)	Hata (%)	P_{cr} (N) (SE-TMM)	Hata (%)
1	9382289.0	1.315	9376429.3	1.252
2	9266257.9	0.063	9260602.9	0.001
5	9244933.8	0.167	9239317.2	0.228
8	9242805.6	0.191	9237192.9	0.251
10	9242325.0	0.196	9236713.2	0.256

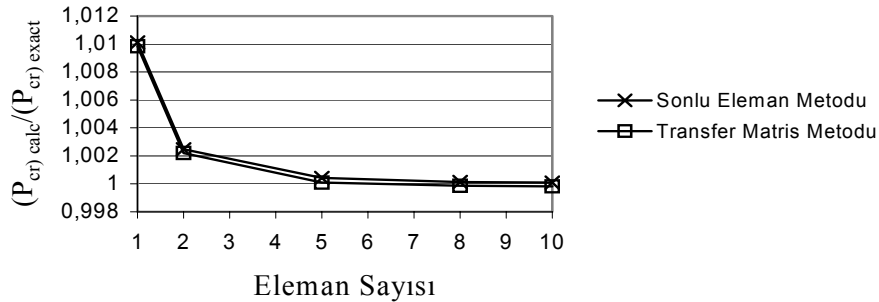
Şekil 6, Sonlu Eleman ve Sonlu Eleman-Transfer Matris metotları ile elde edilen sonuçların birbiriyle ve gerçek değerlerle uyumlu olduğunu göstermektedir. Tüm kesit değişimleri için aynı uyumluluk görüldüğünden tekrardan kaçınılarak elde edilen sonuçlar sadece uniform kesit durumu için verilmiştir. Sonlu Eleman metodunun Sonlu Eleman-Transfer Matris metodundan daha pratik olduğu görülmüştür.

Şekil 7, çeşitli kesit değişimlerine sahip kirişlerin kritik burkulma yüklerinin kiriş uzunluğuna göre nasıl değiştiğini göstermektedir. Buradan görüleceği üzere, kiriş uzunluğu artarken kritik burkulma yükü P_{cr} azalmakta, buna karşın burkulma katsayısı B artmaktadır. Burkulma katsayısının kiriş uzunluğunun karesiyle doğru orantılı olduğu bilindiğinden bu sonuç mantıklıdır.

Şekil 8' den Şekil 13' e kadar olan şekillerden, kesitin değişim açısının azalmasıyla burkulma katsayısının arttığı görülmektedir. Buradaki h_0 , b_0 ve h_1 , b_1 sırasıyla kiriş kesitinin mesnetteki yükseklik ve genişlik ölçüleri ile serbest uçtaki yükseklik ve genişlik ölçüleridir.

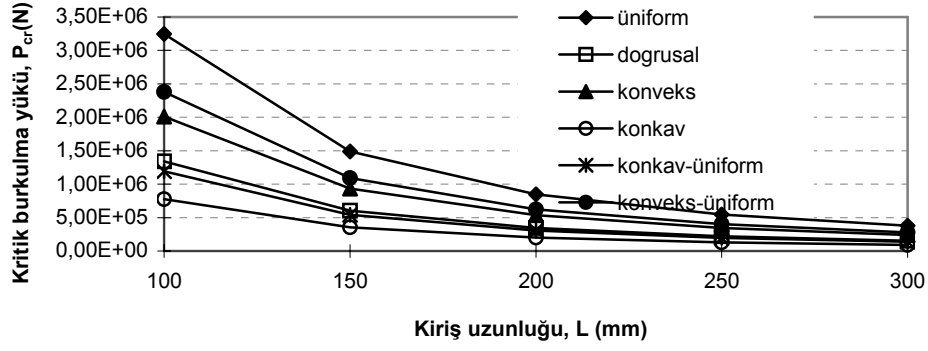
Şekil 13, kesit değişim açısının statik stabiliteye olan etkisi görülmektedir. Bu şekilde görüldüğü gibi kirişin eğimi arttıkça kritik burkulma yükü değeri düşmekte, diğer bir deyişle kiriş narinleşmektedir.

