

Çarpımsal Geometride Uzak Eğrileri ve Özel Eğri Çiftleri

Hasan ES^{1*}

¹ Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Gazi Eğitim Fakültesi, Gazi Üniversitesi, Ankara, Türkiye

*¹ hasanes@gazi.edu.tr

(Geliş/Received: 24/04/2026;

Kabul/Accepted: 13/09/2026)

Öz: Bu çalışmada, n -boyutlu çarpımsal uzayda çarpımsal eğri kavramı tanımlanmış, bu eğriler için çarpımsal Serret–Frenet çatısı oluşturulmuş ve çarpımsal eğrilikler tanımlanarak bunlara ilişkin temel teoremler verilmiştir. Ayrıca, n -boyutlu çarpımsal uzayda involüt–evolüt eğrileri ile Bertrand eğri çiftleri tanımlanmıştır. Bunun yanı sıra, geliştirilen genel kuramın özel bir durumu olarak üç boyutlu çarpımsal uzay incelenmiş; ilgili tanımlar yapılmış, temel sonuçlar elde edilmiş ve involüt–evolüt eğrileri ile Bertrand eğri çiftlerine ilişkin karakterizasyonlar ve teoremler sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Çarpımsal eğri, çarpımsal involüt ve çarpımsal evolüt eğriler, çarpımsal bertrand eğriler, çarpımsal eğrilik.

Space Curves and Special Curve Pairs in Multiplicative Calculus

Abstract: In this paper, the concept of multiplicative curves is developed in n -dimensional multiplicative space. A multiplicative Serret–Frenet frame is constructed for these curves, multiplicative curvature functions are introduced, and their fundamental properties are established through several theorems. Furthermore, the notions of multiplicative involute–evolute curves and multiplicative Bertrand curve pairs are formulated within the n -dimensional framework. As a particular case of the proposed theory, the three-dimensional multiplicative space is investigated, where the corresponding definitions, principal results, characterization theorems, and fundamental properties of multiplicative involute–evolute curves and Bertrand curve pairs are presented.

Keywords: Multiplicative curve, multiplicative involute and multiplicative evolute curves, multiplicative bertrand curves, multiplicative curvature.

1. Giriş

Çarpımsal analiz, ilk olarak Michael Grossman ve Robert Katz tarafından ortaya konmuş olup literatürde Newton dışı analiz olarak da bilinir. Klasik analizden farklı olarak bu yaklaşımın temeli çarpımsal türev ve çarpımsal integral kavramlarına dayanır [1]. Bu alanın farklı türleri ve uygulamaları, Grossman ve Katz'ın yanı sıra Stanley, Campbell ve Jane Grossman gibi araştırmacıların çalışmalarıyla geliştirilmiştir [2–7].

Çarpımsal analiz tek bir kuramsal yapıdan oluşmamaktadır. Literatürde geometrik analiz (Geometric Calculus), bigeometrik analiz (Bigeometric Calculus) ve bunların çeşitli genellemeleri geliştirilmiştir. Bu çalışmada ise geometrik reel sayılar sistemi üzerine kurulu olan geometrik çarpımsal analiz (Geometric Calculus) yaklaşımı esas alınmıştır. Dolayısıyla bu makalede kullanılan tüm çarpımsal işlemler, türevler ve geometrik yapılar bu çerçevede ele alınmaktadır.

Daha sonra Bashirov ve diğerleri, Bashirov ve Rıza, Tekin ve Başar, Türkmen ve Başar bu teoriyi daha sistemli ve analitik bir çerçeveye oturtmuştur [8–12]. Ayrıca çarpımsal analizin karmaşık değerli fonksiyonlara genişletilmesi de bu çalışmalarla ele alınmıştır.

Bu bağlamda Çakmak ve Başar, Uzer çarpımsal yapılar altında dizi uzayları üzerindeki matris dönüşümlerini incelemiştir [13–15]. Ayrıca K. Boruah ve B. Hazarika geometrik reel sayılar sistemini tanımlamış ve geometrik trigonometrik oranları geliştirerek klasik trigonometrik fonksiyonlarla ilişkilerini ortaya koymuştur [16–18]. H. Es ise farklı metrikler altında çarpımsal hareketi ele almış ve önemli sonuçlar elde etmiştir [19–22]. Ayrıca S. Nurkan, K. İ. Gürgil ve M. K. Karacan geometrik analizde vektörel yapıları incelemiştir [23]. S. Aslan, M. Bekar ve Y. Yaylı üç boyutlu geometrik uzay ve çarpımsal kuaterniyon kavramlarını tanıtmıştır [24]. A. Has ve B. Yılmaz çarpımsal analitik geometrinin temel prensiplerini ortaya koymuş ve uzayda helis eğrisini tanıtmıştır. [25–26]. Misirli, Gurefe, S. G. Georgiev ve K. Zennir çarpımsal vektör uzayları, iç çarpım uzayları ve matris kavramlarını

* Sorumlu yazar: hasanes@gazi.edu.tr. Yazarların ORCID Numarası: ¹ 0000-0002-7732-8173

tanımlayarak temel özelliklerini incelemiştir [27-29]. Aydın, M.E., Dilmen, E., Yaman, G., Öklid uzayın ve bu uzayda bulunan bazı çarpımsal yüzeylerin jeodeziklerini incelemiştir [30].

Tüm bu çalışmalar, çarpımsal analizin ve buna bağlı cebirsel ile geometrik yapıların hızla geliştiğini ve matematikte giderek daha geniş bir kullanım alanı bulduğunu göstermektedir.

2. Temel Bilgiler

2.1. Çarpımsal reel sayılar

Çarpımsal reel sayılar kümesi

$$\mathbb{R}_* = \{\exp(y) = e^y : y \in \mathbb{R}\},$$

şeklinde verilir. $\mathbb{R}_*$ kümesi üzerinde toplama işlemini $+$ ve çarpma işlemi $\cdot$ ile gösterilecektir. $e^y, e^z \in \mathbb{R}_*$ için toplama işlemi ve çarpma işlemi, sırası ile, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$e^y + e^z = e^{y+z}, \quad e^y \cdot e^z = e^{yz}$$

$(\mathbb{R}_*, +, \cdot)$ kümesi, toplama işleminin birimi $e^0 = 1$, ve çarpma işleminin birimi $e^1 = e$ olan bir cisimdir. Şimdi çarpımsal işlemler ile aşına olduğumuz aritmetik işlemler arasındaki bağıntıyı aşağıdaki gibi verelim. Her $\gamma, \delta \in \mathbb{R}_*$ için

$$\gamma + \delta = \gamma\delta, \quad \gamma - \delta = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \gamma \cdot \delta = \gamma^{\ln \delta} = \delta^{\ln \gamma}, \quad \gamma / \delta = \gamma^{(\frac{1}{\ln \delta})}, \quad \sqrt[\gamma]{\delta} = e^{\sqrt{\ln \delta}}, \quad \delta^{-1} = e^{(\frac{1}{\ln \delta})}.$$

Buna ek olarak $\mathbb{R}_*$ kümesi üzerindeki aşağıdaki işlemleri de verilebilir,

$$e^y + e^\delta = e^{y+\delta}, \quad e^y \cdot e^\delta = e^{y\delta}, \quad e^y - e^\delta = e^{y-\delta}, \quad e^y / e^\delta = e^{\frac{y}{\delta}}, \quad \sqrt[e^y]{e^\delta} = e^{\sqrt{y\delta}}.$$

Pozitif çarpımsal reel sayılar kümesi $\mathbb{R}_*^+$ ve negatif çarpımsal reel sayılar kümesi $\mathbb{R}_*^-$ kümesini, sırası ile, aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$\mathbb{R}_*^+ = \{\delta \in \mathbb{R}_* : \delta > 1\} \text{ ve } \mathbb{R}_*^- = \{\delta \in \mathbb{R}_* : 0 < \delta < 1\} \text{ [29].}$$

Tanım 2.1.1. $x \in \mathbb{R}_*$ in mutlak değeri

$$|x|_* = \begin{cases} x & \text{eğer } x \geq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{eğer } x < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [29].

