

# HIZI LİNEER DEĞİŞEN BİR ORTAMDA AMPLİTÜD VE ENERJİ KAYBI

Turan KAYIRAN

*Maden Tetkik ve Arama Enstitüsü, Ankara*

ÖZET. — Hızı lineer olarak artan veya eksilen bir ortamda değişik açıda seyreden p dalgalarının taşıdıkları enerji-  
de meydana gelen kayıp incelenmekte ve diğer taraftan ortamı sabit hızlı n tabaka şeklinde düşünerek, amplitüd trans-  
misyonu hesaplanmakta ve bir model üzerinde her iki metodun mukayesesi yapılmaktadır.

Lineer hız kanunu kabul eden ortam üzerinde ilk çalışan Woef (1937) olmuştur. Menzel ve  
Rosenbach (1957) sinyalde meydana gelen değişikliği Fourier analizi yoluyla incelemişler, Berryman,  
Goupillaud ve Waters (1958) ve Reinhard Bortfeld (1960) aynı problem üzerinde çalışmışlardır. Bort-  
feld enerji transmisyonu ifadesini, ortamda hâsıl olan yoğunluk değişmesini göz önüne almaksızın ve  
yalnız ortama dikey gelen ışınlar için hesaplamıştır.

Bu makalede değişik açıda ortama giren dalgaların, infinitezimal kırılma sonucu, ortamdan  
çıktığı anda amplitüd bilançolarını hesaplamak için iki ayrı metot teklif ediyoruz. Bu metotların  
bir model üzerinde yaptığımız mukayesesi, eğik ışın yayılımı üzerinde bazı aydınlatıcı sonuçlar ver-  
mektedir. İstendiği takdirde ayrıca amplitüdden enerjiye geçilebilir.

Hız kanunu olarak  $V=V_0(1+az)$  gibi lineer bir bağıntıdan hareket edeceğiz . . . . . (1)

Burada,

- $V_0$  = ortama girişteki hız
- $V$  = ortamdan çıkıştaki hız
- $z$  = ortamın kalınlığı
- $a$  = hızın artma gradyanı.

## a. Birinci çözüm metodu

Ortamın tabakaya bölerek her tabakadaki infinitezimal amplitüd değişmesini hesaplamaya  
çalışalım (Sek. 1). d yoğunluk olduğuna göre, R; refleksiyon katsayısı

$$R_i = \frac{v_i d_i - v_{i-1} d_{i-1}}{v_i d_i + v_{i-1} d_{i-1}} \quad v_i d_i = u_i \text{ koyarsak}$$
$$R_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_i + u_{i-1}} \dots \dots \dots (2)$$

$u_i$  ve  $u_{i-1}$  in değerleri  $u_0$  ve  $u_{n+1}$  cinsinden yazılırsa

$$R_i = \frac{\left(\frac{u_{n+1}}{u_0}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\left(\frac{u_{n+1}}{u_0}\right)^{\frac{1}{n+1}} + 1} \dots \dots \dots (3)$$

bulunur.

Transmisyon katsayısı  $(1-R_i)$  olacağından amplitüdeki değişme miktarı, mesafe ile ters orantılı olarak  $z$  istikametinde  $\frac{1}{dz_i}$  kadar bulunacaktır.

$\Theta_o$  açısı ile gelen ışın için, sonsuz küçük alanda her şeyi lineer kabul edersek, değişme  $\frac{\sin \theta_o}{dx_i}$  ile orantılı olacaktır.  $n$  tabaka katedildiğinde amplitüd başlangıca göre

$$(1-R_i)^{n+1} \frac{\sin \theta_o}{\sum_I d \times} \dots \dots \dots (4)$$

değerini alacaktır.

