MAXWELL DENKLEM SİSTEMİ İÇİNDE SCHRÖDINGER DALGA DENKLEMİNİN TARTIŞILMASI -

Sırrı KAVLAKOĞLU

Maden Tetkik ve Arama Enstitüsü, Ankara

ÖZET.— Elektromanyetik spektrum içinde mütalaa edilen ışığın yapısında «ışık-kuantum»lar da bahis konusudur.

Dalga halinde yayılması ve ışık-kuantum tabiatı nedeniyle «dalga-noktasal kütle ikilemesi» bir paradoksal nitelik taşımaktadır.

Bu yazıda, Maxwell denklemleri Helmholtz teoremini içerecek şekilde ele alınmış ve bu sistemin bir çözümü olarak Schrödinger dalga denklemine varılmıştır. Böylece paradoksal hale yeni bir boyut kazandırılmaya çalışılmıştır.

GİRİŞ

Bilindiği üzere ışık elektromanyetik dalga halinde yayılmaktadır. Bu nedenle pek çok hallerde, «optik-dalga» hareketleri, Maxwell denklemleri esas alınarak incelenmiştir (Bateman, 1955).

Diğer taraftan ışık, yapısındaki «ışık-kuantum» nedeniyle dalga mekaniğinin de konusu olmuştur. Dolayısıyle ışığın tabiatını bir yönüyle açıklaması nedeniyle Schrödinger dalga denklemi önemli olmaktadır. Bununla ilgili olarak, Sommerfeld dalga-optiği diferansiyel denkleminden hareket ederek Schrödinger dalga denklemini elde etmiştir (Sommerfeld, 1928).

Bu yazımızda Helmholtz teoremi ışığı altında Maxwell denklemleri sisteminde Schrödinger dalga denkleminin tartışılmasının yapılmasına çalışılmıştır. Böylece «dalga-noktasal kütle ikilemesi» paradoksuna yeni bir boyut kazandırılmıştır.

TEORİ

Helmholtz teoremi muvacehesinde Maxwell denklemleri

Eğer bir F vektör sahası tamamen genel matematik şartı sağlıyorsa, F vektörü iki vektörün toplamı şeklinde yazılabilir.

$$\vec{F} = -\Delta \varphi + \Delta \times \vec{A} \qquad \text{......} \qquad (1)$$

Burada $\Delta\varphi$ skaler potansiyel fonksiyondan türemiş, irrotasiyonel bir vektör, A vektörel bir potansiyel olup, solenoidaldir.

Bu teoremin ışığı altında, $\frac{\partial D}{\partial t}$ yer değiştirme-akım yoğunluk vel törünü genel olarak,

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\Delta \varphi + \Delta \times \vec{H} \qquad \text{......} \qquad (2)$$

şeklinde, teorik olarak, yazma olasılığı vardır. Ayrıca $\Delta\varphi$ nin sıfır olmadığı bir ortam varsayılabilir.

Bunlara göre Maxwell denklemlerini tertipleyecek olursak,

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\Delta\,\varphi + \Delta \times \vec{H} \quad \Delta \cdot \vec{D} = \rho$$
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\Delta \times \vec{E} \qquad \Delta \cdot \vec{B} = 0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

şeklinde olacaktır. (M.K.S. birimleri kullanılmıştır.)

Burada,

φ : Skaler potansiyel fonksiyonu

$\vec{H}$: Manyetik alan şiddet vektörü

B : Manyetik alan indüksiyon vektörü

$\vec{E}$: Elektrik alan şiddet vektörü

$\vec{D}$: Elektrik yer değiştirme vektörü

ρ : $\Delta \cdot \vec{D} = \rho$ şeklindedir.

φ skaler fonksiyonunun tabi olduğu diferansiyel denklemler:

Yukarıda belirttiğimiz (3) Maxwell denklemlerinin çözümünü yapacak olursak, φ fonksiyonunun tabi olduğu diferansiyel denklemleri bulabiliriz.

Eğer (3) sistemine ait birinci denklemin her iki tarafının diverjanını alacak olursak,

$$-\Delta \cdot \Delta\,\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \ldots\ldots (4)$$

denklemi bulunur.

(4) denkleminin açık ifadesi şöyledir.

$$-\Delta \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Diğer taraftan,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyle

$$-\Delta \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}k\right) = \frac{\partial \rho}{\partial x}V_x + \frac{\partial \rho}{\partial y}V_y + \frac{\partial \rho}{\partial z}V_z \quad \ldots (5)$$

denklemi yazılabilir.

$$r^2 = V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \qquad \ldots\ldots (6)$$

olduğuna ve V hızını sabit olarak alabileceğimize göre, V_x in x, V_y nin y, V_z nin z ye göre değişimleri sıfırdır.

(5) denklemini

$$-\Delta \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho V_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bunu aşağıdaki şekilde düzenleyelim:

$$-\Delta \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k \right) = \Delta \cdot (\rho V_x \vec{i} + \rho V_y \vec{j} + \rho V_z \vec{k})$$

Bu denklemin bir çözümü de,

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = \rho V_x \vec{i} + \rho V_y \vec{j} + \rho V_z \vec{k} \quad \text{..............} \quad (7)$$

şeklinde olacaktır.

(7) denkleminin her iki tarafını

$$V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

hız vektörü ile skaler olarak çarpalım.

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \rho (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)$$

elde edilir. Buradan,

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \rho V^2 \quad \text{..............................} \quad (8)$$

eşitliği bulunur.