2.2. Çarpımsal n- uzay

$$\mathbb{R}_*^n = \{\hat{p} = (e^{p_1}, e^{p_2}, \dots, e^{p_n}) : e^{p_1}, e^{p_2}, \dots, e^{p_n} \in \mathbb{R}_*\} \subset \mathbb{R}_*^n.$$

$\mathbb{R}_*^n$ kümesi üzerinde toplama işlemi,

her $\hat{p}, \hat{q} \in \mathbb{R}_*^n$ için

$$\begin{aligned} \hat{p} + \hat{q} &= (e^{p_1}, e^{p_2}, \dots, e^{p_n}) + (e^{q_1}, e^{q_2}, \dots, e^{q_n}) \\ &= (e^{p_1} + e^{q_1}, e^{p_2} + e^{q_2}, \dots, e^{p_n} + e^{q_n}) \\ &= (e^{p_1+q_1}, e^{p_2+q_2}, \dots, e^{p_n+q_n}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}_*^n$ kümesi üzerinde skalar çarpma işlemi,

her $e^r \in \mathbb{R}_*$, her $\hat{p} \in \mathbb{R}_*^n$ için

$$\begin{aligned} e^r \cdot \hat{p} &= e^r \cdot (e^{p_1}, e^{p_2}, \dots, e^{p_n}) \\ &= (e^r \cdot e^{p_1}, e^r \cdot e^{p_2}, \dots, e^r \cdot e^{p_n}) \\ &= (e^{rp_1}, e^{rp_2}, \dots, e^{rp_n}) \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

$$\{\hat{m}_1 = (e, e^0, e^0, \dots, e^0), \hat{m}_2 = (e^0, e, e^0, \dots, e^0), \hat{m}_n = (e^0, e^0, e^0, \dots, e)\}$$

kümesi $\mathbb{R}_*^n$ nin standart tabanıdır. $\mathbb{R}_*^n$ deki orijin noktası ise

$$\hat{0} = (e^0, e^0, \dots, e^0) = (1, 1, 1, \dots, 1) \text{ dir.}$$

Bu çalışmada; $\mathbb{R}_*^n$ de çarpımsal iç çarpım $\langle, \rangle_*$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.1. ($\mathbb{R}_*^n$ üzerinde iç çarpım)

$\mathbb{R}_*^n$ de $\hat{p} = (e^{p_1}, e^{p_2}, \dots, e^{p_n})$ ve $\hat{r} = (e^{r_1}, e^{r_2}, \dots, e^{r_n})$ vektörlerini göz önüne alalım. Bu iki vektörün çarpımsal iç çarpım

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}, \hat{r} \rangle_* &= \langle (e^{p_1}, e^{p_2}, \dots, e^{p_n}), (e^{r_1}, e^{r_2}, \dots, e^{r_n}) \rangle_* \\ &= (e^{p_1} \cdot e^{r_1}) + (e^{p_2} \cdot e^{r_2}) + \dots + (e^{p_n} \cdot e^{r_n}) \\ &= (e^{p_1 r_1} + e^{p_2 r_2} + \dots + e^{p_n r_n}) \\ &= e^{p_1 r_1 + p_2 r_2 + \dots + p_n r_n} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.2.2. ($\mathbb{R}^n_*$ üzerinde norm)

$\|\hat{r}\|_* = \sqrt[n]{\langle \hat{r}, \hat{r} \rangle_*} = e^{\sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 + \dots + (r_n)^2}}$
 şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3.

$a_i \in \mathbb{R}^n_*$ ($1 \leq i \leq n$) ve $k_i \in \mathbb{R}_*$ skalarlar olsun.

$$k_1 \cdot_* a_1 +_* k_2 \cdot_* a_2 +_* \dots +_* k_n \cdot_* a_n = 1,$$

ifadesinde eğer $\forall k_i = 1$ ise $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kümesi lineer bağımsızdır, ancak $\exists k_i \neq 1$ ise $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kümesi lineer bağımlıdır denir.

2.3. Çarpımsal vektörel çarpım

Tanım 2.3.1. $\hat{k} = (e^{k_1}, e^{k_2}, e^{k_3})$ ve $\hat{m} = (e^{m_1}, e^{m_2}, e^{m_3})$, $\hat{k}, \hat{m} \in \mathbb{R}^3_*$ olsun.

$\hat{e}_1 = (e, e^0, e^0)$, $\hat{e}_2 = (e^0, e, e^0)$, $\hat{e}_3 = (e^0, e^0, e)$ olsun. $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ ve $\hat{e}_3$ vektörleri $\mathbb{R}^3_*$ uzayının taban vektörleridir. Şimdi $\hat{k}$ ve $\hat{m}$ vektörlerin çarpımsal vektörel çarpımı aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{aligned} \hat{k} \wedge_* \hat{m} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ e^{k_1} & e^{k_2} & e^{k_3} \\ e^{m_1} & e^{m_2} & e^{m_3} \end{vmatrix}_* = \left(\begin{vmatrix} e^{k_2} & e^{k_3} \\ e^{m_2} & e^{m_3} \end{vmatrix}_* \cdot \hat{e}_1 \right) +_* \left(- \begin{vmatrix} e^{k_1} & e^{k_3} \\ e^{m_1} & e^{m_3} \end{vmatrix}_* \cdot \hat{e}_2 \right) +_* \left(\begin{vmatrix} e^{k_1} & e^{k_2} \\ e^{m_1} & e^{m_2} \end{vmatrix}_* \cdot \hat{e}_3 \right) \\ &= (e^{k_2 m_3 - k_3 m_2}, e^{k_3 m_1 - k_1 m_3}, e^{k_1 m_2 - k_2 m_1}) \end{aligned}$$

dir.

Önerme 2.3.1.

- 1) $\hat{k} \wedge_* (\hat{l} \wedge_* \hat{m}) = \langle \hat{k}, \hat{m} \rangle_{**} \hat{l} -_* \langle \hat{k}, \hat{l} \rangle_{**} \hat{m}$
- 2) $(\hat{k} \wedge_* \hat{l}) \wedge_* \hat{m} = \langle \hat{k}, \hat{m} \rangle_{**} \hat{l} -_* \langle \hat{l}, \hat{m} \rangle_{**} \hat{k}$

İspat. 1) in ispatını için bak [31].

2) nin ispatı:

$$(\hat{k} \wedge_* \hat{l}) \wedge_* \hat{m} = (e^{k_3 l_1 m_3 - k_1 l_3 m_3 - k_1 l_2 m_2 + k_2 l_1 m_2}, e^{k_1 l_2 m_1 - k_2 l_1 m_1 - k_2 l_3 m_3 + k_3 l_2 m_3}, e^{k_2 l_3 m_3 - k_3 l_2 m_2 - k_3 l_1 m_1 + k_1 l_3 m_1})$$

$$\langle \hat{k}, \hat{m} \rangle_{**} \hat{l} -_* \langle \hat{l}, \hat{m} \rangle_{**} \hat{k} = \langle (e^{k_1}, e^{k_2}, e^{k_3}), (e^{l_1}, e^{l_2}, e^{l_3}) \rangle_{**} (e^{l_1}, e^{l_2}, e^{l_3})$$

$$-_* \langle (e^{l_1}, e^{l_2}, e^{l_3}), (e^{m_1}, e^{m_2}, e^{m_3}) \rangle_{**} (e^{k_1}, e^{k_2}, e^{k_3})$$

gerekli işlemler yapılırsa, istediğimiz sonuca varırız.

$$= (e^{k_3 l_1 m_3 - k_1 l_3 m_3 - k_1 l_2 m_2 + k_2 l_1 m_2}, e^{k_1 l_2 m_1 - k_2 l_1 m_1 - k_2 l_3 m_3 + k_3 l_2 m_3}, e^{k_2 l_3 m_3 - k_3 l_2 m_2 - k_3 l_1 m_1 + k_1 l_3 m_1}),$$

o halde

$$(\hat{k} \wedge_* \hat{l}) \wedge_* \hat{m} = \langle \hat{k}, \hat{m} \rangle_{**} \hat{l} -_* \langle \hat{l}, \hat{m} \rangle_{**} \hat{k}$$

dir.