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_o}\right)^{\frac{1}{n+1}} \text{ e p dersek } \dots \dots \dots (5)$$

$$(n+1) \log_e P = \log_e \frac{u_{n+1}}{u_o} \dots \dots \dots (6)$$

$$(1-R_i)^{n+1} = \left(\frac{2}{P+1}\right) \frac{\log_e P^{n+1}}{\log_e P} \dots \dots \dots (7)$$

bulunur.

$$\text{Buradan, } \log_e (1-R_i)^{n+1} = \frac{\log_e P^{n+1} \log_e \frac{2}{P+1}}{\log_e P} \dots \dots \dots (8)$$

$n \rightarrow \infty$  için  $p \rightarrow 1$  bulunur. Fakat pay ve payda sifıra yaklaştığı için türevden sonra  $p \rightarrow 1$  yaparsak

$$\lim_{P \rightarrow 1} \frac{\log_e P^{n+1} \log_e \frac{2}{P+1}}{\log_e P} = - \frac{\log_e (P^{n+1})}{2} \dots \dots \dots (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-R_i)^{n+1} = e^{-\frac{\log (P^{n+1})}{2}} = \sqrt{\frac{u_o}{u_{n+1}}} \dots \dots \dots (10)$$

Şimdi (4) ün ikinci kısmı olan  $\frac{\sin \theta_o}{\sum_i dx_i}$  ifadesini  $n \rightarrow \infty$  için halledelim.

$$dx_i = dz_i \text{ tg } \theta_i \dots \dots \dots (11)$$

$$n \rightarrow \infty \text{ için } X = \int_0^z \text{tg } \theta \, dz \dots \dots \dots (12)$$

$$\text{Descartes kanununa göre sabit olduğundan } \frac{\sin \theta_o}{v_o} = \frac{\sin \theta}{v_{n+1}} = Q \dots \dots \dots (13)$$

(12) de değişken ikamesi yaparak

$$X = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\frac{I}{Q} \sin \theta}{\frac{I}{Q} \cos \theta \frac{d\theta}{dz}} d\theta \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{I}{Q} \cos \theta \frac{d\theta}{dz} = u v_0 \dots\dots\dots (15)$$

olduğundan

$$X = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V_{n+1}}{V_0 \alpha} d\theta = \frac{I}{\alpha} \int \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} d\theta$$

$$X = \frac{I}{\alpha \sin \theta_0} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

çıkar.

O halde (4) teki  $(1 - R_i)^{n+1} \frac{\sin \theta_0}{\sum_{i=1}^n dx_i}$  yerine

$$\sqrt{\frac{U_0}{U_{n+1}}} \frac{\alpha \sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 - \cos \theta)} \dots\dots\dots (18)$$

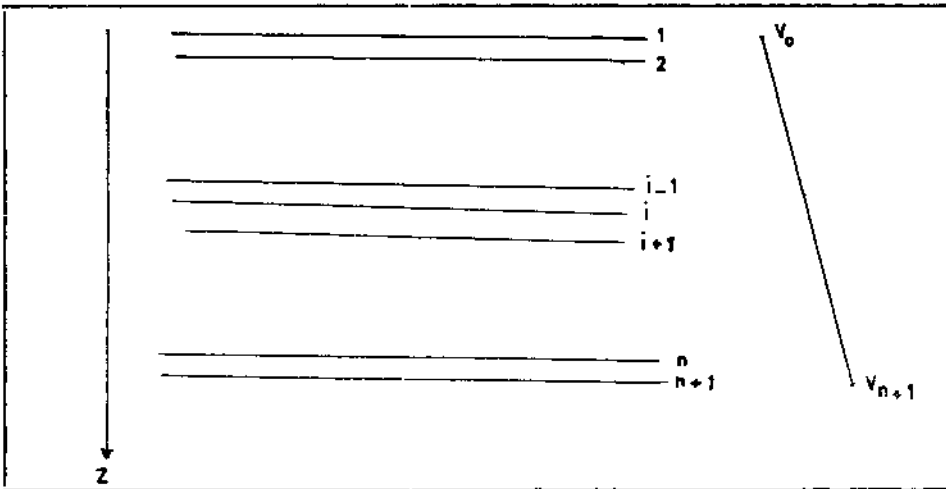
kompleks amplitüd ifadesi bulunur.

