MAKÜ FEBED
ISSN Online: 1309-2243
http://dergipark.gov.tr/makufebed
DOI: 10.29048/makufebed.444556

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 9(Ek Sayı 1): 305-315 (2018)
The Journal of Graduate School of Natural and Applied Sciences of Mehmet Akif Ersoy University 9(Supplementary Issue 1): 305-315 (2018)

Derleme Makale / Review Paper

Pawlak Yaklaşım Uzaylarının Topolojik Yapısı ve Genelleştirilmiş Kaba Kümeler

Sadık BAYHAN[1*], Mehmet ŞEN[2]

[1] Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Burdur
[2] Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Burdur

Geliş Tarihi (Received): 17.07.2018, Kabul Tarihi (Accepted): 28.11.2018
Sorumlu Yazar (Corresponding author): bayhan@mehmetakif.edu.tr*
+90 248 2133042 +90 248 2133099

ÖZ

Kaba küme teorisinin temeli bilgi sistemlerine dayanır. Bilgi sistemlerinin yapısı matematiksel anlamda özel bir bağıntı türü olan denklik bağıntısı ile yakından ilişkilidir. Kaba küme yaklaşımı eksik ya da belirsiz bilgiyle ilgilenir ve temel bir bilim dalı olan matematiği merkezine alarak etkin bir şekilde kullanır. Belirsizliğin yapılandırılmasında yaklaşım operatörleri önemli rol üstlenirler. Tam bu noktadan başlayarak, yaklaşım operatörleri ve matematiğin önemli bir dalı olan topoloji arasında bağlantı kurulmaktadır. Bu çalışmada temel topolojik kavramlar ile kaba küme teorisinde yer alan kavramların benzerlikleri karşılaştırmalı olarak verilecektir. Pawlak yaklaşım uzaylarında dual çift oluşturan alt ve üst yaklaşım operatörlerinin genelleştirilmesi ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Kaba küme, Yaklaşım uzayı, Alt yaklaşım, Üst yaklaşım, Genelleştirilmiş yaklaşım uzayı

Topological Structure of Pawlak Approximation Spaces and Generalized Rough Sets

ABSTRACT

The rough set theory is based on the foundation information systems. The structure of information systems is closely related to the equivalence relation, which is a special type of relation in mathematical sense. Rough set approximation is concerned with imperfect or vague information and taking the fundamental science center, which uses mathematics effectively. Approximation operators play an important role in constructing uncertainty. Beginning at this point, there is a connection between the approximation operators and the topology, which is an important branch of mathematics. In this study, the similarities of basic topological concepts and concepts in rough set theory will be given comparatively. The generalization of the lower and upper approximation operators forming the dual pair in Pawlak approximation spaces and the relations between them will be examined.

Keywords: Rough set, Approximation space, Lower approximation, Upper approximation, Generalized approximation space

GİRİŞ

Kaba küme teorisi belirsizliği ifade etmek amacıyla matematiksel temellere dayanan bir yaklaşım olarak Polonyalı Bilim İnsanı Pawlak tarafından verilmiştir (Pawlak, 1982). Pawlak'ın kaba küme yaklaşımının başlangıcı bilgi sistemlerine kadar uzanır. En sade anlatımla bir bilgi sistemi; nesneler kümesi ile özelliklerden oluşan küme arasındaki ilişkinin bir tabloya aktarıldığı yapı olarak düşünülebilir. Nesnelerin ve özelliklerin eşleştirilmesi matematiksel anlamda bir bağıntıya karşılık gelir. Bu bağıntının sıradan olmaması ve bazı özelliklere sahip olması beklenir. Pawlak anlamında kaba küme yaklaşımının ya da kısaca kaba küme yaklaşımının temelini özel bir bağıntı türü olan denklik bağıntısı oluşturur. Amacı bir evrensel kümenin herhangi bir altkümesi verildiğinde, alt yaklaşım ile üst yaklaşım adı verilen yaklaşım operatörleri yardımıyla bu altkümenin karakterize edilmesi esasına dayanır. Bir başka ifadeyle, kaba küme teorisi, var olan veriyle belirlenemeyen kümelerin yaklaşımda bulunarak tanımlanması ilkesine dayanmaktadır. Bir bilgi sisteminde görünmeyen ya da gizli kalmış bilginin alt ve üst yaklaşımlar kullanılarak açığa çıkarılması da ilgili teorinin ana yapısı içinde yer almaktadır. Bu yaklaşımda istatistiksel bilgilere gereksinme duyulmaması teorinin farklı alanlarda kullanılabilirliğini ve yaygınlığını genişletmektedir. Uygulama alanları arasında yapay zeka, makine öğrenmesi, veri madenciliği, uzman sistemler, biyoinformatik ve tıp sayılabilir (Pawlak, 2002; Skowron ve ark., 2002; Swiniarski ve Skowron, 2003; Tsumoto, 2004; Slimany, 2013; Riki ve Rezaei, 2014). Kaba küme teorisi iki önemli açıdan incelenir. Birincisi yapısal yöntemler, ikincisi cebirsel yöntemlerdir. Yapısal yöntemlerin içeriğinde bir evrensel küme üzerinde tanımlanan bağıntılar, bir evrensel kümenin örtüleri ve ayrışımları, komşuluk sistemleri ve örgüler yer almaktadır (Yao, 1996, 1998a, 1998b). Cebirsel yöntemlerin içinde ise alt ve üst yaklaşım operatörleri bulunmaktadır. Pawlak anlamında kaba küme yaklaşımının genelleştirilmesi düşüncesi çeşitli doğrultularda ortaya konulmuştur. Bunlar birbirlerine eşdeğer olan yapılardır ve üç başlık altında toplanırlar (Yao, 2003). Birincisi eleman-tabanlı, ikincisi tanecik-tabanlı ve üçüncüsü olarak altsistem-tabanlı tanımlar olarak verilirler. Eleman-tabanlı tanımın esası denklik bağıntısının yerine herhangi bir bağıntının alınmasıyla genelleştirme yapılmasıdır. Tanecik-tabanlı genelleştirme ayrışıma karşılık örtü alınarak yapılır. Alt-sistem tabanlı tanımda ise bir alt sistem kullanılarak Boole Cebirine genelleştirme yapılır.

Topolojik uzay en basit anlamıyla belirli özellikleri sağlayan kümeler ailesidir ve bu aileye ait her eleman açık küme olarak adlandırılır. Matematiğin önemli alanlarından biri olan topoloji hem geometri ile analiz alanlarını içeren hem de bilgi sistemleri ile kaba kümeleri araştırmak için önemli bir matematiksel araçtır. Kaba küme teorisinin temel kavramlarının bazı topolojik kavramlarla olan benzerliğinden hareketle kaba kümeler ile topoloji arasında ilişki kurulmuştur (Vlach, 2008). Boş olmayan bir küme verildiğinde, bu kümenin herhangi bir ayrışımı bu küme üzerindeki topolojinin tabanıdır. Aynı zamanda ayrışımdan yola çıkılarak denklik bağıntısına geçiş yapılabilir. Özel bir bağıntı türü olarak denklik bağıntısı ise kaba küme teorisinin temel dayanağını oluşturur ve çalışmalar için sınırlayıcı bir durum yaratır. Örneğin evrensel küme olarak ülkemizdeki tüm illeri düşünelim ve herhangi iki şehir arasında komşu olma bağıntısını tanımlayalım. Bu bağıntıya göre Antalya Burdur'a ve Burdur da Afyon'a komşudur. Ancak Antalya Afyon'a komşu değildir. İller kümesi üzerinde komşu olma bağıntısı geçişme özelliğini sağlamadığından bir denklik bağıntısı değildir. Bilinen bu gerçeği uygulamalarda daha etkin kullanabilmek için denklik bağıntısı yerine, daha zayıf özellikleri bulunan bağıntılarla çalışmalar yapılarak kaba kümelerin genelleştirilmesi yoluna gidilmiştir (Zhu 2007a, 2007b). Bu çalışmada hem denklik bağıntısından indirgenen kaba kümelerin hem de herhangi bir bağıntıdan indirgenen genelleştirilmiş kaba kümelerin topolojik özellikleri bir araya getirilecektir.