2.4. Çarpımsal matrisler

Tanım 2.4.1. Bileşenleri çarpımsal reel sayılar olan $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi $\mathcal{K}_{*m \times n}$ ile gösterilir [29].

Tanım 2.4.2 $\mathcal{P} = (p_{ij}) \in \mathcal{K}_{*m \times n}$ ve $\mathcal{T} = (t_{ij}) \in \mathcal{K}_{*m \times n}$ çarpımsal matrisler ve $c \in \mathbb{R}_*$ olsun. $\mathcal{K}_{*m \times n}$ kümesi üzerinde toplama ve skalar ile çarpma işlemi, sırası ile,

$$\mathcal{P} \pm_* \mathcal{T} = (p_{ij} \pm_* t_{ij}), \quad c \cdot_* \mathcal{P} = (c \cdot_* p_{ij})$$

şeklinde tanımlanır [29].

Tanım 2.4.3. $I_* \in \mathcal{K}_{*n \times n}$ çarpımsal birim matris

$$I_* = \begin{pmatrix} e & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & e \end{pmatrix}_{n \times n}$$

şeklinde dir. Burada çarpımsal anlamında sıfır elemanını $e^0 = 1$ ve çarpımsal anlamda bir elemanı $e^1 = e$ dir [22].

Tanım 2.4.4. $\mathcal{P} = (p_{ij}) \in \mathcal{K}_{m \times n}$ ve $\mathcal{T} = (t_{ij}) \in \mathcal{K}_{n \times p}$ çarpımsal matrislerin çarpımsal anlamda matris çarpımı

$$\mathcal{P} *_* \mathcal{T} = \mathcal{S} = (s_{ij}) \in \mathcal{K}_{m \times p}$$

şeklinde bir $\mathcal{S}$ çarpımsal matristir. Bu matrisin s_{ij} elemanları

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{n*} (p_{ik} *_* t_{kj})$$

dir [27].

$$\mathbf{Tanım\ 2.4.5.} \ \mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_{2 \times 2}$$

matrisinin çarpımsal determinanı

$\det_* \mathcal{P} = p_{11} *_* p_{22} -_* p_{21} *_* p_{12}$ dir. Eğer $\det_* \mathcal{P} \neq 1$ ise $\mathcal{P}$ inversi vardır.

$\mathcal{P}$ nin inversi $\mathcal{P}^{-1*}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{P}^{-1*} = (e /_* \det_* \mathcal{P}) *_* \begin{pmatrix} p_{22} & \frac{1}{p_{12}} \\ \frac{1}{p_{21}} & p_{11} \end{pmatrix}$$

dir [29].

Tanım 2.4.6. $\mathcal{P} = (p_{ij}) \in \mathcal{K}_{n \times n}$ çarpımsal matrisi ortogonal ise

$$\mathcal{P} *_* \mathcal{P}^T = \mathcal{P}^T *_* \mathcal{P} = I_*$$

dir [29].

2.5. Çarpımsal türev ve çarpımsal trigonometrik fonksiyonlar

Tanım 2.5.1. Herhangi bir f fonksiyonunun x değişkenine bağlı çarpımsal türevi $f^*(x)$ sembolü ile ifade edilir.

$A \subseteq \mathbb{R}_*$ üzerindeki tüm x değerleri için $f^*(x)$ fonksiyonu için

$$f^* : A \rightarrow \mathbb{R}_*, f^*(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{h}}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca klasik türev ile çarpımsal türev arasında $f^*(x) = e^{(\ln f(x))'}$ ilişkisi vardır [27].

Tanım 2.5.2. Çarpımsal trigonometri fonksiyonları ile klasik trigonometri fonksiyonları arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibidir.

$$\sin_* \theta = e^{\sin \theta}, \cos_* \theta = e^{\cos \theta}, \tan_* \theta = e^{\tan \theta} = \sin_* \theta /_* \cos_* \theta \text{ [17].}$$

3. Çarpımsal Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri

$$p: I \rightarrow E_*^n, I \subset \mathbb{R}_*, t \rightarrow p(t) = (e^{p_1(t)}, e^{p_2(t)}, \dots, e^{p_n(t)})$$

biçiminde (C^∞ sınıfında) tanımlanan bu p dönüşümüne E_*^n de bir çarpımsal eğri adlandırılır.

Tanım 3.1. (Çarpımsal birim hızlı eğri) (I, p) koordinat komşuluğu ile verilmiş olan M çarpımsal eğrisi, birim hızlı bir eğri ise $\|p^*(s)\|_* = e$ dir.

Tanım 3.2. $S = (p^*, p^{**}, p^{***}, \dots, p^{*(r)})$ sistemi lineer bağımsız ve $p^{*(k+1)} \in S_p\{(p^*, p^{**}, p^{***}, \dots, p^{*(r)})\}$ ise S sistemine Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodunu uygulanabilir. O zaman;

$$\hat{E}_1 = p^*$$

$$\hat{E}_2 = p^{**} - p^{**} *_* (\langle p^{**}, \hat{E}_1 \rangle_* /_* \langle \hat{E}_1, \hat{E}_1 \rangle_*) *_* \hat{E}_1$$

$$\hat{E}_3 = p^{***} -_* (\langle p^{***}, \hat{E}_2 \rangle_* /_* \langle \hat{E}_2, \hat{E}_2 \rangle_*) *_* \hat{E}_2 -_* (\langle p^{***}, \hat{E}_1 \rangle_* /_* \langle \hat{E}_1, \hat{E}_1 \rangle_*) *_* \hat{E}_1$$

.

.

$$\hat{E}_i = p^{*(i)} -_* \sum_{j < i} (\langle p^{*(i)}, \hat{E}_j \rangle_* /_* \langle \hat{E}_j, \hat{E}_j \rangle_*) *_* \hat{E}_j, 1 < i \leq r,$$

olmak üzere $\{\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3, \dots, \hat{E}_r\}$ sistemi çarpımsal ortogonal sistemdir.

$$\hat{V}_1 = \hat{E}_1 /_* \|\hat{E}_1\|_*$$

$$\hat{V}_2 = \hat{E}_2 /_* \|\hat{E}_2\|_*$$

$$\hat{V}_3 = \hat{E}_3 /_* \|\hat{E}_3\|_*$$

.

.

.

$$\hat{V}_r = \hat{E}_r / \|\hat{E}_r\|_*$$

Gram-Schmidt yöntemi uygulanarak elde edilen $\{\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3, \dots, \hat{V}_r\}$ ortonormal sisteme çarpımsal Serret-Frenet

r ayaklısı denir.

Özel Hal:

$n = 3$ özel hali için

$$p: I \rightarrow E_*^3, p \rightarrow p(t) = (e^{p_1(t)}, e^{p_2(t)}, e^{p_3(t)})$$

şeklinde tanımlanan p çarpımsal eğrisi için $p^*(t) = \hat{E}_1$ olmak üzere,

$$\hat{V}_1(t) = p^*(t) / \|p^*(t)\|_*$$

çarpımsal birim vektörüne eğrinin çarpımsal **teğet vektör alanı** denir. Eğer

$$p: I \rightarrow E_*^3, p \rightarrow p(s) = (e^{p_1(s)}, e^{p_2(s)}, e^{p_3(s)})$$

çarpımsal eğrisi yay parametresi ile verilmiş ise $\|p^*(s)\|_* = e$ olacaktır. O zaman

$$\hat{V}_1(s) = p^*(s) \text{ ve } \hat{E}_2 = p^{**} - \langle p^{**}, p^* \rangle_* / \langle p^*, p^* \rangle_* \cdot p^*$$

olur.

$$\|p^*(s)\|_* = e$$

$\langle p^*(s), p^*(s) \rangle_* = e$ ifadesinin çarpımsal anlamda her iki tarafın türevi alınır

$$\langle p^{**}(s), p^*(s) \rangle_* + \langle p^*(s), p^{**}(s) \rangle_* = 1$$

$$\langle p^*(s), p^{**}(s) \rangle_* = 1$$

dir. O halde

$$\hat{E}_2 = p^{**} - \langle p^{**}, \hat{E}_1 \rangle_* / \langle \hat{E}_1, \hat{E}_1 \rangle_* \cdot \hat{E}_1$$

$$\hat{E}_2 = p^{**} - \langle p^{**}, p^* \rangle_* / \langle p^*, p^* \rangle_* \cdot p^* = p^{**}$$

olduğu görülür.