Nafe ve Drake'e ait bir ifade olan  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{d_1}{d_2} \dots\dots\dots (19)$

münasebetini ve (1) i kullanacak olursak,

(18) i  $\frac{I}{(1+az)} \frac{\alpha \sin^2 \theta_0}{(\cos \theta_0 - \cos \theta)}$  şeklinde yazabiliriz  $\dots\dots\dots (20)$

Sin  $\theta_0$ , a, z verildiğine ve Cos  $\theta=f(\theta_0, a, z)$  olduğuna göre (20) den eğik ışın için amplitüd hesabı yapılabilir.



Şek. 1

### b. ikinci çözüm metodu

Ortamı yine  $n$  tabakaya bölelim ve her tabakaya Descartes Kanununa göre artan veya eksilen sabit hızlar izafe edelim (Şek. 1). Eğer  $A$  ve  $B$ ,  $P$  ve  $SV$  dalgalarının amplitüdü,  $a$  ve  $b$  giriş açıları ve  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  yansıyan  $P$ ,  $SV$  ve kırılan  $P, S$  dalgalarının amplitüdü ve  $a$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $f$  onlara tekabül eden açılarsa,  $P$  nin iki ayrı ortamdaki hızları  $V_1, V_2$   $SV$ 'nin iki ayrı ortamdaki hızları  $V_1, V_2$  (Şek. 2) yoğunluk oranları  $\frac{d_2}{d_1} = K$  olarak alınırsa ortamlarla ilgili yer değiştirme ve tansiyonların normal ve teğet bileşen top-

lamlarının ayrı ayrı eşitliğini ifade eden dört sınır şartını yazarak amplitüdü ve açılar arasında dört lineer denklem (Zoeppritz denklemi) ifade etmek mümkündür. Gelen  $P$  dalgası için Zoeppritz denklem sistemi şöyledir:

$$(A-C) \sin a + D \cos b - E \sin e + F \cos f = 0$$

$$(A-C) \cos a + D \sin b - E \cos e - F \sin f = 0$$

$$-(A+C) \sin 2a + D \frac{V_1}{U_1} \cos 2b + EK \left( \frac{U_2}{U_1} \right)^2 \frac{V_1}{V_2} \sin 2e - FK \left( \frac{U_2}{U_1} \right)^2 \frac{V_1}{U_2} \cos 2f = 0 \quad (21)$$

$$-(A-C) \cos 2b + D \frac{U_1}{V_1} \sin 2b + E \frac{V_2}{V_1} \cos 2e + FK \frac{U_2}{V_1} \sin 2f = 0$$

$a$  giriş açısı verildiği ve  $A$  da ünite olarak alındığına göre Descartes Kanunundan  $b$ ,  $e$  ve  $f$  açıları bulunabilir ve (21) dört bilinmeyenli bir lineer denklem sistemine dönüşür.

$A$  lı terimleri sağ tarafa alarak katsayı matrisini  $(\alpha)$  ile sağ taraf matrisini  $(A)$  ve bilinmeyenler matrisini de  $(C)$  ile gösterirsek (21) i  $(A) = (\alpha) (C)$  şeklinde ifade edebiliriz. Bu ifade birinci tabakadan ikinci tabakaya geçerken  $(A_1) = (\alpha_1) (C_1)$  olarak yazılır. Burada  $C$  nin üst endisi (21) deki (22) birinci bilinmeyen olan  $C$  yi ifade etmektedir.

$$(22) \text{ den } (C_1) = (\alpha_1)^{-1} (A_1) \dots \dots \dots (23)$$

bulunur.