Bu makalede, Pawlak yaklaşım uzayı ile topolojik uzaylar arasındaki ilişkiler incelenecektir. İlk olarak bağıntının tanımı ve çeşitli bağıntı türleri verildikten sonra, alt ve üst yaklaşım operatörleri, Pawlak yaklaşım uzayı, tanımlanabilir olma ve kaba küme kavramları ifade edilecektir. Daha sonra, kaba küme teorisinin başlangıç noktası olan bilgi sisteminden ve ayırt edilemezlik bağıntısından söz edilecektir. Ayrıca, topolojinin iç, kapanış ve sınır gibi temel kavramlarının kaba küme teorisinde yer alan kavramlarla olan benzerlikleri üzerinde durulacaktır. Son olarak, denklik bağıntısına dayalı Pawlak kaba küme yaklaşımı yerine herhangi bir bağıntı alındığında oluşturulan ve adına genelleştirilmiş yaklaşım uzayı adı verilen yapının özelliklerine değinilecektir.

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

U boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere $U \times U$ çarpım kümesinin herhangi bir R alt kümesine U üzerinde bir bağıntı karşılık gelir. Aksi belirtilmediği sürece, U kümesi üzerinde bir R bağıntısı yerine kısaca R nin bir bağıntı olduğunu ifade edilecektir. $x, y \in U$ için $(x, y) \in R$ olması x elemanını R bağıntısı ile y elemanıyla ilişkili olmasını ifade eder ve durum için xRy gösterimi kullanılır. R bir bağıntı olsun. R nin ters bağıntısı $\{(x, y) : (y, x) \in R\}$ kümesi olarak tanımlanır ve R^{-1} ile gösterilir. Bir U kümesi üzerindeki birim ya da özdeşlik bağıntısı $\{(x, x) : x \in U\}$ kümesi ile verilir. Bu kümeye U nun köşegeni denir ve Δ_U ile gösterilir (Bülbül, 2014) . Bazı özel bağıntı türleri aşağıda verilmiştir (Pei ve ark., 2011; Yu ve Zhan, 2014);

i. Her $x \in U$ için xRx ise R bağıntısı yansımalıdır.
ii. Her $x, y \in U$ için $xRy \Longrightarrow yRx$ ise *R* bağıntısı simetriktir.
iii. Her $x, y, z \in U$ için $(xRy$ ve $yRz) \Longrightarrow xRz$ ise *R* bağıntısı geçişlidir.
iv. Her $x \in U$ için xRy olacak şekilde bir $y \in U$ varsa *R* bağıntısı serialdir.
v. Her $x \in U$ için yRx olacak şekilde bir $y \in U$ varsa *R* bağıntısı ters serialdir.

$R, S \subseteq U \times U$ iki bağıntı olsun. R ile S nin bileşkesi U kümesi üzerinde bir bağıntıdır ve

$$S \circ R = \{(x,z) : (\exists y \in U)\,[(x,y) \in R \ ve \ (y,z) \in S]\}$$

olarak tanımlanır.

Özel olarak $R = S$ alınarak, bir R bağıntısının bütün kuvvetleri (bileşkeleri) $R^1 = R$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $R^{n+1} = R^n \circ R$ ile hesaplanır (Bülbül, 2014). Bir R bağıntısını içeren en küçük geçişli bağıntıya R nin geçişli kapanışı adı verilir ve $t(R)$ ile gösterilir. Bir R bağıntısı için $t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$ dir. Ayrıca geçişli kapanış tanımının doğal bir sonucu olarak $R \subseteq t(R)$ dir (Yu ve Zhan, 2014).

R bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişli olma özelliklerini sağlıyorsa denklik bağıntısı olarak adlandırılır. R bir denklik bağıntısı ve $x \in U$ olsun. x elemanının R bağıntısına göre denklik bölüğü $[x] = \{y \in U : xRy\}$ olarak tanımlanır. U nun her x elemanının R denklik bağıntısına göre denklik bölüklerinin oluşturduğu $\{[x]: x \in U\}$ kümesine bölüm kümesi denir ve U/R ile gösterilir. U/R bölüm kümesi U evrensel kümesinin bir ayrışımıdır (Bülbül, 2014). Tersine bir U kümesinin herhangi bir ayrışımı verildiğinde, bu ayrışıma karşılık gelen bir denklik bağıntısının var olduğunu belirtelim. R bir denklik bağıntısı olmak üzere, (U, R) ikilisine Pawlak yaklaşım uzayı denir (Pawlak, 1991). (U, R) bir Pawlak yaklaşım uzayı, U kümesinin bütün altkümelerinin ailesi yani kuvvet kümesi $P(U)$ ve bir $X \subseteq U$ altkümesi verilsin. $\underline{apr} : P(U) \to P(U)$, $\underline{apr}(X) = \{x \in U : [x] \subseteq X\}$ ile tanımlanan $\underline{apr}$ dönüşümüne alt yaklaşım operatörü, $\underline{apr}(X)$ kümesine de X in alt yaklaşımı denir. $\underline{apr}(X)$ kümesine ait nesneler kesinlikle X kümesine aittir, yani $\underline{apr}(X) \subseteq X$ dir. $\overline{apr}(X) : P(U) \to P(U)$, $\overline{apr}(X) = \{x \in U : [x] \cap X \neq \emptyset\}$ eşitliği ile verilen $\overline{apr}(X)$ dönüşümüne üst yaklaşım operatörü, $\overline{apr}(X)$ kümesine de X in üst yaklaşımı adları verilir. $\overline{apr}(X)$ kümesi ise X kümesinde olması muhtemel nesnelerden oluşur, yani $X \subseteq \overline{apr}(X)$ dir. Verilen alt ve üst yaklaşım operatörleri eşdeğer olarak, sırasıyla $\underline{apr}(X) = \cup\{[x] \in U/R : [x] \subseteq X\}$ ve $\overline{apr}(X) = \cup\{[x] \in U/R : [x] \cap X \neq \emptyset\}$ eşitlikleriyle de karakterize edilirler. Bir $X \subseteq U$ altkümesinin pozitif bölgesi $POS(X) = \underline{apr}(X)$, negatif bölgesi $NEG(X) = U \setminus \overline{apr}(X)$ kümeleri ile tanımlanırlar. Pozitif bölgeye ait nesneler kesinlikle X kümesine aittir. Negatif bölge kesin olarak X kümesine ait olmayan, yani kesin olarak X kümesinin tümleyeninde yer alan nesnelerden oluşur (Pawlak, 1982, 1991). Bir (U, R) Pawlak yaklaşım uzayında tanımlanabilirlik kavramı oldukça önemlidir. Bir kümenin tanımlanabilir olması o kümenin denklik bölüklerinin birleşimi olarak yazılması ile karakterize edilir. Doğal olarak bu tanıma uyan iki kavram alt ve üst yaklaşım operatörleridir. Bir diğer ifadeyle, herhangi bir $X \subseteq U$ altkümesi için $\underline{apr}(X)$ ve $\overline{apr}(X)$ kümeleri tanımlanabilirdir. Ayrıca tanımlanabilir olmayan kümeye tanımlanamaz veya kaba küme denir. Herhangi bir $X \subseteq U$ altkümesinin kaba olması $\underline{apr}(X) \neq \overline{apr}(X)$ ile ifade edilir (Pawlak, 1991; Yao, 1996; 1998b).

KABA KÜMELERİN BAŞLANGICI OLARAK BİLGİ SİSTEMLERİ

Nesnelerin sonlu bir kümesi U ve özelliklerin sonlu bir kümesi V olmak üzere $S = (U, V)$ ikilisine bir bilgi sistemi adı verilir (Pawlak, 1982). Bir $S = (U, V)$ bilgi sisteminde her bir $a \in V$ özelliği,

$$a : U \to V_a$$
$$x \mapsto a(x)$$

olarak tanımlanır ve özellik fonksiyonu olarak adlandırılır. Özellikler kümesi V nin boş olmayan her bir B altkümesi için

$$IND(B) = \{(x,y) \in U \times U : \forall \mathrm{a} \in \mathrm{B}, \mathrm{a(x)} = \mathrm{a(y)}\}$$

ile bir bağıntı tanımlanabilir. $IND(B)$ bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığından B altkümesi üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturur. $IND(B)$ özel olarak ayırt edilemezlik bağıntısı olarak adlandırılır (Pawlak, 1982). O halde özellikler kümesinin her bir altkümesi nesneler kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar. Bu bağıntıya göre iki nesnenin eşdeğer olması; altküme üzerinde aynı özellik değerlerine sahip olmasıyla tanımlanır. Basit bir bilgi sistemi $S = (U, V)$ Tablo 1 de verilmiştir. Bu bilgi sisteminin nesneler kümesi 7 kişiden oluşmakta ve tablonun satırlarında yer almaktadır. O halde evrensel küme $U = \{x_1 x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ dir. Özellikler kümesinde ise bu kişilere ait yaş (YŞ) ve yürüme performansları (YP) yer almaktadır, gösterim olarak $V = \{YŞ, YP\}$ kümesidir. Özellikler kümesi V tablonun sütunlarında gösterilir. $S = (U, V)$ bilgi sisteminin girdileri nesnelere karşılık gelen özelliklerin bilgisinden oluşmuştur (Suraj, 2004).