$$\hat{V}_2(s) = \hat{E}_2(s) / \|\hat{E}_2(s)\|_*$$

$$= p^{**}(s) / \|p^{**}(s)\|_*$$

vektörüne çarpımsal **asli normal vektör alanı** veya birim çarpımsal **asli normal vektör alanı** denir.

$$\hat{V}_3(s) = \hat{V}_1(s) \wedge_* \hat{V}_2(s)$$

olarak tanımlandığından

$$\hat{V}_3(s) = (p^*(s) \wedge_* p^{**}(s)) / \|p^{**}(s)\|_*$$

biçiminde tanımlı birim vektörüne çarpımsal **binormal vektör alanı** denir. O zaman

$$\hat{V}_1(s) = p^*(s),$$

$$\hat{V}_2(s) = p^{**}(s) / \|p^{**}(s)\|_*$$

$$\hat{V}_3(s) = (p^*(s) \wedge_* p^{**}(s)) / \|p^{**}(s)\|_*$$

vektörlerinden oluşan $\{\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3\}$ sistemine çarpımsal Serret-Frenet 3-ayaklısı adlandırılır.

Tanım 3.3. (I, p) koordinat komşuluğu ile M çarpımsal eğrisi verilmiş olsun. $s \in I$ ya karşılık gelen $p(s)$ noktalarındaki çarpımsal Frenet r -ayaklısı $\{\hat{V}_1(s), \hat{V}_2(s), \hat{V}_3(s), \dots, \hat{V}_r(s)\}$ olsun. O halde

$$k_i: I \rightarrow \mathbb{R}_*, 1 \leq i \leq r$$

$$k_i(s) = \langle \hat{V}_i^*(s), \hat{V}_{i+1}(s) \rangle_*$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M çarpımsal eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ çarpımsal reel sayısına da $p(s)$ noktasındaki M çarpımsal eğrisinin i -yinci eğriliği denir.

Teorem 3.1. $M \subseteq E_*^n$ çarpımsal eğrisi (I, p) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $p(s)$ noktasında çarpımsal i -yinci eğrilik fonksiyonu $k_i(s)$ ve çarpımsal Frenet r -ayaklısı

$$\{\hat{V}_1(s), \hat{V}_2(s), \hat{V}_3(s), \dots, \hat{V}_r(s)\} \text{ ise}$$

$$1) \hat{V}_1^*(s) = k_1(s) \cdot \hat{V}_2(s)$$

$$2) \hat{V}_i^*(s) = -k_{i-1}(s) \cdot \hat{V}_{i-1}(s) + k_i(s) \cdot \hat{V}_{i+1}(s), 1 \leq i \leq r$$

$$3) \hat{V}_r^*(s) = -k_{r-1}(s) \cdot \hat{V}_{r-1}(s)$$

dir.

İspat: 1) $\hat{V}_1(s) = p^*(s)$ olduğundan

$$\hat{V}_1^*(s) \in S_p\{p^*(s), p^{**}(s)\} = S_p\{\hat{V}_1(s), \hat{V}_2(s)\}$$

dir. O zaman

$$\hat{V}_1^* = c_1 \cdot \hat{V}_1 + c_2 \cdot \hat{V}_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_*$$

(1)

Ayrıca $\langle \hat{V}_1^*, \hat{V}_1 \rangle_* = e$ olduğunu biliyoruz her iki tarafın çarpımsal anlamda türevi alınır

$$\langle \hat{V}_1^*, \hat{V}_1 \rangle_* = 1$$

bulunur. Denklem 1' in eşitliğinin her iki tarafını $\hat{V}_1$ ile çarpımsal anlamda iç çarpım yapılırsa

$$\langle \hat{V}_1^*, \hat{V}_1 \rangle_* = c_1 \cdot_* \langle \hat{V}_1, \hat{V}_1 \rangle_* + c_2 \cdot_* \langle \hat{V}_2, \hat{V}_1 \rangle_*,$$

buradan $c_1 = 1$ olduğu görülür. Benzer şekilde denklem 1' in eşitliğinin her iki tarafını $\hat{V}_2$ ile çarpımsal anlamda iç çarpım yapılırsa

$$\langle \hat{V}_1^*, \hat{V}_2 \rangle_* = c_2 \cdot_* \langle \hat{V}_2, \hat{V}_2 \rangle_*$$

$$= c_2 = k_1$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\hat{V}_1^*(s) = k_1 \cdot_* \hat{V}_2(s),$$

dir.

2) $\hat{V}_i^*(s) = -_*k_{i-1}(s) \cdot_* \hat{V}_{i-1}(s) +_*k_i(s) \cdot_* \hat{V}_{i+1}(s)$, $1 \leq i \leq r$ eşitliğini tümevarım yöntemiyle ispatlayacağız.

I. Adım: $i = 2$ için teoremin doğru olduğunu gösterelim.

$$\hat{V}_2(s) = p^{**}(s)/\|p^{**}(s)\|_*$$

olduğundan

$$\hat{V}_2^*(s) \in S_p\{p^*(s), p^{**}(s), p^{***}(s)\} = S_p\{\hat{V}_1(s), \hat{V}_2(s), \hat{V}_3(s)\}$$

$$\hat{V}_2^* = c_1 \cdot_* \hat{V}_1 +_*c_2 \cdot_* \hat{V}_2 +_*c_3 \cdot_* \hat{V}_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_*.$$

yazılabilir. Buradan

$$c_1 = \langle \hat{V}_2^*, \hat{V}_1 \rangle_* = -_*\langle \hat{V}_2, \hat{V}_1^* \rangle_* = -_*k_1,$$

$$c_2 = \langle \hat{V}_2^*, \hat{V}_2 \rangle_* = 1,$$

$$c_3 = \langle \hat{V}_2^*, \hat{V}_3 \rangle_* = k_2$$

olacağından

$$\hat{V}_2^*(s) = -_*k_1(s) \cdot_* \hat{V}_1(s) +_*k_2(s) \cdot_* \hat{V}_3(s)$$

elde edilir. O halde $i = 2$ için teorem doğrudur.

II. Adım: $i = m$ için teoremin doğru olduğunu kabul edip $i = m + 1$ için içinde doğru olacağını gösterelim.

$$\hat{V}_{m+1}^*(s) \in S_p\{p^*(s), p^{**}(s), p^{***}(s), \dots, p^{(m+1)}(s), p^{(m+2)}(s)\} = S_p\{\hat{V}_1(s), \hat{V}_2(s), \hat{V}_3(s), \dots, \hat{V}_{m+1}(s), \hat{V}_{m+2}(s)\}$$

dir. $i = m$ için teoremi doğru kabul ettiğimizden m den küçük bütün i ler için teoremi doğru kabul etmiş olduk.

$$\hat{V}_3^*(s) = -_*k_2(s) \cdot_* \hat{V}_2(s) +_*k_3(s) \cdot_* \hat{V}_4(s),$$

$$\hat{V}_4^*(s) = -_*k_3(s) \cdot_* \hat{V}_3(s) +_*k_4(s) \cdot_* \hat{V}_5(s)$$

.

.