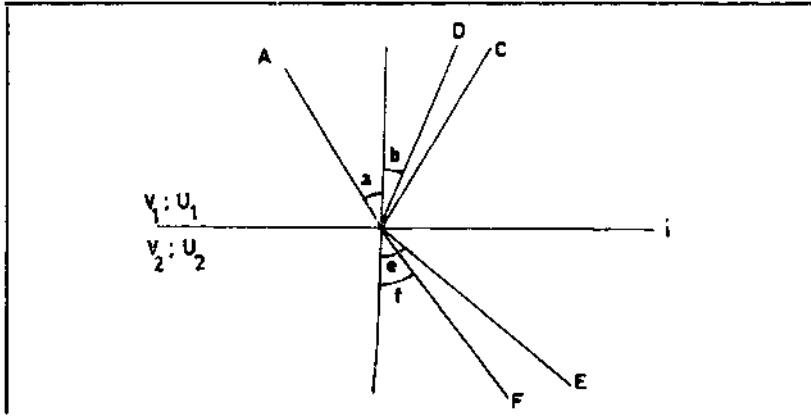
İkinci tabakadan üçüncüye geçerken ikinci tabakadaki kırılan ışın üçüncü için gelen ışın olacağından

$$(A_2) = (C_1)$$

$$(C_1) = (\alpha_2)^{-1} (A_2) \dots \dots \dots (24)$$

$$(C_{n-1}) = (\alpha_n)^{-1} (A_n)$$

Bu suretle  $n$  inci irdelemede ortamdan çıkan dalganın amplitüdü bulunmuş olur. O halde (21) i, her seferinde bulunan  $C$  değerini uygun şekilde sisteme yeniden enjekte etmek ve katsayı matrisini ona göre tanzim etmek suretiyle,  $n$  defa çözmek yeter.



Şek. 2

Sistemi n defa irdelemek için yaptığımız program aşağıdaki gibidir.

```

DIMENSION V (100), SIA (100), G (4,4),
RFR (4), VO (100)
READ (2,104) SI
104 FORMAT (F5.3)
SIA (1)=SI
READ (2,100) K
100 FORMAT (13)
READ (2,101) Z
101 FORMAT (F5.0)
READ (2,102) VI
102 FORMAT (F.0)
READ (2,103) A
103 FORMAT (F8.5)
TK=K
ZT=Z/TK
FAC=1.
V (1)=VI
DOI I=1, K
V (I+1)=V(I)*(I.+(ZT*A)
VO(I)=V(I+1)+V(I))/2.
IF(I-1)1,1,2
2 RV=VO(I)/VO(I-1)
SIA(I)=SIA(I-1)/RV
SIE=SIA(I)/RV
SIB=SIA(I)/SQRT(3.)
COA=SQRT(1.-SIA(I)**2)
SIA=2.*SIA(I)*COA
SIF=SIE/SQRT(3.)
COB=SQRT(1.-SIB**2)
COE=SQRT(1.-SIE**2)
COF=SQRT(1.-SIF**2)
SIB=2.*SIB*COB
SIE=2.*SIE*COE
SIF=2.*SIF*COF
CO2B=COB**2-SIB**2
CO2E=COE**2-SIE**2
CO2F=COF**2-SIF**2
G(1,1)=SIA(I)
G(1,2)=COB
G(1,3)=-SIE
G(1,4)=COF
RFR(1)=-FAC*SIA (I)
G(2,1)=COA
G(2,2)=SIB
G(2,3)=-COE
G(2,4)=-SIF
RFR(2)=-FAC*COA
G(3,1)=-SIA
G(3,2)=CO2B*SQRT(3.)
G(3,3)=SIE/RV**2
G(3,4)=-CO2F*SQRT(3.)/RV**2
RFR(3)=FAC*SIA
G(4,1)=CO2B
G(4,2)=SIB/SQRT(3.)
G(4,3)=CO2F/RV**2
G(4,4)=SIF/(RV**2*SQRT(3.1))
CALL SIMQ (G,RFR,4,KS)
FAC,RFR(3)
1 CONTINUE
WRITE (3,200) FAC
200 FORMAT(2X,F11.8)
CALL EXIT
END