Tablo 1. Basit bir bilgi sistemi

Nesneler Özellikler	Yaş	Yürüme Performansı
x_1	16-30	50
x_2	16-30	0
x_3	31-45	1-25
x_4	31-45	1-25
x_5	46-60	26-49
x_6	16-30	26-49
x_7	46-60	26-49

Tablo 1 de x_3 ve x_4 ile x_5 ve x_7 nesneleri tam olarak aynı özellik değerlerini almaktadır (Suraj, 2004). Bu nesneler verilen YŞ ve YP özellikleri kullanıldığında ikişer ikişer ayırt edilemezdir. Bilgi sistemine dayalı IND denklik bağıntısının Pawlak yaklaşım uzayında R denklik bağıntısı ile özdeşleştirildiği kolayca görülmektedir. Ayrıca, Tablo 1 de yer alan bilgi sisteminin özellikler kümesinin boş olmayan bütün altkümeleri $\{YŞ, YP\}, \{YŞ\}$ ve $\{YP\}$ dir. Kısaca $P(V)\backslash\emptyset = \{\{YŞ, YP\}, \{YŞ\}, \{YP\}\}$ ailesidir. Her bir altkümeye karşılık gelen ayrışımlar ya da ayırt edilemezlik bağıntıları Tablo 2 de verilmiştir (Suraj, 2004).

Tablo 2. Ayırt edilemezlik bağıntıları

$P(V)\backslash\emptyset$	IND
$\{YŞ\}$	$\{\{x_1, x_2, x_6\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_7\}\}$
$\{YP\}$	$\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6, x_7\}\}$
$\{YŞ, YP\}$	$\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_6\}, \{x_5, x_7\}\}$

İlk olarak $X_1 = \{x_3, x_4\} \subseteq U$ altkümesi $\{YŞ\}$ özelliğine bağlı olarak düşünülürse $\underline{apr}(X_1) = \{x_3, x_4\} = \overline{apr}(X_1)$ dir. O halde $\{YŞ\}$ özelliğine bağlı olarak $X_1 = \{x_3, x_4\}$ kümesi tanımlanabilirdir. $X_1 = \{x_3, x_4\}$ altkümesinin pozitif bölgesi $POS(X_1) = \{x_3, x_4\}$ ve negatif bölgesi $NEG(X_1) = \{x_1, x_2, x_5, x_6, x_7\}$ kümesidir. Aynı $X_1 = \{x_3, x_4\}$ kümesi $\{YP\}$ ve $\{YŞ, YP\}$ özellikleriyle ele alındığında yine tanımlanabilir olmaktadır. Şimdi bir diğer $X_2 = \{x_2, x_4, x_5\} \subseteq U$ altkümesi yine $\{YŞ\}$ özelliğine bağlı olarak göz önüne alınsın. Bu durumda $\underline{apr}(X_2) \neq \overline{apr}(X_2)$ olur; yani $X_2 = \{x_2, x_4, x_5\}$ altkümesi $\{YŞ\}$ özelliğine bağlı olarak tanımlanamaz ya da eşdeğer olarak kaba kümedir. Benzer olarak, $X_2 = \{x_2, x_4, x_5\}$ altkümesi hem $\{YP\}$ hem de $\{YŞ, YP\}$ özellikleriyle tanımlanamaz olduğundan kabadır (Suraj, 2004).

Pawlak Yaklaşım Uzayının Özellikleri

(U, R) bir Pawlak yaklaşım uzayı, $X, Y \subseteq U$ ve X kümesinin tümleyeni $U\backslash X$ olmak üzere, alt ve üst yaklaşım operatörlerinin sağladığı özellikler Tablo 3 de verilmiştir (Pawlak, 1991).

Tablo 3. Alt ve üst yaklaşım operatörlerinin sağladığı özellikler

$A1.\ \underline{apr}(X) = U \setminus \overline{apr}\,(U \setminus X)$	$U1.\ \overline{apr}\,(X) = U \setminus \underline{apr}\,(U \setminus X)$.
$A2.\ \underline{apr}(U) = U$	$U2.\ \overline{apr}\,(\emptyset) = \emptyset$
$A3.\ \underline{apr}(X \cap Y) = \underline{apr}(X) \cap \underline{apr}(Y)$	$U3.\ \overline{apr}\,(X \cup Y) = \overline{apr}\,(X) \cup \overline{apr}\,(Y)$
$A4.\ \underline{apr}(X) \cup \underline{apr}(Y) \subseteq \underline{apr}(X \cup Y)$	$U4.\ \overline{apr}\,(X) \cap \overline{apr}\,(Y) \subseteq \overline{apr}\,(X \cap Y)$
$A5.\ X \subseteq Y \Longrightarrow \underline{apr}(X) \subseteq \underline{apr}(Y)$	$U5.\ X \subseteq Y \Longrightarrow \overline{apr}\,(X) \subseteq \overline{apr}\,(Y)$
$A6.\ \underline{apr}(\emptyset) = \emptyset$	$U6.\ \overline{apr}\,(U) = U$
$A7.\ \underline{apr}(X) \subseteq X$	$U7.\ X \subseteq \overline{apr}(X)$.
$A8.\ X \subseteq \underline{apr}\ \overline{apr}(X)$	$U8.\ \overline{apr}\ \underline{apr}(X) \subseteq X$
$A9.\ \underline{apr}(X) = \underline{apr}\ \underline{apr}(X)$	$U9.\ \overline{apr}(X) = \overline{apr}\ \overline{apr}(X)$
$A10.\ \underline{apr}(X) = \overline{apr}\ \underline{apr}(X)$	$U10.\ \overline{apr}\,(X) = \underline{apr}\ \overline{apr}(X)$

Yukarıda verilen Tablo 3 de yer alan (A1) ve (U1) özelliklerinden alt ve üst yaklaşım operatörlerinin birbirlerinin dual kavramları olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Kümeler teorisinde iyi bilinen $X \cup (U \setminus X) = U$ ve $X \cap (U \setminus X) = \emptyset$ eşitliklerinin Pawlak yaklaşım uzayındaki karşılıkları Tablo 4 de verilmiştir (Pawlak, 1991).

Tablo 4. Eşitliklerin Pawlak yaklaşım uzayındaki karşılıkları

$\overline{apr}\,(X) \cup \underline{apr}(U \setminus X) = U$	$\overline{apr}\,(X) \cap \underline{apr}(U \setminus X) = \emptyset$
$\overline{apr}\,(X) \cup \overline{apr}(U \setminus X) = U$	$\overline{apr}\,(X) \cap \overline{apr}(U \setminus X) = bnd(X)$
$\underline{apr}\,(X) \cup \overline{apr}(U \setminus X) = U$	$\underline{apr}\,(X) \cap \underline{apr}(U \setminus X) = \emptyset$
$\underline{apr}\,(X) \cup \underline{apr}(U \setminus X) = U \setminus bnd(X)$	$\underline{apr}\,(X) \cap \overline{apr}(U \setminus X) = \emptyset$

Topolojik Uzaylar ve Temel Topolojik Kavramlar

U bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan her $\tau \subseteq P(U)$ ailesine U kümesi üzerinde bir topoloji denir (Bülbül, 2014).