Şekil 14' ten Şekil 16' ya kadar olan şekilden görüldüğü gibi burkulma katsayısı, kiriş boyutlarından bağımsız olarak her bir durum için sabit ve birbirinden farklı değerlere yaklaşmaktadır. h_2 ve b_2 , kademeli kirişler için kademedeki kesitin yükseklik ve genişlik ölçüleridir.

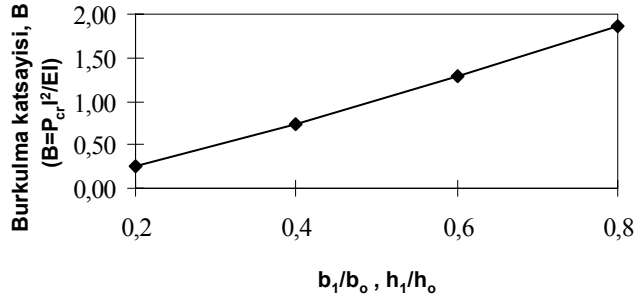


Şekil 6. Sonlu eleman ve sonlu eleman-transfer matris metotlarının karşılaştırılması (Üniform Kiriş)

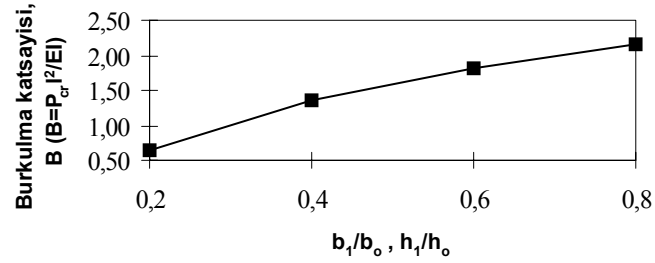
Şekil 17, kademeli kirişlerde statik stabiliteye kademe uzunluğunun etkisini tespit etmek için çizilmiştir. Bu şekilden, l_1/l_2 oranının artmasıyla burkulma katsayısının arttığı görülmektedir.



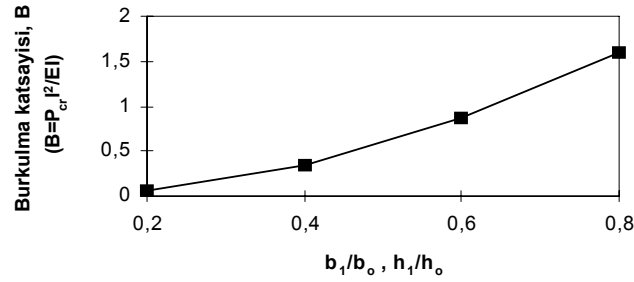
Şekil 7. Kiriş uzunluğunun statik stabiliteye etkisi ($h_0=b_0=30$ mm, $h_1/h_0=b_1/b_0=0.5$)(iki boyutta kesit değişimi), $h_1/h_0=0.5$, $b_1/b_0=1$ (tek boyutta kesit değişimi) $E=206 \cdot 10^3$ N/mm², $\nu=0.3$)



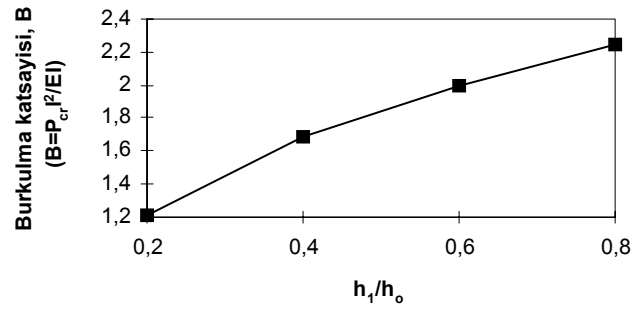
Şekil 8. Lineer kirişin statik stabilitesine b_1/b_0 ve h_1/h_0 oranlarının etkisi