```

### c. Numerik hesap ve mukayese

$$a=0.0004$$

$$z=500 \text{ m}$$

$$V_0=1000 \text{ m/s}$$

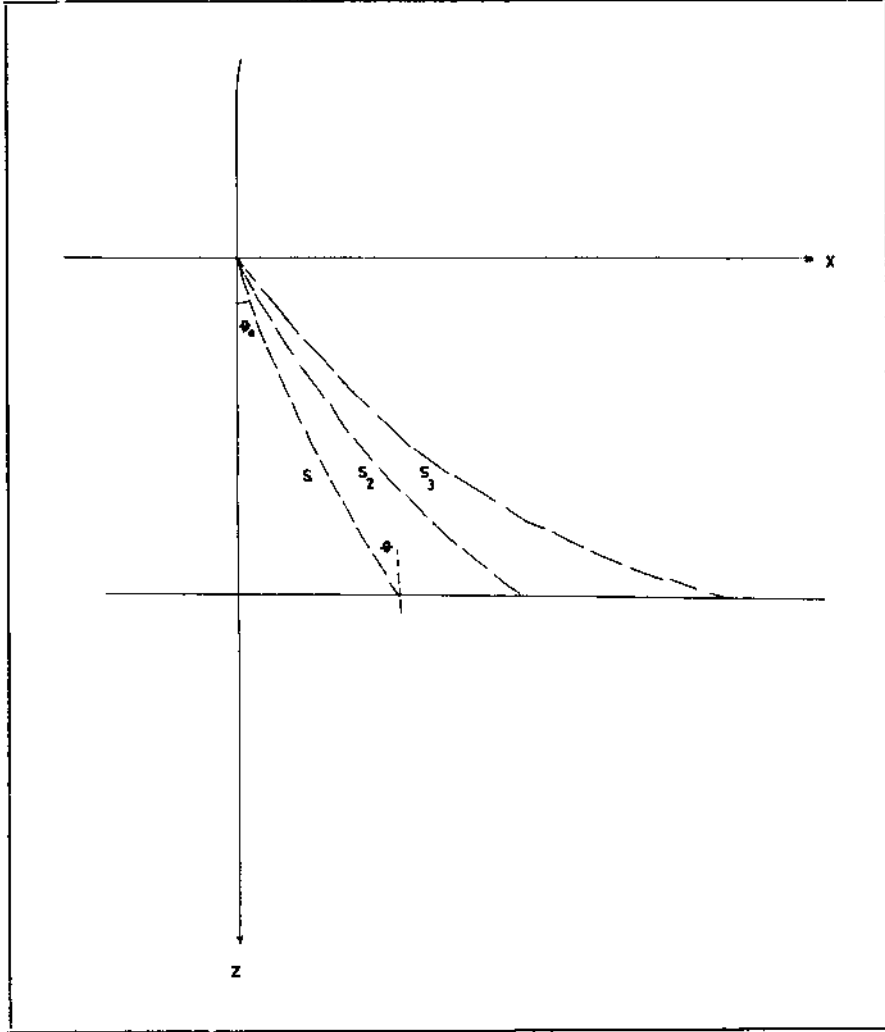
$V_{n+1}$  =1200 m/s değerleri için (20) yi kullanarak ortamdaki çıkışta (Şek. 3) amplitüdeki değişme miktarları:

Sin  $\theta_0$  = 0.25; 0.5; 0.75 değerleri için hesaplanmıştır.