$T1.\ \emptyset, U \in \tau,$

$T2. \forall\ G_1, G_2 \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau,$

$\mathrm{T}3. \forall\ \{G_i\}_{i\in I} \subseteq \tau \Longrightarrow \cup_{i\in I}\ G_i \in \tau.$

Üzerinde bir topoloji tanımlanmış olan her U kümesine bir topolojik uzay denir ve (U,τ) ile gösterilir. U kümesinin elemanlarına bu topolojik uzayın noktaları ve τ ailesinin elemanlarına da bu topolojik uzayın açık kümeleri adı verilir. Eğer $\tau = P(U)$ olarak alınırsa (U,τ) ikilisine ayrık topoloji denir ve (U,τ_{dis}) ya da kısaca τ_{dis} ile gösterimi kullanılır. $X \subseteq U$ olmak üzere X kümesinin tümleyeni $U\backslash X$ açık ise X kümesine bu uzayda kapalı küme denir. Açık küme ile kapalı küme arasındaki ilişki " $X \subseteq U$ altkümesinin açık olması için gerekli ve yeterli koşul $U\backslash X$ kümesinin kapalı olmasıdır " önermesiyle verilir (Bülbül, 2014). Bunun doğal sonucu olarak, topolojinin tanımı kapalı kümelere dayalı olarak şöyle verilir:

$(T1)^c\ \ \emptyset, U \in \tau^c,$

$(T2)^c\ \ \forall\ F_1, F_2 \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \tau^c,$

$(T3)^c\ \ \forall\ \{F_i\}_{i\in I} \subseteq \tau^c \Longrightarrow\ \cap_{i\in I}\ F_i \in .\tau^c.$

U bir küme olsun ve $\tau^c \subseteq P(U)$ yukarıda verilen $(T1)^c, (T2)^c, (T3)^c$ koşullarını sağlayan bir küme ailesi ise U kümesi üzerinde öyle bir topoloji vardır ki, bu τ^c ailesi o topolojinin kapalı kümeler ailesidir (Bülbül, 2014).

(U,τ) bir topolojik uzay ve $X \subseteq U$ olsun. X kümesinin kapsadığı bütün açık kümelerin birleşimine X kümesinin içi denir ve $int(X)$ ile gösterilir. X kümesini kapsayan bütün kapalı kümelerin arakesitine ise X kümesinin kapanışı adı verilir ve $cl(X)$ gösterimi ile ifade edilir. Herhangi bir X altkümesinin içi ve kapanışı arasında $int(X) \subseteq X \subseteq cl(X)$ bağıntısı da verilebilir. (U,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $x \in U$ ve $G \subseteq U$ olsun. Eğer $x \in G \subseteq U$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ varsa, G altkümesine x noktasının bir komşuluğu denir. $X \subseteq U$ olmak üzere $x \in U$ noktasının her komşuluğunun hem X hem de $U\backslash X$ ile arakesiti boş değilse, bu x noktasına X kümesinin bir sınır noktası adı verilir. X kümesinin bütün sınır noktalarının kümesine X in sınırı denir ve $bnd(X)$ ile gösterilir. U kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri verilsin. τ_1 topolojisine göre açık olan her küme τ_2 topolojisine göre de açık küme oluyorsa, τ_1 topolojisi τ_2 topolojisinden daha kabadır ya da τ_2 topolojisi τ_1 topolojisinden daha incedir denir ve durumu ifade etmek için $\tau_1 \subseteq \tau_2$ gösterimi kullanılır. Bir kümenin eleman sayısı ile o küme üzerinde tanımlanabilen topolojilerin sayısının üstel olarak arttığı bilinmektedir. Bir topolojik uzayın açık kümelerinin sayısının fazla olması o topolojik uzayın incelmesi anlamına gelmektedir. Böyle bir durumda, topolojilerin incelmesi sürekli fonksiyonların sayısını arttırırken, yakınsak dizilerin sayısı azaltır. Örneğin U kümesi üzerinde ayrık topoloji τ_{dis} bulunsun. (U,τ_{dis}) topolojik uzayında tanımlı her fonksiyon sürekli olmasını karşın sadece sabit olan diziler yakınsaktır. Topolojik uzayların açık kümeleri esas alınarak sınıflara ayrılması ve incelenmesi ayırma aksiyomları olarak bilinen kavramların kazanılmasına yol açmıştır. Bunlar içinde düzenli ve normal topolojik uzaylar sayılabilir. (U,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her kapalı $K \subseteq U$ altkümesi ve bu küme dışındaki bir noktayı ayıran ayrık açık altkümeler varsa, bu topolojik uzaya düzenlidir ya da regülerdir denir. Bir (U,τ) topolojik uzayının normal olması, her kapalı ve ayrık küme ikilisini ayıran açık ve ayrık küme ikilisinin varlığı ile tanımlanır (Bülbül, 2014).

U herhangi bir küme ve $X, Y \subseteq U$ olsun. Tablo 5 de verilen özellikleri sağlayan $int : P(U) \longrightarrow P(U)$ dönüşümüne iç operatörü, $cl : P(U) \longrightarrow P(U)$ dönüşümüne de kapanış operatörü adları verilir (Bülbül, 2014).

Tablo 5. İç ve Dış operatörler

$INT1.\ int(U) = U$	$CL1.\ cl(\emptyset) = \emptyset$
$INT2.\ int(X \cap Y) =\ int(X) \cap int(Y)$	$CL2.\ cl(X \cup Y) =\ cl(X) \cup cl(Y)$
$INT3.\ int(X) \subseteq X$	$CL3.\ X \subseteq cl(X)$
$INT4.\ int(int(X)) = X$	$CL4.\ cl(cl(X)) = X$

U herhangi bir küme olmak üzere, $int : P(U) \longrightarrow P(U)$ iç operatörü $INT1, INT2, INT3, INT4$ özelliklerini sağlıyorsa $\tau = \{X \subseteq U :\ int(X) = X\}$ şeklinde tanımlanan altküme ailesi U kümesi üzerinde bir topolojidir. Benzer olarak; $cl : P(U) \longrightarrow P(U)$ kapanış operatörü $CL1$, $CL2$, $CL3$, $CL4$ özelliklerini sağlıyorsa $\tau^c = \{X \subseteq U :\ cl(X) = X\}$ şeklinde tanımlanan altküme ailesi U kümesi üzerinde bir topolojidir ve τ^c ailesi bu topolojinin kapalı kümelerinden oluşur (Bülbül, 2014). $X \subseteq U$ olmak üzere iç ve kapanış operatörleri arasında $int(X) = U \backslash cl(U\backslash X)$ ve $cl(X) = U \backslash int(U\backslash X)$ bağıntıları sağlanır. Bu eşitliklerin varlığı int ve cl operatörlerinin birbirlerinin duali olduğunu ifade eder. Bir başka değişle, int operatörü verildiğinde cl operatörüne veya cl operatörü verildiğinde int operatörüne geçiş ilgili eşitlikler kullanılarak yapılabilir. Bu durumu somutlaştıran bir örneği verelim:

ÖRNEK 1 $U = \{a.b, c, d\}$ kümesi verilsin. $cl : P(U) \longrightarrow P(U)$ dönüşümü Tablo 6 verildiği gibi tanımlansın:

Tablo 6. Dönüşümler kümesi

$cl(\emptyset)=\emptyset$	$cl(\{1\})=\{1\}$	$cl(\{2\})=U$	$cl(\{3\})=U$
$cl(\{4\})=\{4\}$	$cl(\{1,2\})=U$	$cl(\{1,3\})=U$	$cl(\{1,4\})=\{1,4\}$
$cl(\{2,3\})=U$	$cl(\{2,4\})=U$	$cl(\{3,4\})=U$	$cl(\{1,2,3)=U$
$cl(\{1,2,4\})=U$	$cl(\{1,3,4\})=U$	$cl(\{2,3,4\})=U$	$cl(U)=U$

$cl: P(U)\longrightarrow P(U)$ dönüşümü $CL1$, $CL2$, $CL3$, $CL4$ özelliklerini sağladığı için bir kapanış operatörüdür. $\tau^c=\{X\subseteq U: cl(X)=X\}=\{U,\emptyset,\{1\},\{4],\{1,4\}\}$ altküme ailesi U kümesi üzerinde bir topolojidir ve τ^c ailesi bu topolojinin kapalı kümelerinden oluşur. Kapanış ve iç operatörleri arasındaki dualite gereğince

$\tau=\{X\subseteq U: \quad int(X)=X\}=\{U,\emptyset,\{2,3,4\},\{1,2,3],\{2,3\}\}$ ailesi U kümesi üzerinde bir topolojidir. Elemanları açık kümeler olan τ ailesinden iç operatörüne yine dualite gerçeği kullanılarak geçiş yapılabilir. Bunun için Tablo 7 de verilen $int: P(U)\longrightarrow P(U)$ dönüşümünün, iç operatörü olmanın $INT1, INT2, INT3, INT4$ dört özelliğini sağladığı kolaylıkla görülür.