.

$$\hat{V}_{m-1}^*(s) = -_*k_{m-2}(s) \cdot_* \hat{V}_{m-2}(s) +_*k_{m-1}(s) \cdot_* \hat{V}_m(s)$$

olduğunu kabul ettik. O zaman $i = m + 1$ için

$$\hat{V}_{m+1}^*(s) \in S_p\{\hat{V}_1(s), \hat{V}_2(s), \hat{V}_3(s), \dots, \hat{V}_{m+1}(s), \hat{V}_{m+2}(s)\}$$

ifadesinden

$$\hat{V}_{m+1}^* = c_{m+1}^1 \hat{V}_1 +_*c_{m+2}^2 \hat{V}_2 +_* \dots +_*c_{m+1}^m \hat{V}_m +_*c_{m+1}^{m+1} \hat{V}_{m+1} +_*c_{m+1}^{m+2} \hat{V}_{m+2}$$

yazabiliriz. Şimdi c_{m+1}^j katsayılarını hesaplayalım.

$$c_{m+1}^1 = \langle \hat{V}_{m+1}^*, \hat{V}_1 \rangle_* = -_*\langle \hat{V}_1^*, \hat{V}_{m+1} \rangle_*$$

dir. Diğer taraftan teoremin ilk şikkında görüldüğü ki $\hat{V}_1^*$ 'nin $\hat{V}_{m+1}$ üzerinde bileşeni olmadığından $c_{m+1}^1 = 1$ dir.

$$c_{m+1}^2 = \langle \hat{V}_{m+1}^*, \hat{V}_2 \rangle_* = -_*\langle \hat{V}_2^*, \hat{V}_{m+1} \rangle_*$$

dir. $\hat{V}_2^*$ nin yukarıdaki ifadesine bakılırsa görülür ki $\hat{V}_2^*$ nin $\hat{V}_{m+1}$ üzerindeki bileşeni 1 dir, Yani, $c_{m+1}^2 = 1$

dir. Böyle devam edilirse

$$c_{m+1}^{m-2} = 1 \text{ ve } c_{m+1}^{m+1} = 1 \text{ olduğu görülür.}$$

$\hat{V}_{m+1}^*$ nin ifadesinde bir (çarpımsal sıfır) olmak zorunda olmayan c_{m+1}^m, c_{m+1}^{m+2} bileşenleri kalır. Bu bileşenlerde benzer şekilde

$$c_{m+1}^m = -_*k_m \text{ ve } c_{m+1}^{m+2} = k_{m+1}$$

olarak bulunur. O halde

$$\hat{V}_{m+1}^* = -_*k_m \cdot_* \hat{V}_m +_*k_{m+1} \cdot_* \hat{V}_{m+2}, 1 < m + 1 < r$$

olur. Bu durumda $1 < i < r$ için

$$\hat{V}_i^*(s) = -_*k_{i-1}(s) \cdot_* \hat{V}_{i-1}(s) +_*k_i(s) \cdot_* \hat{V}_{i+1}(s),$$

elde edilir.

3) p eğrisinin çarpımsal türevleri arasında en fazla r tanesi çarpımsal lineer bağımsız olacağından

$$\widehat{V}_r^* \in S_p\{p^*, p^{**}, p^{***}, \dots, p^{(r)}\}$$

ve

$$S_p\{p^*, p^{**}, \dots, p^{(r)}\} = S_p\{\widehat{V}_1, \widehat{V}_2, \dots, \widehat{V}_r\}$$

olduğundan

$$\widehat{V}_r^* \in S_p\{\widehat{V}_1, \widehat{V}_2, \dots, \widehat{V}_r\}$$

dir. O zaman

$$\widehat{V}_r^* = \sum_{i=1}^r c_i \cdot \widehat{V}_i, c_i \in \mathbb{R}_*$$

olur. Bu durumda

$$c_i = \langle \widehat{V}_r^*, \widehat{V}_i \rangle = -_* \langle \widehat{V}_i^*, \widehat{V}_r \rangle_*, 1 \leq i \leq r$$

$i = r$ için

$$c_i = \langle \widehat{V}_r^*, \widehat{V}_r \rangle = 1$$

$i = r - 1$ için

$$\widehat{V}_i^* = -_* k_{i-1} \cdot \widehat{V}_{i-1} +_* k_i \cdot \widehat{V}_{i+1},$$

olduğundan

$$c_i = -_* \langle -_* k_{i-1} \cdot \widehat{V}_{i-1} +_* k_i \cdot \widehat{V}_{i+1}, \widehat{V}_r \rangle_*$$

$$c_i = -_* k_{i-1} \cdot \langle \widehat{V}_{i-1}, \widehat{V}_r \rangle_* -_* k_i \cdot \langle \widehat{V}_{i+1}, \widehat{V}_r \rangle_*, 1 \leq i < r$$

$$c_{r-1} = -_* k_{r-2} \cdot \langle \widehat{V}_{r-2}, \widehat{V}_r \rangle_* -_* k_{r-1} \cdot \langle \widehat{V}_r, \widehat{V}_r \rangle_*$$

$$c_{r-1} = -_* k_{r-2}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $1 \leq i < r - 1$ için de $c_i = 1$

olduğundan

$$\widehat{V}_r^*(s) = -_* k_{r-1}(s) \cdot \widehat{V}_{r-1}(s)$$

elde edilir.

Sonuç 3. 1.

$$k_1(s) = \|p^{**}(s)\|_*$$

dir.

İspat:

$$\widehat{V}_1(s) = p^*(s)$$

$$\widehat{V}_1^*(s) = p^{**}(s)$$

olur. O zaman

$$p^{**}(s) = \|p^{**}(s)\|_* \cdot \widehat{V}_2(s)$$

olduğundan dolayı

$$\widehat{V}_1^*(s) = \|p^{**}(s)\|_* \cdot \widehat{V}_2(s)$$

elde edilir. Tanım 3.3 den dolayı

$$\|p^{**}(s)\|_* = \langle \widehat{V}_1^*(s), \widehat{V}_2(s) \rangle_* = k_1(s)$$

olur.

Özel Hal:

$n = 3$ için aşağıdaki tanım ve teoremler verilebilir.

Tanım 3.4. $p: I \rightarrow E_*^3$ olacak şekilde tanımlanan p çarpımsal birim hızlı eğrisi için

$$k_1(s) = \|p^{**}(s)\|_*$$

değerine $p(s)$ eğrisini s noktasındaki çarpımsal eğriliği denir.

Teorem 3.2.

$$p: I \rightarrow E_*^3, s \mapsto p(s) = (e^{p_1(s)}, e^{p_2(s)}, e^{p_3(s)})$$

birim hızlı çarpımsal eğrisinin $p(s)$ noktasındaki çarpımsal Frenet ayaklısı $\{\widehat{V}_1, \widehat{V}_2, \widehat{V}_3\}$ varsayalım. O zaman

$$\widehat{V}_1^*(s) = k_1(s) \cdot \widehat{V}_2(s)$$

$$\widehat{V}_2^*(s) = -_* k_1(s) \cdot \widehat{V}_1(s) +_* k_2(s) \cdot \widehat{V}_3(s)$$

$$\widehat{V}_3^*(s) = -_* k_2(s) \cdot \widehat{V}_2(s)$$

dir. Eşdeğer olarak çarpımsal Frenet denklemleri

$$\begin{pmatrix} \widehat{V}_1^* \\ \widehat{V}_2^* \\ \widehat{V}_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -_* k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -_* k_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{V}_1 \\ \widehat{V}_2 \\ \widehat{V}_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir.

Tanım 3.5. E_*^3 verilen p çarpımsal birim hızlı bir eğri olsun bu durumda

$$-\langle \hat{V}_3^*(s), \hat{V}_2(s) \rangle_* = k_2(s)$$

bağıntısı mevcuttur. Burada $k_2(s)$ ye eğrinin s -noktasındaki çarpımsal burulması denir. Burulma fonksiyonu k_2 eğrinin oskültör düzleminden ayrılma miktarını ifade eder.

Teorem 3.3. $p: I \rightarrow E^3$ çarpımsal eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. Eğrinin çarpımsal Frenet vektör alanları $\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3$ olduğuna göre,
 $\hat{V}_2 \wedge_* \hat{V}_3 = \hat{V}_1$
 $\hat{V}_3 \wedge_* \hat{V}_1 = \hat{V}_2$
 dir.