$$0.25 \text{ için } 0.0016$$

$$0.5 \text{ için } 0.00126$$

$$0.75 \text{ için } 0.000833 \text{ bulunmuştur.}$$



Şek. 3

Ancak bu değerler geometrik yayılmayı da göz önüne alarak hesaplandığı için, mukayese bakımından, yalnız yansıma ve kırılma ile ilgili amplitüd değişmesini bulmak için yukarıdaki değerleri her ışının katettiği yay uzunluklarına bölmek icap etmektedir. O zaman ortama girişte birim olarak alınan amplitüd çıkışta;  $S_1$ ;  $S_2$ ;  $S_3$ ; yay uzunlukları ise,

$$W_1 = \frac{0.0016}{S_1} = \frac{0.0016}{513} = 0.8208$$

$$W_2 = \frac{0.00126}{S_2} = \frac{0.00126}{595} = 0.7497$$

$$W_3 = \frac{0.000833}{S_3} = \frac{0.000833}{903} = 0.7522$$

olarak bulunur.

$W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  ün mukayesesinden çıkış amplitüdünün giriş açısının lineer bir fonksiyonu olmadığı görülmektedir.

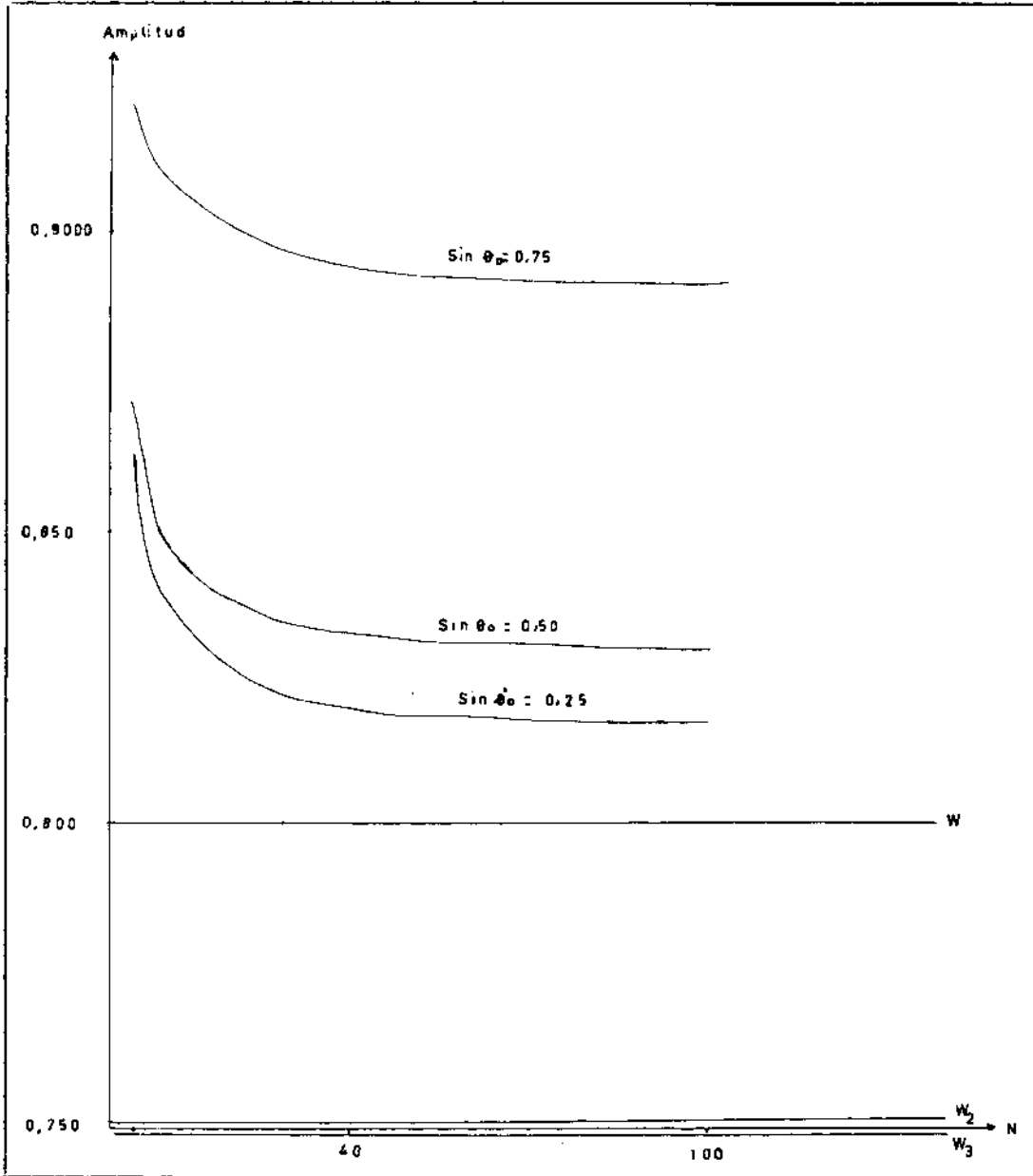
Teklif ettiğimiz ikinci metodu uygulamak için (21), (23) ve (24) ü kullanarak, aynı model üzerinde çözüme gidilmiştir. Her giriş açısı için tabaka 4; 40; 100 e bölünmüş, yani  $n=4; 40; 100$  alınmıştır.