Şekil 9. Dışbükey kirişin statik stabilitesine b_1/b_0 ve h_1/h_0 oranlarının etkisi (iki boyutta kesit değişimi, $l=100$ mm, $h_0=b_0=15$ mm)

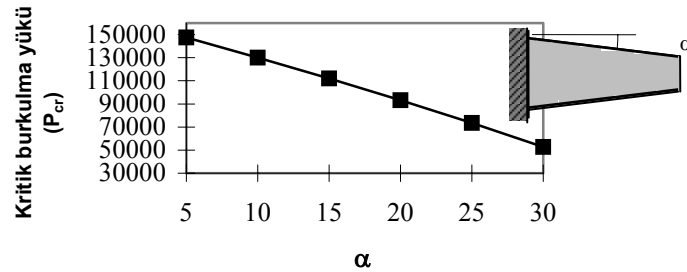
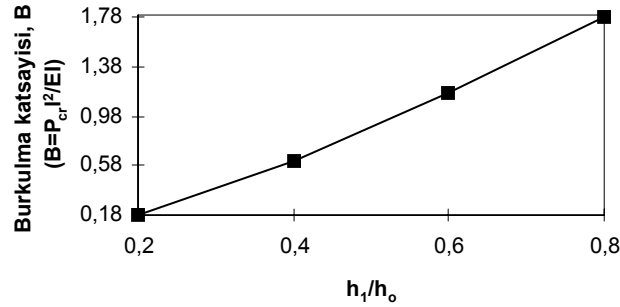


Şekil 10. İçbükey kirişin statik stabilitesine b_1/b_0 ve h_1/h_0 oranlarının etkisi (iki boyutta kesit değişimi, $l=100$ mm, $h_0=b_0=15$ mm)

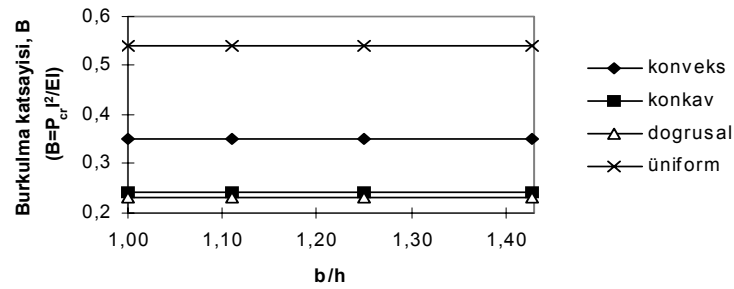


Şekil 11. Statik stabiliteye h_1/h_0 oranının etkisi (tek boyutta kesit değişimi, dışbükey-üniform, ($l=100$ mm, $h_0=b_0=15$ mm))

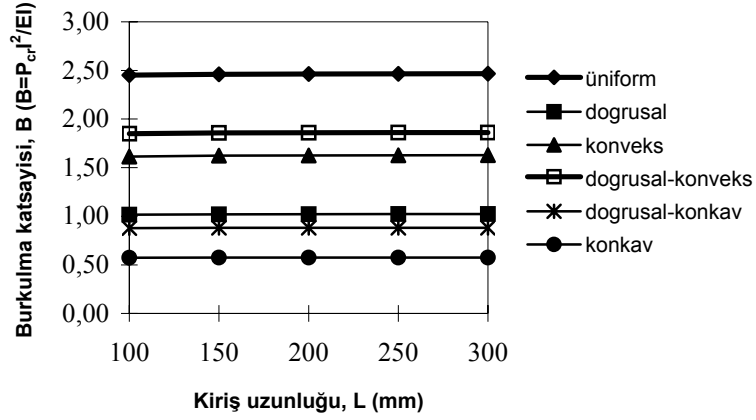
Şekil 12. Statik stabiliteye h_1/h_0 oranının etkisi (tek boyutta kesit değişimi, içbükey-üniform, ($l=100$ mm, $h_0=b_0=15$ mm))