Tablo 7. Dönüşümlerin iç operatör olması

$int(\emptyset)=\emptyset$	$int(\{1\})=\emptyset$	$int(\{2\})=\emptyset$	$int(\{3\})=\emptyset$
$int(\{4\})=\emptyset$	$int(\{1,2\})=\emptyset$	$int(\{1,3\})=\emptyset$	$int(\{1,4\})=\emptyset$
$int(\{2,3\})=\{2,3\}$	$int(\{2,4\})=\emptyset$	$int(\{3,4\})=\emptyset$	$int(\{1,2,3)=\{1,2,3\}$
$int(\{1,2,4\})=\emptyset$	$int(\{1,3,4\})=\emptyset$	$int(\{2,3,4\})=\{2,3,4\}$	$int(U)=U$

(U,τ) bir topolojik uzay ve $X\subseteq U$ olsun. Aşağıda verilen eşdeğerlikler sağlanır (Bülbül, 2014).

i. X atkümesi açıktır $\Leftrightarrow$ $int(X)=X$ dir.
ii. X atkümesi kapalıdır $\Leftrightarrow$ $cl(X)=X$ dir.
iii. $bnd(X)=\emptyset$ $\Leftrightarrow$ X kümesi hem açık hem de kapalıdır (clopen).

Ayrıca bir $X\subseteq U$ altkümesinin sınırının; kapanışı ile içi arasındaki ilişki $bnd(X)=cl(X)\setminus int(X)$ eşitliği ile verilir (Bülbül, 2014).

Tablo 1 de verilen alt ve üst yaklaşım operatörlerine ilişkin özelliklerden bazılarının yukarıda tanımda verilen iç ve kapanış operatörlerinin özellikleri ile benzerlikleri kolaylıkla gözlenmektedir. Daha somut olarak (A2-INT1), (A3-INT2), (A7-INT3) ve (A9-INT4) eşleştirmeleri alt yaklaşım operatörünün topolojik uzaydaki iç operatörüne karşılık gelmektedir. İç ve kapanış operatörleri arasındaki dualite göz önüne alındığında (U2-CL1), (U3-CL2), (U7-CL3) ve (U9-CL4) eşleştirmelerinin de üst yaklaşım operatörünün topolojik uzaydaki kapanış operatörü ile çakıştığı görülmektedir. Sonuç olarak $\underline{apr}\,(X)=int(X)$ ve $\overline{apr}\,(X)=cl(X)$ eşitlikleri yazılabilir. Bunlara ek olarak $bnd(X)$= $cl(X)\setminus int(X)=\overline{apr}\,(X)\setminus\underline{apr}\,(X)$ ve $\underline{apr}\,(X)\subseteq X\subseteq\overline{apr}\,(X)$ özelikleri de tanımların doğal bir sonucu olarak verilebilir.

(U,τ) bir topolojik uzay ve B $\subseteq\tau$ olsun. Eğer her açık küme, B nin bazı elemanlarının birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa, bu B altailesine τ topolojisi için bir taban adı verilir. Eğer S$\subseteq\tau$ altailesinin elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinden oluşan aile τ topolojisi için bir taban oluşturuyorsa, bu S ailesine τ nun alttabanı denir. Ayrıca alttaban için önemli bir karakterizasyonu ifade edelim : S $\subseteq P(U)$ ailesinin U kümesi üzerindeki bir topolojinin alttabanı olması için gerekli ve yeterli koşul S ailesinin $U=\cup\{S: S\in$ S$\}$ eşitliğini sağlamasıdır (Bülbül, 2014).

Pawlak Yaklaşım Uzayları ve Topolojik Uzaylar

Pawlak tarafından verilen kaba küme kavramı temel olarak bir denklik bağıntısına dayanır. Bir (U,R) Pawlak yaklaşım uzayında bir $X\subseteq U$ altkümesinin kaba olması, X in alt yaklaşımı ile üst yaklaşımının birbirinden farklı olmasıyla, yani $\underline{apr}(X)\neq\overline{apr}(X)$ olarak tanımlanır. Her (U,R) Pawlak yaklaşım uzayı üzerindeki denklik bağıntısıyla bir topoloji indirger. Bu topolojinin tabanı U/R bölüm kümesidir ve bu topolojiye göre her açık küme aynı zamanda kapalıdır. $(U,U/R)$ ikilisine clopen topoloji ya da ayrışım topolojisi adı verilir ve genellikle (U,τ_R) gösterimi kullanılır. Özel bir topolojik yapı olan clopen topolojisinin elemanları hem açık hem de kapalı kümelerden oluşur. (U,τ_R) clopen topolojisinin bir başka özelliği açık kümelerin herhangi bir ailesinin arakesitinin açık olmasıdır. Bu özelliğe sahip topoloji Alexandrov topolojisi olarak bilinir. Pawlak yaklaşım uzayında tanımlanan ve özellikleri verilen alt ve üst yaklaşım operatörleri; clopen topolojisine göre sırasıyla iç ve kapanış operatörlerine karşılık gelir. Bu durum $X\subseteq U$ olmak üzere $\underline{apr}\,(X)=int(X)$ ve $\overline{apr}\,(X)=cl(X)$ eşitlikleri ile ifade edilir. Eğer her $X\subseteq U$ için $\underline{apr}\,(X)=\overline{apr}\,(X)$ eşitliği sağlanıyorsa ya da eşdeğer olarak her X altkümesi tanımlanabilir ise, (U,R) Pawlak yaklaşım uzayına ayrık Pawlak uzayı adı verilir. Bir ayrık Pawlak uzayında her denklik bölüğü tek noktalıdır. Doğal olarak ayrık Pawlak uzayı U kümesi üzerinde ayrık topolojiyi üretir (Lashin ve ark., 2005).

ÖRNEK 2 $U=\{\mathrm{a,b,c,d}\}$ kümesinin iki ayrışımı $B_1=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$ ve $B_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$ aileleri olsun. B_1 ailesine karşılık gelen R_1 denklik bağıntısına göre, her $X\subseteq U$ altkümesi için $\underline{apr}\,(X)=\overline{apr}\,(X)$ olduğundan X kümeleri tanımlanabilirdir. (U,R_1) Pawlak uzayı ayrıktır ve U kümesi üzerinde ayrık topolojiyi üretir. $B_2=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$ ailesine karşılık gelen R_2 denklik bağıntısına göre, U kümesinin her altkümesi tanımlanabilir değildir. Örneğin $X=\{b,c,d\}\subseteq U$ altkümesi için $\underline{apr}(X)\neq\overline{apr}(X)$ olur. Bu durum aynı X kümesinin B_2 ayrışımına ait elemanların birleşimi olarak yazılamadığı gerçeği ile de açıklanabilir. Böylece X kümesi tanımlanamaz ve (U,R_2) Pawlak uzayı ayrık değildir. Gerçekten tabanı B_2 ailesi olan topoloji $\tau_{R_2}=\{\emptyset,U,\{a,b\},\{c\},\{d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$ dir ve ayrık değildir.

Bir (U,R) Pawlak yaklaşım uzayı ve bir $X\subseteq U$ altkümesi verilsin. X altkümesinin tanımlanabilir olması (U,τ_R) topolojik uzayında X altkümesinin açık ya da kapalı olmasına eşdeğerdir. Buna ek olarak, X altkümesinin tanımlanabilir olması ise $int(X)=cl(X)$ eşitliği ile ifade edilir (Vlach, 2008).

Genel topolojide yer alan önemli kavramlardan biri de düzgün yapılardır. $U\times U$ çarpım kümesinin aşağıdaki özellikleri sağlayan her D ailesine U üzerinde bir düzgün yapı denir (Bülbül, 2014).

i. Her $D\in$ D için $\Delta_U\subseteq D$ dir.
ii. Her $D_1,D_2\in$ D için $D_1\cap D_2\in$ D dir.
iii. Her $D\in$ D için $E\circ E\subseteq D$ olacak şekilde bir $E\in$ D vardır.
iv. Her $D\in$ D için $E^{-1}\subseteq D$ olacak şekilde bir $E\in$ D vardır.
v. $D\in$ D ve $D\subseteq E$ ise $E\in$ D dir.