(4) ve (8) bağıntılarından

$$\Delta^2 \varphi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \text{..............................} \quad (9)$$

«dalga denklemi» ne varılır.

Diğer taraftan, (7) ve (8) bağıntılarından

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 \quad \text{..............................} \quad (10)$$

«Hamilton denklemi» elde edilir (Bateman, 1955).

Böylece, Helmholtz teoremi ışığı altında, Maxwell denklemlerinin tartışılması sonucunda

$$\varphi = \varphi (x, y, z, t)$$

fonksiyonuna ait, dalga denklemiyle birlikte, geometrik-optikin ve dalga mekaniğinin önemli denklemlerinden olan Hamilton denklemine varılmıştır.

φ fonksiyonuna bağlı olarak Schrödinger dalga denklemi

Buraya kadar Helmholtz teoremi muvacehesinde, Maxwell denklemlerinin bir çözümünü soyut bir düşünceye dayanarak vermiş olduk.

Böylece irrotasiyonel $\Delta\varphi$ vektörünü türeten φ potansiyel fonksiyonunun,

$$\Delta^2\varphi = \frac{1}{V^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

dalga denklemini sağladığı ve bu dalganın μ faz hızı ile hareket ettiği saptanmıştır.

Ayrıca, φ fonksiyonu,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2$$

şeklindeki, fizik-optik ve dalga mekaniği konularının temel formülü olan, Hamilton diferansiyel denklemini sağlamaktadır.

Bu iki sonucun dalga mekaniği ile ilgili fizik anlamını açıklamaya çalışalım.

Monokromatik ışık halinde

$$\varphi = \psi\ (x, y, z)\ e^{i\omega t} \qquad \text{(11)}$$

şeklinde değiştiğini varsayalım.

Denklem (10) ve (11) den

$$-\left[\frac{1}{k_o{}^2 y^2}\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right)\right] = n^2 \qquad \text{(12)}$$

denklemi bulunacaktır.

$$\frac{1}{i\,k_o\,\psi}\ \frac{\partial\psi}{\partial q} = \frac{\partial s}{\partial q} \qquad \text{(13)}$$

değiştirmesi yapalım.

Bu takdirde,

$$\psi = A\,e^{i\,k_o\,S} \qquad \text{(14)}$$

ve

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2 \qquad \text{(15)}$$

olacaktır.

Burada S, aksiyon-fonksiyonu, yahut Hamilton karakteristik fonksiyonudur. Diğer taraftan, $k = n\,k_o$ olup,

$k = \dfrac{\omega}{V}$ dalga sayısı, k_o bunun vakumdaki karşılığı ve n vakuma göre, refraktif indeksidir.

Aynı zamanda,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = 2\,m\,(E\text{-}V) \quad \ldots\ldots (16)$$

olduğu bilinmektedir (Sommerfeld, 1928 s. 3).

Burada,

m, noktasal-kütle, E enerji sabiti, V potansiyel enerji olup, sadece (x,y,z) koordinatlarının fonksiyonudur.

Denklem, (9), (11), (15) ve (16) dan,

$$\Delta^2\,\psi + 2\,m\,(E\text{-}V)\,k_o^2\,\psi = 0 \quad \ldots\ldots (17)$$

elde edilir.

k_o üniversal bir büyüklüktür ve bunun mümkün olan değeri

$$k_o = \frac{2\,\pi}{h} \quad \ldots\ldots (18)$$

dır. Burada h plank sabitidir (Sommerfeld, 1928 s. 5).

(18) ifadesini (17) dalga denkleminde yerine koyacak olursak, mikromekaniğin

$$\Delta^2\,\psi + 2\,m\,(E\text{-}V)\left(\frac{2\,\pi}{h}\right)^2 \psi = 0 \quad \ldots\ldots (19)$$

şeklindeki tek noktasal kütle için Schrödinger dalga denkleminin basit şekli elde edilir. Bu dalga mekaniğinin temel denklemidir. ψ de dalga fonksiyonudur.

Tartıştığımız konu yönünden noktasal kütlenin dış kuvvet altında olmadığı düşünülürse $V = 0$ olarak seçilebilir. Bu takdirde, Schrödinger dalga denklemi basit şekliyle

$$\Delta^2\,\psi + m\,E\,\frac{8\,\pi^2}{h^2}\,\psi = 0 \quad \ldots\ldots (20)$$

biçiminde olacaktır.

$$m\,E\,\frac{8\,\pi^2}{h} = k^2$$

olduğuna göre, (20) denklemi,

$$\Delta^2\,\psi + k^2\,\psi = 0 \quad \ldots\ldots (21)$$

şeklinde olacaktır.

Bunun, optik problemler yönünden düzlemsel dalga hali için integre edersek pozitif x doğrultusu için,

$$\psi = A\,e^{ikx} \quad \ldots\ldots (22)$$

denklemi elde edilir.

Yayına verildiği tarih, 4 mayıs 1979

REFERANSLAR

BATEMAN, H. (1955): The mathematical analysis of electrical and optical wave-motion on the Basis of MaxwelPs Equations. *Dover Publications,* U.S.A.

SOMMERFELD, A. (1928): Wave-mechanics. *E.P. Button and Company Inc.,* New York, U.S.A.

———(1949): Partial differential equation in physics.

STRATTON, J.A. (1949): Electromagnetic theory.