İspat: Önerme 2.3.1 den

$$\begin{aligned} \hat{V}_2 \wedge_* \hat{V}_3 &= \hat{V}_2 \wedge_* (\hat{V}_1 \wedge_* \hat{V}_2) = \langle \hat{V}_2, \hat{V}_2 \rangle_{**} \hat{V}_1 - \langle \hat{V}_2, \hat{V}_1 \rangle_{**} \hat{V}_2 = \hat{V}_2 \\ \hat{V}_3 \wedge_* \hat{V}_1 &= (\hat{V}_1 \wedge_* \hat{V}_2) \wedge_* \hat{V}_1 = \langle \hat{V}_1, \hat{V}_1 \rangle_{**} \hat{V}_2 - \langle \hat{V}_1, \hat{V}_2 \rangle_{**} \hat{V}_1 = \hat{V}_2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.4. $p: I \rightarrow E^3, t \rightarrow p(t) = (e^{p_1(t)}, e^{p_2(t)}, e^{p_3(t)})$ çarpımsal eğrisinin çarpımsal Frenet 3-ayaklısı $\{\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3\}$ olsun. Eğrinin çarpımsal eğrilik ve burulması k_1 ve k_2 olsun. $\|p^*\|_* = \vartheta$ olduğu düşünülürse

$$\begin{aligned} \hat{V}_1^* &= \vartheta \cdot k_1 \cdot \hat{V}_2 \\ \hat{V}_2^* &= \vartheta \cdot (-k_1 \cdot \hat{V}_1 + k_2 \cdot \hat{V}_3) \\ \hat{V}_3^* &= -\vartheta \cdot k_2 \cdot \hat{V}_2 \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.5. $p: I \rightarrow E^3$ çarpımsal eğrisi birim hızlı bir eğri olmasın. Bu eğrinin çarpımsal Frenet ayaklısı $\{\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3\}$ ise

$$\begin{aligned} \hat{V}_1^* &= p^* / \|p^*\|_* \\ \hat{V}_3^* &= p^* \wedge_* p^{**} / \|p^* \wedge_* p^{**}\|_* \\ \hat{V}_2^* &= \hat{V}_3 \wedge_* \hat{V}_1 \end{aligned}$$

dir. p çarpımsal eğrisinin çarpımsal birinci ve ikinci eğrilik fonksiyonları

$$\begin{aligned} k_1 &= \|p^* \wedge_* p^{**}\|_* / \|p^*\|^3 \\ k_2 &= \langle p^* \wedge_* p^{**}, p^{***} \rangle_* / \|p^* \wedge_* p^{**}\|_*^2 \end{aligned}$$

dir.

4. Çarpımsal İnvölüt (Basit) ve Çarpımsal Evolüt (Mebcut)

Tanım 4.1. $M, N \subseteq E^n$ çarpımsal iki eğriyi göz önünde bulunduralım. M, N çarpımsal eğrileri, sırası ile, $(I, p), (I, k)$ koordinat komşulukları verilsin. $p(s), k(s)$ noktalarında M, N çarpımsal eğrilerinin çarpımsal teğet vektörleri, sırası ile, $\hat{V}_1(s)$ ve $\hat{V}_1^\circ(s)$ olsun. Her $s \in I$ için M, N çarpımsal eğrilerinin teğet vektörleri çarpımsal anlamda dik ise yani

$$\langle \hat{V}_1(s), \hat{V}_1^\circ(s) \rangle_* = 1$$

ise N çarpımsal eğrisine M çarpımsal eğrisinin involütü, M çarpımsal eğrisine de N çarpımsal eğrisinin evolütü denir.

Teorem 4.1. $M, N \subseteq E^n$ çarpımsal iki eğri olsun $(I, p), (I, k)$ komşulukları ile verilsin. Eğer N çarpımsal eğrisi M çarpımsal eğrisinin involütü ise $d_*(p(s), k(s)) = |c - s|_*$, her $s \in I$ ve $c = \text{çarpımsal sabittir}$.

İspat: $k(s) = p(s) + e^\varphi \cdot \hat{V}_1(s)$

yazılabilir. Böylece $s \in I$ nın p için yay parametresi olduğu kabul edilirse

$$(d_*k / d_*s) = \hat{V}_1(s) + e^\varphi \cdot \hat{V}_1(s) + e^\varphi \cdot k_1(s) \cdot \hat{V}_2(s)$$

yazılabilir.

$$(d_*k / d_*s) = S_p\{\hat{V}_1^\circ(s)\}$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\langle \hat{V}_1(s), \hat{V}_1^\circ(s) \rangle_* = 1$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$e + e^\varphi = 1 \Rightarrow (e^\varphi)^* = -e \Rightarrow e^\varphi = e^{-s+c}$$

veya

$$e^\varphi = |c - s|_*, \text{ her } c = \text{çarpımsal sabit olduğu görülür. Diğer taraftan}$$

$$d_*(p(s), k(s)) = \|k(s) - p(s)\|_* = \|e^{\varphi} \cdot \hat{V}_1(s)\|_* \\ = |c - s|_* \\ \text{bulunur.}$$

Sonuç 4.1. k° çarpımsal eğrisi k çarpımsal eğrisinin involütü, c çarpımsal reel sayı olmak üzere

$$k^\circ(s) = k(s) +_*(-s + c) \cdot \hat{V}_1 \\ \text{dir.}$$

Teorem 4.2. k° çarpımsal eğrisi k çarpımsal eğrisinin involütü varsayalım. k° çarpımsal eğrisinin Frenet vektörleri $\hat{V}_1^\circ, \hat{V}_2^\circ, \hat{V}_3^\circ$ olduğuna göre,

$$\hat{V}_1^\circ = \hat{V}_2$$

$$\hat{V}_2^\circ = (-_k k_1 / \sqrt{k_1^{2*} + k_2^{2*}}) \cdot \hat{V}_1 +_*(k_2 / \sqrt{k_1^{2*} + k_2^{2*}}) \cdot \hat{V}_3$$

$$\hat{V}_3^\circ = (k_2 / \sqrt{k_1^{2*} + k_2^{2*}}) \cdot \hat{V}_1 +_*(k_1 / \sqrt{k_1^{2*} + k_2^{2*}}) \cdot \hat{V}_3 \\ \text{dir.}$$

Teorem 4.3. $M, N \subseteq E^n$ olarak verilen çarpımsal involüt- evolüt eğriler, sırası ile, $(I, p), (I, k)$ koordinat komşulukları ile verildiğini kabul edelim. $s \in I$ parametresine göre $p(s) \in M$ ve $k(s) \in N$ noktalarında, M ve N çarpımsal eğrilerinin, sırası ile, çarpımsal Frenet r -ayaklıları

$\{\hat{V}_1(s), \hat{V}_2(s), \hat{V}_3(s), \dots, \hat{V}_r(s)\}$ ve $\{\hat{V}_1^\circ(s), \hat{V}_2^\circ(s), \hat{V}_3^\circ(s), \dots, \hat{V}_r^\circ(s)\}$ olduğunu varsayalım. M nin çarpımsal eğrilik fonksiyonları $k_i(s)$, N nin çarpımsal eğrilik fonksiyonları $k_i^\circ(s)$ olsun $(1 \leq i \leq r-1)$. Bu eğrilik fonksiyonları arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$$(k_1^\circ)^{2*}(s) = (k_1^{2*}(s) +_k k_2^{2*}(s)) / (k_1^{2*}(s) \cdot (c - s)^{2*}).$$

Önerme 4.1. $M, N \subseteq E^3$ çarpımsal involüt- evolüt eğrileri verilsin. N , çarpımsal eğrisi M çarpımsal eğrinin involütü olsun. M çarpımsal eğrisinin eğrilikleri k_1 ve k_2 ve N çarpımsal eğrisinin eğrilikleri k_1° ve k_2° ise

$$k_2^\circ = (k_1 \cdot k_2 - k_1^* \cdot k_2) / (k_1 \cdot (k_1^{2*} + k_2^{2*})(c - s)) \\ \text{dir.}$$

Örnek 4.1. Düzlemsel bir çarpımsal eğrinin Evolütleri birer helistir.

Çözüm 4.1. Önce p çarpımsal eğrisinin düzlemsel ve p nin evolütüde olan k çarpımsal eğrisinin düzlemsel olması halini inceleyelim. Bu durumda

$$\hat{V}_1^\circ(s) = \hat{V}_2(s)$$

dir. O zaman

$$p(s) = k(s) +_*(a \cdot \hat{V}_2(s), a \in \mathbb{R}_*$$

$$p(s) = k(s) +_*(a \cdot \hat{V}_1^\circ(s)$$

$$\Rightarrow k(s) = p(s) -_*(a \cdot \hat{V}_2(s)$$

$$\hat{V}_1^\circ \cdot (d_* s / d_* s) = k^*(s) = \hat{V}_1(s) -_*(a \cdot \hat{V}_2(s) +_*(a \cdot k_1(s) \cdot \hat{V}_1(s)$$

$$\langle \hat{V}_1^\circ, \hat{V}_1 \rangle_* = 1$$

olması nedeniyle

$$e +_*(a \cdot k_1(s) = 1$$

$$a = -_*(e / k_1(s)$$

elde edilir. O zaman

$$k(s) = p(s) +_*((e / k_1(s)) \cdot \hat{V}_2(s)$$

elde edilir.