D, U kümesi üzerinde bir düzgün yapı olmak üzere $(X,$ D) ikilisine bir düzgün uzay adı verilir. Bir U kümesi üzerinde verilen her düzgün yapı U üzerinde bir topoloji üretir. Ayrıca, $D\subseteq U\times U$ bir denklik bağıntısı ise D$=\{R:R\subseteq U\times U,D\subseteq R\}$ olarak tanımlanan altailesi U kümesi için bir düzgün yapıdır. Bu düzgün yapıdan üretilen topolojik uzay ile (U,τ_R) clopen topolojisi çakışır (Bülbül, 2014). Sonuç olarak Pawlak yaklaşım uzayları topolojisi clopen topolojisiyle çakışan düzgün uzaylardır (Bülbül, 2014; Vlach. 2008).

Genelleştirilmiş Yaklaşım Uzayları

Pawlak yaklaşım uzayının denklik bağıntısına dayalı olması yürütülen çalışmalar için sınırlayıcı olabilmektedir. Bu nedenle Pawlak yaklaşım uzayında denklik bağıntısı koşulunu yerine, U kümesi üzerinde herhangi bir R bağıntsı alınarak genelleştirilme yoluna gidilir. Bu durumda (U,R_G) ikilisi genelleştirilmiş yaklaşım uzayı olarak adlandırılır. Yine Pawlak yaklaşım uzayındaki denklik bağıntısı tarafından karakterize edilen denklik bölüğü yerine de aşağıda tanımı verilen ardıl komşuluklar alınarak kaba kümelerin genelleştirmesine ilişkin çeşitli çalışmaların yapıldığı görülmektedir (Pei ve ark.,2011; Yao, 1998b; Zhu, 2007a; Zhu, 2009). Çalışmanın geri kalan bölümünde alt yaklaşım ve üst yaklaşım operatörleri herhangi bir bağıntı üzerinde tanımlanacak, topolojik yapılar bu tanımlar esas alınarak verilecektir. Pawlak yaklaşım uzayında alt ve üst yaklaşım operatörleri için kullanılan $\underline{apr}$ ile $\overline{apr}$ gösterimleri yerine, herhangi bir R bağıntısı verildiğinde, karışıklığa meydan vermemek için sırasıyla, $\underline{R}$ ile $\overline{R}$ gösterimleri kullanılacaktır.

$R\subseteq U\times U$ bir bağıntı olmak üzere, herhangi bir $x\in U$ için $R_s:U\to P(U), R_s(x)=\{y\in U:xRy\}$ olarak tanımlanan R_s ye ardıl komşuluk operatörü, $\mathrm{R_s(x)}$ kümesine de x elemanının ardıl komşuluğu denir.

R bir denklik bağıntısı ve $x\in U$ olsun. $R_s(x)=[x]$ eşitliği tanımların doğal bir sonucu olarak yazılabilir (Yao, 1998b).

$R\subseteq U\times U$ bir bağıntı ve $X\subseteq U$ olsun.

i. $\underline{R}:P(U)\to P(U),\ \underline{R}(X)=\{x\in U:R_s(x)\subseteq X\}$ dönüşümüne alt yaklaşım operatörü ve $\underline{R}(X)$ kümesine de X in alt yaklaşımı denir.
ii. $\overline{R}:P(U)\to P(U),\overline{R}(X)=\{x\in U:R_s(x)\cap X\neq\emptyset\}$ dönüşümüne üst yaklaşım operatörü ve $\overline{R}(X)$ kümesine de X in üst yaklaşımı denir (Yao, 1998a, 1998b).

$R\subseteq U\times U$ bir bağıntı olmak üzere, yukarıda tanımları ardıl komşuluklara dayalı olarak verilen alt ve üst yaklaşım operatörleri Çizelde 1 de verilen özelliklerin tamamını sağlamaz. Örneğin (A1)-(U1) özellikleri bunlardan en önemli ikisidir. Pawlak yaklaşım uzayının dayanak noktasının denklik bağıntısı olmasıyla alt ve üst yaklaşım operatörlerinin dual kavramlar olmasının yolu açılır. Ancak herhangi bir bağıntı alındığında; alt ve üst yaklaşım operatörlerinin dual kavramlar olması durumu geçerliliğini kaybeder. Ardıl komşuluklara dayalı olarak verilen alt ve üst yaklaşım operatörlerinin Tablo 1 de yer alan özelliklerden sadece (A2-U2), (A3-U3), (A4-U4) ve (A5,U5) ye sahiptir (Yang ve Xu, 2011; Li ve ark., 2012; Yu ve Zhan, 2014).

R yansımalı bir bağıntı ise, her $X\subseteq U$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (Kondo, 2006).

i. $\underline{R}(X)\subseteq X\subseteq\overline{R}(X)$,
ii. $X\subseteq Y$ ise $\underline{R}(X)\subseteq\overline{R}(Y)$ dir,
iii. $\underline{R}(U\setminus X)=U\setminus\overline{R}(X)$.

R yansımalı bir bağıntı olsun. $\tau = \{ X \subseteq U : \underline{R}(X) = X\}$ ailesi U kümesi üzerinde bir topoloji belirler (Kondo, 2006; Kondo ve Dudek 2006).

ÖRNEK 3 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)\}$ yansımalı bağıntısı tarafından indirgenen topolojiyi belirleyelim. Öncelikle her noktanın ardıl komşulukları $R_s(a) = \{a, b\}$, $R_s(b) = \{\mathrm{b}\}$ ve $R_s(c) = \{c\}$ olarak belirlenir. U kümesinin alt yaklaşımları kendisine eşit olan altkümeleri $U, \emptyset, \{c\}, \{a, b\}$ dir. O halde R yansımalı bağıntısından indirgenen topoloji $\tau = \{ U, \emptyset, \{c\}, \{a, b\} \}$ ailesidir.

U kümesi üzerinde yansımalı bir R bağıntısı verilsin. R bağıntısından indirgenen topoloji τ olmak üzere alt yaklaşım operatörü ile iç operatörü çakışmaz ya da aynı anlama gelmez. Bu durumu somutlaştırmak üzere; yukarıda verilen Örnek 3 ü tekrar ele alalım. $X = \{b\} \subseteq U$ altkümesi için $\underline{R}(X) = \{b\}$ olmasına karşın $int(X) = \emptyset$ dir. Benzer olarak üst yaklaşım operatörünün de kapanış operatörüne eşit olmadığı görülür. Gerçekten; aynı örnek üzerinde bu kez $X = \{a\} \subseteq U$ altkümesi alındığında $\overline{R}(X) = \{a\} \neq \{a, b\} = cl(X)$ olur.

R bağıntısı simetrik ve geçişli olsun. R nin indirgediği alt ve üst yaklaşım operatör çiftinin bir topolojinin iç ve kapanış operatör çifti olduğu kanıtlandı (Yao, 1996). Bir R bağıntısı ile topolojinin iç ve kapanış operatörleri arasındaki ilişki verildi (Yu ve Zhan, 2014).

(U, R_G) genelleştirilmiş bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Pei ve ark., 2011).

i. R bağıntısı serialdir.
ii. Aşağıdaki özellikler sağlanır :
 $(a)\ \underline{R}(X) \subseteq \overline{R}(X)$,
 $(b)\ \underline{R}(\emptyset) = \emptyset$,
 $(c)\ \overline{R}(X) = X$.

(U, R_G) genelleştirilmiş bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Pei ve ark., 2011).

i. R bağıntısı yansımalıdır.
ii. Aşağıdaki özelliklerden sadece biri sağlanır :
 $(a)\ \underline{R}(X) \subseteq X$,
 $(b)\ X \subseteq \overline{R}(X)$.

(U, R_G) genelleştirilmiş bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Pei ve ark., 2011).

i. R bağıntısı simetriktir.
ii. Aşağıdaki özellikler sağlanır :
 $(a)\ X \subseteq \underline{R}\, \overline{R}(X)$,
 $(b)\ \overline{R}\ \underline{R}(X) \subseteq X$.