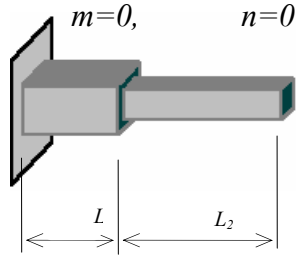
Şekil 13. Kesit değişim açısının statik stabiliteye etkisi (Doğrusal kiriş, $b_0=h_0=10$ mm, $l=50$ mm)



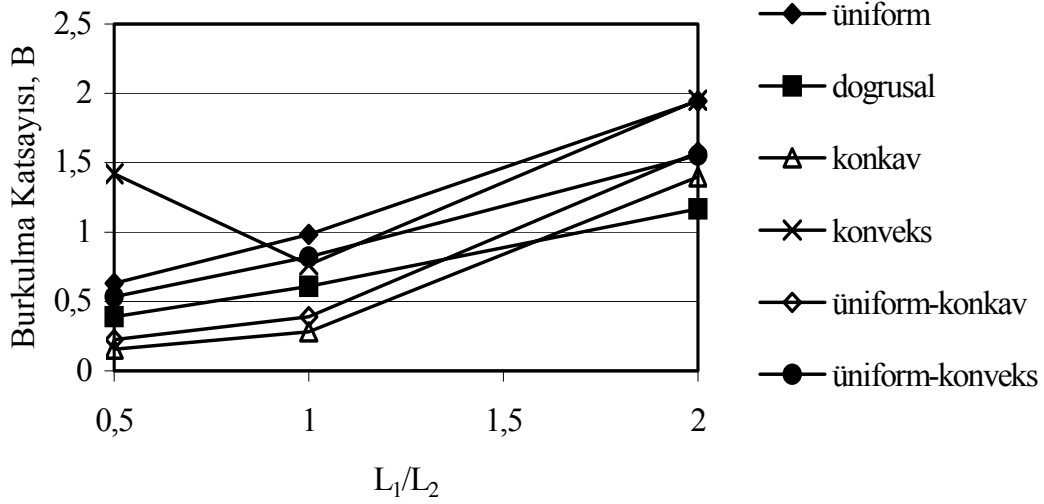
Şekil 14. Çeşitli kesit değişimlerinin statik stabiliteye etkileri (kademersiz kiriş, $l=200$ mm, $b_0=h_0=25$ mm)



Şekil 15. Çeşitli kesit değişimlerinin statik stabiliteye etkileri (kademeli kiriş, $l_1=l_2=100$ mm, $b_0=h_0=20$ mm, $b_2=h_2=10$ mm)



Şekil 16. Çeşitli kesit değişimlerinin statik stabiliteye etkileri (kademeli kiriş)



Şekil 17. l_1/l_2 oranının statik stabiliteye etkisi

Semboller

A	:Kesit alanı	M	:Moment
A_e	:Sonlu eleman alanı	P_{cr}	:Kritik burkulma yükü
A_s	:Kesme kuvveti etki alanı	q	:Deplasman vektörü
B	:Burkulma katsayısı	U	:Toplam şekil değiştirme enerjisi
b	:Kiriş genişliği	x	:Bağımsız değişken
d	:Sonlu eleman uzunluğu	V	:Kesme kuvveti
E	:Elastisite modülü	W	:Dış kuvvetlerin yaptığı iş
G	:Kayma modülü	θ	:Dönme
h	:Kiriş yüksekliği	γ	:Kayma şekil değiştirmesi
I	:Atalet momenti	κ	:Bulk modülü
K_e	:Elastik direngenlik matrisi	ν	:Poison oranı
K_g	:Geometrik direngenlik matrisi	τ	:Kayma gerilmesi
l	:Kiriş uzunluğu	ω	:Düşey yer değiştirme