Çözüm sonucu:

$\sin \theta_0 = 0.25$  için çıkış amplitüdü değerleri

$$C_4 = 0.85973 \quad C_{40} = 0.82180 \quad C_{100} = 0.81933$$

$\sin \theta_0 = 0.5$  için,



Şek. 4

$$C_4=0.86883 \quad C_{40}=0.833626 \quad C_{100}=0.83134$$

$$\text{Sin } \theta_o = 0.75 \text{ için,}$$

$$C_4=0.92003 \quad C_{40}=0.89432 \quad C_{100}=0.89262$$

Bu değerler grafiğe döküldüğünde Şekil 4 teki eğriler elde edilmektedir.

Eğrilerin incelenmesinden amplitüd fonksiyonunun,  $0_o$  ne olursa olsun, oldukça çabuk konverjan bir fonksiyon olduğu görülmektedir. Tabakayı 40 a bölmekle 100 e bölmek büyük bir değişiklik getirmemektedir.

$$\text{Ayrıca } \theta_o = 0 \text{ için amplitüd değerinin (10) dan } W_o = \frac{1}{(1+az)} = 0.833 \text{ olduğu hesaba ka-}$$

tılırsa burada da amplitüd fonksiyonunun Sin  $0_o$  ile orantılı olmadığı gözükmemektedir. Bunun da Zoep-ritz denklem sisteminin tabii bir sonucu olması icap eder.

(20) ile yapılan hesap neticeleri şüphesiz gerçek değeri yansıtmaktadır.  $0_o$  büyüdükçe iki metot arasındaki fark o nispete artmaktadır. Bu husus da büyük gelme açıları için, çok büyük n değerleri ile işlem yapsak bile, ikinci metottan birinciye bir konverjans olmamasından dolayı, sabit hızla eşantiyonaj yapmaktaki tehlikeleri göstermesi bakımından dikkate değer niteliktedir.

*Yayına verildiği tarih, 24 ağustos 1972*

#### BİBLİYOGRAFYA

- McCAMY, P.; MEYER, J. & SMITH (1962): Generally applicable solutions of Zoep-ritz amplitude equation. *B.S.S.A.*
- BORTFELD, R. (1960): Seismic waves in transition layers. *Geophysical Prospecting*.
- HRON, Frantisek (1969): introduction to the ray theory in a broader sense. *Laboratoire de Physique de VEcole Normale Supérieure—université de Paris*.
- EWING, M.; JARDETZKY, W. & PRESS, F. (1957): Elastic waves in layered media.