(U, R_G) genelleştirilmiş bir yaklaşım uzayı ve $X \subseteq U$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir (Pei ve ark., 2011).

i. R bağıntısı geçişlidir.
ii. Aşağıdaki özellikler sağlanır
 $(a)\ \underline{R}(X) \subseteq \underline{R}\ \underline{R}(X)$,
 $(b)\ \overline{R}\, \overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(X)$.

Yansımalı bir bağıntıdan topoloji indirgenir (Kondo, 2006). Aşağıda ise verilen bir serial bağıntıdan topoloji indirgediği ifade edilmektedir (Yu ve Zhang, 2014).

R bir serial bağıntı olmak üzere (U, R_G) genelleştirilmiş yaklaşım uzayı verilsin. $\tau = \{ X \subseteq U : \underline{R}(X) = \overline{R}(X)\}$ ailesi U kümesi üzerinde bir topoloji belirler. R serial bağıntısından indirgenen topolojinin elemanları ya da açık kümeleri, bütün tanımlanabilir kümelerden oluşmaktadır (Yu ve Zhang, 2014).

ÖRNEK 4 $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,c),(c,c]\}$ bağıntısı verilsin. R bağıntısı serialdir. Şimdi R serial bağıntısından indirgenen topolojiyi belirleyelim. Her noktanın ardıl komşulukları $R_s(a) = \{a, b\}$, $R_s(b) = \{\mathrm{a, c}\}$ ve $R_s(c) = \{c\}$ olarak belirlenir. Bu bilgileri Tablo 8 de daha açık olarak görelim:

Tablo 8. Her noktanın ardıl komşulukları

U	a	b	c
R_s	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{c\}$

Şimdi her altkümenin alt yaklaşımlarını belirleyelim. $\underline{R}(\emptyset) = \emptyset$, $\underline{R}(\{a\}) = \underline{R}(\{b\}) = \emptyset$, $\underline{R}(\{c\}) = \{c\}$, $\underline{R}(\{a, b\}) = \{a, b\}$, $\underline{R}(\{b, c\}) = \{c\}$, $\underline{R}(\{a, c\}) = \{b, c\}$, $\underline{R}(U) = U$ bulunur. Benzer şekilde her altkümenin üst yaklaşımları $\overline{R}(\emptyset) = \emptyset$, $\overline{R}(\{a\}) = \{b, c\})$, $\overline{R}(\{b\}) = \{a, b\}$, $\overline{R}(\{c\}) = \{b, c\}$, $\overline{R}(\{a, b\}) = \{a, b\}$, $\overline{R}(\{a, c\}) = U$, $\overline{R}(\{b, c\}) = U$, $\overline{R}(U) = U$ olur. Elde edilen alt ve üst yaklaşımları Tablo 9 a aktaralım:

Tablo 9. Her altkümenin alt yaklaşımları

$P(U)$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	U
$\underline{R}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{c\}$	U
$\overline{R}$	$\emptyset$	$\{b, c\}$	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b\}$	U	U	U

(U, R_G) genelleştirilmiş yaklaşım uzayının tanımlanabilir ya da eşdeğer olarak $\underline{R}(X) = \overline{R}(X)$ koşulunu sağlayan altkümelerinin, Tablo 9 yardımıyla kolaylıkla $\emptyset, U$ ve $\{a, b\}$ olduğu görülür. O halde R serial bağıntısı tarafından indirgenen $\tau = \{ X \subseteq U : \underline{R}(X) = \overline{R}(X)\} = \{\emptyset, U, \{a, b\}\}$ ailesi U kümesi üzerinde bir topolojidir ve (U, τ) ikilisi bir topolojik uzaydır.

Topolojik Uzaylar ve Genelleştirilmiş Yaklaşım Uzayları

(U, R_G) bir genelleştirilmiş yaklaşım uzayı olsun. U nun altkümelerinin τ_1, τ_2 ve τ_3 aileleri aşağıdaki gibi tanımlansın :

$$\tau_1 = \{X \subseteq U : \underline{R}(X) = \overline{R}(X)\},$$
$$\tau_2 = \{X \subseteq U : \underline{R}(X) = X\},\ \tau_3 = \{\underline{R}(X) :\ X \subseteq U\}$$

R bağıntısı sahip olduğu özelliklere göre;

1. R serial ise τ_1 ailesi U üzerinde bir topolojidir,
2. R yansımalı ise τ_1 ve τ_2 aileleri U üzerinde birer topolojidir ve $\tau_1 \subseteq \tau_2$ dir,
3. R yansımalı ve geçişli ise τ_1, τ_2 ve τ_3 aileleri U üzerinde birer topolojidir ve $\tau_1 \subseteq \tau_2 = \tau_3$ dir,
4. R bir denklik bağıntısı ise τ_1, τ_2 ve τ_3 aileleri U üzerinde birer topolojidir ve $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ dir,
   ilişkileri vardır (Yu ve Zhan, 2014).

Örnek 3 de verilen R bağıntısı yansımalıdır ve $\tau_1 = \tau_2$ dir. $U = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde verilen $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$ bağıntısı yansımalı, geçişlidir ve $\tau_1 \subseteq \tau_2 = \tau_3$ sağlanır. Aynı U kümesi üzerinde $R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$ bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğundan $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ eşitlikleri sağlanır.

R bir bağıntı olsun. Her $x \in U$ için ardıl komşulukların ailesi S_R ile gösterilsin, yani $S_R = \{R_s(x) : x \in U\}$ olsun. (U, R) bir Pawlak uzayı ise aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $S_R = U/R$ ailesi hem U nun bir ayrışımı hem de U üzerindeki topolojinin bir tabanıdır.
2. τ_R, U üzerinde clopen topolojisidir.
3. (U, τ_R) topolojik uzayı hem regüler hem de normaldir.

(U, R_G) genelleştirilmiş bir yaklaşım uzayı olsun. Eğer S_R ailesi U kümesi üzerindeki topoloji için bir alttaban oluyorsa, S_R ailesi U üzerinde bir tek topoloji belirler. Bu topolojiye R ile indirgenen topoloji denir ve τ_R ile gösterilir. S_R ailesinin U kümesi üzerindeki topoloji için bir alttaban olması için gerekli ve yeterli koşul

$$R_s(U) = \bigcup_{x \in U} R_s(x) = U$$

sağlanmasıdır (Vlach, 2008). Verilen bu eşitlik R bağıntısının ters serial olması durumunda gerçeklenir. Sonuç olarak; S_R ailesinin U kümesi üzerindeki topoloji için bir alttaban olması için gerekli ve yeterli koşul R bağıntısının ters serial olmasıdır (Vlach, 2008)..

ÖRNEK 5 $U = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d), (e, d), (e, e)\}$ bağıntısı verilsin. R bağıntısı ters serialdir. Her $x \in U$ noktasının ardıl komşulukları Tablo 10 da verilmiştir.

Tablo 10. Her $x \in U$ noktasının ardıl komşulukları

U	a	b	c	d	e
R_s	$\{a, b, c\}$	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{d, e\}$

U_(x∈U)▒〖R_s (x)=U〗 oduğundan S_R={R_s (x) :x∈U}={{a,b,c},{c,d},{d,e}} ailesi U kümesi üzerindeki topolojinin alttabanıdır, U kümesi üzerinde tanımlanan diğer ters serial bağıntılar da aynı topolojiyi üretirler. Örneğin,
R={(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,c),(c,d),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)} bağıntısı ters serialdir. Bu ters serial bağıntı ve önceki ters serial bağıntı ile üretilen topolojiler aynıdır.

Bir R⊆U×U bağıntısı ters serial olmasın. Bu durumda S_R ailesinin U kümesi üzerindeki harhangi bir topoloji için bir alttaban olması gerekmez. Örneğin, U={a,b,c,d} kümesi üzerinde R={(b,c),(b,d),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)} bağıntısı verilsin. R bağıntısı ters serial değildir. U_(x∈U)▒〖R_s (x)≠U〗 olduğundan S_R={{b,c,d}} ailesi U kümesi üzerindeki bir topoloji için alttaban oluşturmaz.