KAYNAKLAR

- Bathe K. J., (1982): "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", New Jersey, Prentice Hall Inc.
- Belek H.T., (1984): "Kritik Hızların Sonlu Elemanlar-Transfer Matris Yöntemiyle Hesaplanması", 1.Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu, Ankara. 349-358.
- Brown J.E., Hutt J.M., Salama A.E., (1968): "FE Solution to Dynamic Stability of Bars" AIAA Journal, 7, 1423-1425.
- Burnett D.S., (1987): "FE Analysis from Concepts to Applications", New York: Addison-Wesley Publishing Company.
- Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., (1989): "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", (3rd edition) London: John Wiley & Sons.
- Desai C.S., Abel J.F., (1972): "Introduction to the FEM, A Numerical Method for Engineering Analysis", Boston: Von Nostrand Reinhold Company.
- Flügge W., (1982): "Handbook of Engineering Mechanics", New York: McGraw-Hill.
- Gere J.M., Timoshenko S.P., (1990): "Mechanics of Materials", (2nd SI edition) Boston: Von Nostrand Reinhold Company.
- Gere J.M., Carter W.O., (1963): "Critical Buckling Loads for Tapered Beam-Columns", Trans. Am. Soc. Civil Eng. 128.
- Güneş A., Yıldız K., (1997): "MATLAB for Windows", İstanbul: Türkmen Kitabevi.
- Huebner K.H., (1975): "The FEM for Engineers", New York: John Wiley & Sons.
- Kitipornchai, S., Trahair, N.S., (1972): "Elastic Stability of Tapered I-Beams", Am. Soc. Civil Eng., (98).
- Krishnamoorthy C.S., (1994): "Finite Element Analysis, Theory of Programming", (2nd edition), New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited.
- Kwon Y. W., Bang H., (1997): "The Finite Element Method Using MATLAB", New York: CRC Press.
- Massey C., Mcguire P.J., (1971): "Lateral Stability of Nonuniform Cantilevers", Proc. Am. Soc. Civil Eng. (97).
- Morrison T.G., (1972): "Lateral Buckling of Constrained Beams", Proc. Am. Soc. Civil Eng. (97).

- Naranaysnaswami R., Adelman H.M., (1974): "Inclusion of Transverse Shear Deformation in FE Displacement Formulations", American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 12, 1613-1614.
- Petyt M., (1990): "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambridge: Cambridge University Press.
- Popov E.P., (1968): "Introduction to Mechanics of Solids", New York: Macdonald.
- Reddy J.N., (1993): "An Introduction to the FEM", (2nd edition). New York: McGraw-Hill Inc.
- Rossi R.E., Laura P.A.A., (1993): "Numerical Experiments on Vibrating, Linearly Tapered Timoshenko Beams", Journal of Sound and Vibration, 168(1), 179-183.
- Simitse G.J., (1983): "Effect on Static Stability Preloading on the Dynamic Stability of Structures", AIAA Journal, 21 (8), 1174-1180.
- Thomas J., Abbas B.A., (1975): "FE Model for Dynamic Analysis of Timoshenko Beam", Journal of Sound and Vibration, 41 (3), 291-299.
- Thomas J., Abbas B.A., (1976): "Dynamic Stability of Timoshenko Beams by Finite Element Method", Journal of Engineering for Industry, 98 (1), 1145-1151.
- Timoshenko S.P., Gere J.M., (1961): "Theory of Elastic Stability", New York: McGraw- Hill Book Company.
- Yardımoğlu B., Sabuncu M., (1995): "Yay Sabiti ve Yay Konumunun Ankastre Bir Çubuğun Dinamik Stabilitesine Etkisi", 7. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu, İstanbul, 242-250.
- Young W.C., (1989): "Roark' s Formulas for Stress and Strain", (6th edition). New York: McGraw-Hill Inc.