Bu düzlemsel p çarpımsal eğrisinin evolütü olan k eğrisinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeridir.

Şimdi k çarpımsal eğrisi düzlemsel bir eğri midir?

P çarpımsal eğrisi düzlemsel olduğundan dolayı $k_2 = 1$ olur. O zaman önerme 4.1 bağıntısından

$k_2^\circ = 1$ olduğu görülür. O halde k eğrisi çarpımsal bir düzlemsel eğridir.

Şimdi de p çarpımsal eğrisi düzlemsel olsun. Evolütü olan k çarpımsal eğrisi düzlemsel olmaması halini inceleyelim. Bu durumda

$$k(s) = p(s) -_*(a \cdot \hat{V}_1^\circ(s)$$

$$\hat{V}_1^\circ(s) = \hat{V}_1 \cdot (d_* s / d_* s) -_*(a \cdot k_1^\circ \cdot \hat{V}_2 +_*(\hat{V}_1^\circ$$

buradan da

$$V_1 \cdot (d_* s / d_* s) -_*(a \cdot k_1^\circ \cdot \hat{V}_2 = 1$$

elde edilir. Bu durumda

$$\hat{V}_1 = \pm \hat{V}_2^\circ$$

dir. O halde

$$h = \langle \hat{V}_1^\circ, \hat{V}_1 \wedge \hat{V}_2 \rangle_*$$

$$\begin{aligned} h^* &= d_* h /_* d_* s = \langle k_1^\circ \cdot \hat{V}_1^\circ, (d_* s^\circ /_* d_* s), \hat{V}_1 \wedge \hat{V}_2 \rangle_* + \langle \hat{V}_1^\circ, (k_1 \cdot \hat{V}_2) \wedge \hat{V}_2 + \hat{V}_1 \wedge (-k_1 \hat{V}_1) \rangle_* \\ &= k_1^\circ \cdot (d_* s^\circ /_* d_* s) \cdot \langle \hat{V}_2^\circ, \hat{V}_1 \wedge \hat{V}_2 \rangle_* \\ &= k_1^\circ \cdot (d_* s^\circ /_* d_* s) \cdot \det_*(\hat{V}_2^\circ, \hat{V}_1, \hat{V}_2) \\ &= 1, \end{aligned}$$

$h^* = 1$ olması nedeni ile h sabittir. O halde k çarpımsal eğrisinin çarpımsal hız vektörü, p çarpımsal eğrisinin düzleminin bir çarpımsal normali ile daima çarpımsal sabit açı yapması nedeni ile k çarpımsal eğrisi bir çarpımsal helistir. O halde p çarpımsal eğrisinin düzlemsel olmayan evolutleri birer çarpımsal helis eğrileridir.

Çarpımsal Helis için bakınız [25].

5. Çarpımsal Bertrand Eğri Çifti

Tanım 5.1. E_*^n de verilen M, N çarpımsal eğrilerini ele alalım. Bu eğrilerin, sırasıyla $(I, p), (I, k)$ koordinat komşulukları ile verilsin. Her $s \in I$ için M, N çarpımsal eğrilerinin asli normal vektörleri lineer bağımlı ise (M, N) eğri ikilisine bir çarpımsal Bertrand eğri çifti denir.

Teorem 5.1. M, N çarpımsal eğrileri çarpımsal Bertrand eğri çifti olduğunu varsayalım ve bu eğrilerin, sırasıyla $(I, p), (I, k)$ koordinat komşulukları ile verildiğini kabul edelim. O zaman her $s \in I$ için $d_*(p(s), k(s)) = \text{çarpımsal sabittir}$.

İspat:

$$k(s) = p(s) +_* a \cdot \hat{V}_2(s), a \in \mathbb{R}_*$$

M eğrisinin yay parametresi s ve N eğrisinin yay parametresi s° olsun.

$$(d_* s^\circ /_* d_* s) \cdot \hat{V}_1^\circ(s) = (e -_* a(s) \cdot k_1(s)) \cdot \hat{V}_1(s) +_* a^*(s) \cdot \hat{V}_2(s) +_* a(s) \cdot k_2(s) \cdot \hat{V}_3(s)$$

yazabiliriz. $\{\hat{V}_2(s), \hat{V}_2^\circ(s)\}$ çarpımsal lineer bağımlı olduğundan

$$\langle \hat{V}_1^\circ(s), \hat{V}_2(s) \rangle_* = 1$$

dir. Dolayısıyla her $s \in I$ için $a^*(s) = 1 \Rightarrow a(s) = \text{çarpımsal sabit olduğu görülür}$. Diğer taraftan

$$d_*(p(s), k(s)) = \|k(s) - p(s)\|_* = \|a(s) \cdot \hat{V}_2(s)\|_* = \|a(s)\|_*,$$

her $s \in I$ için

$$d_*(p(s), k(s)) = \text{çarpımsal sabittir}.$$

Teorem 5.2. k° çarpımsal eğrisi k çarpımsal eğrisi ile çarpımsal Bertrand eğri çifti ise

$$k^\circ = p +_* r \cdot \hat{V}_2, r \in \mathbb{R}_*$$

dir.

İspat:

$$k: I \rightarrow E_*^3$$

çarpımsal eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. O zaman

$$k^\circ(s) = p(s) +_* f(s) \cdot \hat{V}_2(s)$$

şeklinde yazılır. $k^\circ(s)$ eğrisinin çarpımsal anlamda türevi alınır

$$(k^\circ)^*(s) = p^*(s) +_* f^*(s) \cdot \hat{V}_2(s) +_* f(s) \cdot \hat{V}_2^*(s)$$

$$= \hat{V}_1(s) +_* f^*(s) \cdot \hat{V}_2(s) +_* f(s) \cdot (-k_1(s) \cdot \hat{V}_1(s) +_* k_2(s) \cdot \hat{V}_3(s))$$

$$(k^\circ)^*(s) = (e -_* f(s) \cdot k_1(s)) \cdot \hat{V}_1(s) +_* f^*(s) \cdot \hat{V}_2(s) +_* f(s) \cdot k_2(s) \cdot \hat{V}_3(s)$$

elde edilir. $\langle (k^\circ)^*, \hat{V}_2 \rangle_* = 1$ den dolayı $f^* = 1$ elde edilir. O halde p fonksiyonu sabit fonksiyondur. $f = r$ alınır

ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.1. k° çarpımsal eğrisi ile k çarpımsal eğrisi çarpımsal Bertrand eğri çifti ise

$$(k^\circ)^* = (e -_* r \cdot k_1) \cdot \hat{V}_1 +_* r \cdot k_2 \cdot \hat{V}_3.$$

Teorem 5.3. k° ve k çarpımsal Bertrand eğri çiftlerinin karşılıklı noktalardaki çarpımsal teğet vektörleri arasındaki açının ölçüsü sabittir.