Her yansımalı bağıntı ters serialdir. O halde yansımalı bağıntıdan indirgenen topoloji τ ile ters serial bağıntıdan indirgenen topoloji ϑ ile gösterilirse aralarında τ⊆ϑ ilişkisi vardır. Bir başka ifadeyle, ters serial bağıntıdan indirgenen topoloji, yansımalı bağıntıdan indirgenen topolojiden daha incedir. Gerçekten, U={a,b,c} kümesi üzerinde R={(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)} yansımalı bağıntısı tarafından indirgenen topolojinin τ={ U,∅,{c},{a,b} } ailesi olduğunu Örnek 3 de gösterilmişti. R bağıntısı ters serial olduğundan, S_R={{a,b},{b},{c}} ailesini alttaban olarak kabul eden topoloji $\vartheta=\{U,\emptyset,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,b\}\}$ ailesidir. Böylece $\tau\subseteq\vartheta$ olduğu görülür.

U kümesi üzerinde yansımalı olan bir R bağıntısı verildiğinde R nin geçişli kapanışı da yansımalıdır. Önemli bir sonuç olarak; yansımalı bağıntısından indirgenen topoloji ile aynı bağıntının geçişli kapanışından indirgenen topoloji çakışır (Yu ve Zhan, 2014).

ÖRNEK 6 $U=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c)\}$ yansımalı bağıntısı tarafından indirgenen topolojiyi belirleyelim. Öncelikle her noktanın ardıl komşulukları $R_s(a)=\{a,b\}$, $R_s(b)=\{b,c\}$ ve $R_s(c)=\{c\}$ olarak bulunur. U kümesinin alt yaklaşımları kendisine eşit olan altkümeleri $U,\emptyset,\{c\}$,$\{b,c\}$ dir. O halde R yansımalı bağıntısından indirgenen topoloji $\tau=\{U,\emptyset,\{c\},\{b,c\}\}$ dir. Şimdi R bağıntısının geçişli kapanışını belirlemek için $R^2=R\circ R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$ bileşkesini hesaplayalım. $n\in N^+$ olmak üzere her $n\geq 3$ için $R^n=R^2$ olduğundan R bağıntısının geçişli kapanışı $t(R)=R\cup R^2\cup\ldots=R\cup R^2=R^2$ olur. Her noktanın geçişli kapanışa göre ardıl komşulukları $(t(R))_s(a)=\{a,b,c\}=U$, $(t(R))_s(b)=\{b,c\}$, $(t(R))_s(c)=\{c\}$ dir. Son olarak her altkümenin geçişli kapanışa göre alt yaklaşımları $\underline{R}(\emptyset)=\emptyset$, $\underline{R}(\{a\})=\emptyset$, $\underline{R}(\emptyset)=\emptyset$, $\underline{R}(\{b\})=\emptyset$, $\underline{R}(\{c\})=\{c\}$, $\underline{R}(\{a,b\})=\emptyset$, $\underline{R}(\{a,c\})=\{c\}$, $\underline{R}(\{b,c\})=\{b,c\}$, $\underline{R}(U)=U$ olur. O halde $\tau_{(t(R))}=\{U,\emptyset,\{c\},\{b,c\}\}$ ailesi R yansımalı bağıntısının geçişli kapanışından indirgenen topolojidir ve $\tau=\tau_{(t(R))}$ eşitliği elde edilir (Yu ve Zhan, 2014).

SONUÇLAR

Kaba küme teorisi ile topoloji gibi farklı doğrultularda gelişme gösteren matematiksel alanların aslında birbirlerine yakın olmanın ötesinde ortak noktalarının bulunduğu görülmektedir. Bir küme üzerinde tanımlanan bağıntıların sahip olduğu özelliklere göre, kaba kümeler ve topolojik yapılarda üstlendiği rolün önemi büyüktür. Pawlak yaklaşım uzayı denklik bağıntısı temeli üzerine kurulmuştur. Bir bağıntının denklik bağıntısı özelliklerini bulundurması clopen adı verilen ve elemanları hem açık hem de kapalı olan bir topolojinin varlığını göstermesi bakımından önemlidir. Pawlak yaklaşım uzayı topoloji yönünden incelendiğinde üzerinde clopen topolojisi olan düzgün uzay olduğu görülmüştür. Denklik bağıntısı yerine daha zayıf özellikleri bulunduran bir bağıntı alındığında genelleştirilmiş yaklaşım uzayları olarak adlandırılan yapılar elde edilir. Genelleştirilmiş yaklaşım uzaylarında bir kümenin alt yaklaşım ve üst yaklaşım kavramlarının bazı özelliklerinin Pawlak yaklaşımına göre kaybolduğu ya da sağlanmadığı görülmüştür. Yansımalı ve geçişli bir bağıntı için tanımlanabilir kümelerin ailesi bir topoloji oluşturmasına karşın bu topolojinin elemanlarının clopen olması gerekmediği bilinmektedir. Günümüz matematik dizininde her iki alanın ortak noktalarına yönelik araştırmalar yoğun olarak yapılmaktadır.

KAYNAKLAR

Bülbül, A. (2014) Genel Topoloji, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Kondo, M., Dudek, W. A. (2006). Topological structures of rough sets induced by equivalence relations. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*. 10 (5), 621-624.

Kondo, M. (2006). On the structure of generalized rough sets, *Information Sciences*. 176: 589–600.

Lashin, E., Kozae, A., Khadra, A. A., Medhat, T. (2005). Rough set theory for topological spaces, *International. Journal of Approximation. Reasoning*. 40 (12), 35–43.

Li, Z., Xie, T., Li, Q. (2012). Topological structure of generalized rough sets, *Comput. Math. Appl*. 63,1066–1071.

Pawlak, Z. (1982). Rough sets, *International Journal of Computer & Information Sciences* 11 (5): 341–356.

Pawlak, Z. (1991). Rough sets: theoretical aspects of reasoning about data, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Pawlak. Z. (2002). Rough sets and intelligent data analysis. *Information Sciences*.147, 1-12.

Pei, Z., Pei, D., Zhang L. (2011). Topology vs generalized rough sets. *International. Journal of Approximation. Reasoning* 52, 231-239.

Riki, M., Rezaei, H. (2014) Introduction of rough sets theory and application in data analysis. *Journal of Mathematics and Computer Scencesi*. 9, 25–32.

Skowron, A., Komorowski, J., Pawlak, Z., Polkowski, L. (2002) Rough sets perspective on data and knowledge. In Handbook of data mining and knowledge discovery, Oxford University Press Inc., 134-149.

Slimany, T. (2013). Application of rough set theory in data mining. *International Journal of Computer Sciences and Network Solutions.*1(3):1–10.

Suraj, Z. (2004). An introduction to rough set theory and its applications. ICENCO 2004, December 27-30, Cairo, Egypt, 1-39.

Swiniarski, R., Skowron, A. (2003) Rough set methods in feature selection and recognition. *Pattern Recognition Letters,* 24, 833–849.

Tsumoto, S. (2004). Mining diagnostic rules from clinical databases using rough sets and medical diagnostic model. *Information Sciences.* 162 (2), 65–80.

Vlach, M. (2008). Algebraic and topological aspects of rough set theory. *Fourth International Workshop on Computational Intelligence & Applications*, IEEE SMC Hiroshima Chapter, Hiroshima University, Japan, December 10-11.

Yang, L., Xu, L. (2011). Topological properties of generalized approximation spaces. *Information Sciences.* 181: 3570-3580.

Yao, Y. Y. (1996). Two views of the theory of rough sets in finite universes, *International Journal of Approximate Reasoning.* 15 (4): 291–317.

Yao, Y. Y. (1998a). Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets, *Information Sciences* 109: 21–47.

Yao, Y. Y. (1998b). Relational interpretational of neighborhood operators and rough set approximation operators, *Information Sciences* 111: 239–259.

Yao, Y. Y. (2003). On generalizing rough set theory. Proc. *Int. Conf. Rough Sets Fuzzy Sets Data Min. Graul. Comput.* 44-51.

Yu, Z. and Zhan, W. (2014). On the topological properties of generalized rough sets. *Information Sciences.* 263:141-152.

Zhu, W. (2007a). Generalized rough sets based on relations, *Information Sciences.* 177: 4997-5011.

Zhu, W. (2007b). Topological approaches to covering rough sets, *Information Sciences.* 177: 1499-1508.

Zhu, W. (2009). Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering, *Information Sciences* 179: 210–225.