İspat: $\langle \hat{V}_1^\circ, \hat{V}_1 \rangle_* = 1$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur.

$$\langle \hat{V}_1^\circ, \hat{V}_1 \rangle_*^* = \langle (\hat{V}_1^\circ)^*, \hat{V}_1 \rangle_* + \langle \hat{V}_1^\circ, (\hat{V}_1)^* \rangle_*$$

$$= \langle \vartheta \cdot k_1 \cdot \hat{V}_2^\circ, \hat{V}_1 \rangle_* + \langle \hat{V}_1^\circ, k_1 \cdot \hat{V}_2 \rangle_*$$

$$= \vartheta \cdot k_1 \cdot \langle \hat{V}_2^\circ, \hat{V}_1 \rangle_* + k_1 \cdot \langle \hat{V}_1^\circ, \hat{V}_2 \rangle_*$$

Buradan $\hat{V}_2^\circ(s)$ ve $\hat{V}_2(s)$ çarpımsal vektör alanları paralel ve $\hat{V}_2(s)$ çarpımsal vektörü $\hat{V}_1(s)$ vektörüne çarpımsal anlamda dik olduğundan dolayı $\langle \hat{V}_2^\circ, \hat{V}_1 \rangle_* = 1$. $\hat{V}_1(s)$ vektörü $\hat{V}_2(s)$ vektörüne çarpımsal anlamda dik ve $\hat{V}_2^\circ(s)$ vektörü $\hat{V}_2(s)$ vektörüne paralel olduğundan

$\langle \hat{V}_1^\circ, \hat{V}_2 \rangle_* = 1$ dir. O zaman $\langle \hat{V}_1^\circ, \hat{V}_1 \rangle_* = 1$ elde etmiş oluruz. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.4. (M, N) çarpımsal Bertrand eğri çifti olsun. M, N, sırası ile, (I, p), (I, k) koordinat komşulukları ile verilsin. M eğrisinin eğrilikleri k_1, k_2 olsun. O zaman (M, N) çarpımsal Bertrand eğri çiftidir $\Leftrightarrow \exists e^x, e^y \in \mathbb{R}_*$ için $e^x \cdot_* k_1 +_* e^y \cdot_* k_2$ dir.

İspat: Bakınız [31].

Teorem 5.5. $p: I \rightarrow E^3$ çarpımsal eğrisi birim hızlı bir eğri ve eğrinin çarpımsal Frenet 3-ayaklısı $\{\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3\}$ olsun. $p^\circ: I \rightarrow E^3$ çarpımsal eğrisinin çarpımsal Frenet 3-ayaklısı $\{\hat{V}_1^\circ, \hat{V}_2^\circ, \hat{V}_3^\circ\}$ olsun.

p ve p° bir çarpımsal Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa ise

$$\hat{V}_1^\circ = e^{\cos\theta} \cdot_* \hat{V}_1 -_* e^{\sin\theta} \cdot_* \hat{V}_3$$

$$\hat{V}_2^\circ = \hat{V}_2$$

$$\hat{V}_3^\circ = e^{\sin\theta} \cdot_* \hat{V}_1 +_* e^{\cos\theta} \cdot_* \hat{V}_3 \text{ dir.}$$

6. Sonuç

Bu çalışma, n boyutlu çarpımsal uzayda tanımlanan eğrilerin geometrik yapısını sistematik bir yaklaşımla ele almaktadır. Bu amaçla, uygun bir Frenet çatısı oluşturulmuş ve bu ortama özgü eğrilik büyüklükleri tanımlanarak eğrilerin incelenmesi için temel bir kuramsal yapı ortaya konmuştur. Ayrıca, involüt–evolüt eğrileri ile Bertrand eğri çiftlerinin çarpımsal geometri çerçevesinde ele alınması, klasik diferansiyel geometrinin birçok temel kavramının bu yeni yapıya uyarlanabileceğini göstermektedir. Elde edilen sonuçlar, çarpımsal diferansiyel geometrinin gelişimine katkı sağlamak ve bu alanda gerçekleştirilecek yeni çalışmalar için sağlam bir başlangıç noktası oluşturmaktadır.

Teşekkür

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi sekreteryasına göstermiş olduğu yakın ilgi ve alakadan dolayı teşekkür ederim.

Kaynaklar

- [1] Grossman M, Katz R. Non-Newtonian Calculus. Lee Press, Massachusetts, USA, 1972.
- [2] Stanley D A. Multiplicative Calculus. Primus IX 1999; 9(4): 310-326.
- [3] Campbell D. Multiplicative Calculus and Student Projects, Problems, Resources, and Issues In mathematics undergraduate Studies 1999; 9(4): 327-332.
- [4] Grossman M. Bigeometric Calculus: A System with a Scale-Free Derivative. Archimedes Foundation, Massachusetts, USA, 1983.
- [5] Grossman M. An Introduction to Non-Newtonian Calculus. Int J Math Educ Sci Technol 1979; 10(4): 525-528.
- [6] Grossman J, Grossman M, Katz R. The First Systems of Weighted Differential and Integral Calculus. University of Michigan, USA, 1981.
- [7] Grossman J. Meta-Calculus: Differential and Integral. University of Michigan, USA, 1981.
- [8] Bashirov AE, Kurpınar E M, Ozyapıcı A. Multiplicative Calculus and Its Applications. J Math Anal Appl 2008; 337(1): 36-48.
- [9] Bashirov AE, Rıza M. On Complex Multiplicative Differentiation. TWMS J App Eng Math 2011; 1(1): 75- 85.
- [10] Bashirov AE, Mısırlı E, Tandoğdu Y, Ozyapıcı A. On Modeling with Multiplicative Differential Equations. Appl Math J Chinese Univ 2011; 26(4): 425-438.
- [11] Tekin S, Başar F. Certain Sequence Spaces Over the Non-Newtonian Complex field. Abstract and Applied Analysis 2013; 2013(1): 1-11.
- [12] Türkmen C, Başar F. Some Basic Results on the Sets of Sequences with Geometric Calculus. Commun Fac Sci Univ Ank Series A1 2012; 61(2): 17-34.
- [13] Uzer A. Multiplicative Type Complex Calculus as an Alternative to the Classical Calculus. Comput Math Appl 2010; 60(10): 2725-2737.
- [14] Çakmak AF, Başar F. Some Sequence Spaces and Matrix Transformations in Multiplicative Sense. TWMS J Pure Appl Math 2013; 6(1): 27-37.

- [15] Çakmak AF, Başar F. On Classical Sequence Spaces and Non-Newtonian Calculus. Journal of Inequalities and Applications.2012; 2012, article ID 932734, 13 pages.
- [16] Boruah K, Hazarika B. Some Basic Properties of G-Calculus and Its Applications in Numerical Analysis 2016; arXiv:1607.07749v1, 24 July.
- [17] Boruah K, Hazarika B. G- Calculus. TWMS J App Eng Math 2018; 8(1): 94-105.
- [18] Boruah K, Hazarika B. Application of Geometric Calculus in Numerical Analysis and Difference Sequence Spaces. J Math Appl 2017; 449(2017): 1265-1285.
- [19] Es H. On The 1-Parameter Motions with Multiplicative Calculus. Journal of Science and Arts 2022; 22(2): 395-406.
- [20] Es H. Plane Kinematics In Homothetic Multiplicative Calculus. Journal of Universal Mathematics 2024; 7(1): 37-47.
- [21] Es H. Plane Kinematics In Lorentzian Homothetic Multiplicative Calculus. Journal of Universal Mathematics 2024; 7(2): 64-74.
- [22] Es H. Geometric Interpretation of Multiplicative Calculus In Lorentzian Space. Journal of Science and Arts 2024; 24(3): 613-626.
- [23] Nurkan S, Gürgil Kİ, Karacan MK. Vector Properties of Geometric Calculus. Math Meth Appl Sci 2023; 46(17): 17672-17691.
- [24] Aslan S, Bekar M, Yaylı Y. Geometric 3-Space and Multiplicative Quaternions. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 2023; 20(9): 1-20.
- [25] Has A, Yılmaz B. On Non-Newtonian Helices in Multiplicative Euclidean Space E^3 . Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences 2025; 6(2): 196-217.
- [26] Has A, Yılmaz B. A non-Newtonian Conics in Multiplicative Analytic Geometry. Turkish Journal of Mathematics 2024; 48(5): 976-994.
- [27] Güreffe Y. Multiplikatif Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları Üzerine. Doktora Tezi, Ege Üniversitesi , İzmir, 91 sayfa, 2013.
- [28] Misirli E, Güreffe Y. Multiplicative Adams Bashforth-Moulton Methods. Numer Algor 2011; 57: 425-439.
- [29] Georgiev SG, Zennir K. Multiplicative Differential Calculus. Chapman and Hall/CRC. New York, USA, 2022.
- [30] Aydın ME, Dilmen E, Yaman G. Multiplikatif Jeodeziklerin Geometrisi. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi 2025; 37(2): 55-63.
- [31] Georgiev SG. Multiplicative differential geometry. Chapman and Hall/CRC. New York, USA, 2022.