Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 22, Sayı 3, 1276-1282, 2018

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 22, Issue 3, 1276-1282, 2018

DOI: 10.19113/sdufenbed.503873

Öklid Uzayında Sabit Oranlı Bertrand Eğrileri

Serkan ÖZTÜRK*[1], Melek ERDOĞDU[2]

[1]Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, 42090, Konya
[2]Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik – Bilgisayar Bilimleri Bölümü, 42090, Konya

(Alınış / Received: 15.01.2018, Kabul / Accepted: 05.12.2018, Online Yayınlanma / Published Online: 27.12.2018)

Anahtar Kelimeler
Öklid uzayı,
Burulmuş eğri,
T – sabit eğri,
N – sabit eğri,
Sabit oranlı eğri,
Bertrand eğri

Özet: Bu çalışmada, $\mathbb{R}^3$ uzayında sabit oranlı Bertrand eğri çiftleri ele alınmıştır. Sabit oranlı eğrileri tanıtıp ve bunların bazı karakterizasyonları ifade edilmiştir. Bununla birlikte burulmuş (twisted) eğrisi, W eğrisi, T- sabit ve N- sabit eğrisi üzerine çalışılmıştır. Ayrıca bir W eğrisini, eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarına bağlı diferansiyellenebilir fonksiyonlar cinsinden nasıl ifade edildiği ispatlanmıştır. Bu ifade edilişin sonucu olarak sabit oranlı Bertrand eğri çiftleri ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, hem N- sabit hem de birinci türden T- sabit olan düzlemsel bir eğrinin Bertrand eğri çiftinin de T- sabit ve N- sabit olabileceği ispatlanmıştır.

Constant – Ratio Bertrand Curves in Euclidean Space

Keywords
Euclidean space,
Twisted curve,
T-constant curve,
N-constant curve,
Constant ratio curve,
Bertrand curve

Abstract: In this study, we investigate contant ratio Bertrand curves in $\mathbb{R}^3$. The constant ratio curves are introduced and their characterzations are stated. Then, twisted curve, W curve, T-constant curve and N-constant curve are studied. Moreover, it is proved that how to express W-curves in terms of differentiable functions depending on the curvature and torsion of curve. As a conclusion of this expression, some results are obtained on constant ratio Bertrand curves. Finally, it is proved that Bertrand curve couple of a given either N- constant or first kind T-constant plane curve is also a T- constant and N-constant curve.

1. Giriş

Bu çalışmanın amacı, Öklid uzayında sabit oranlı Bertrand eğri çiftlerini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda; burulmuş (twisted) eğriler, W eğrileri, T- sabit ve N- sabit eğrileri ele alınmıştır. Burada $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisine, eğer eğrilik ve burulma fonksiyonları sıfırdan farklı ise burulmuş eğri; sabit ise W eğrisi adı verilir. Eğer α'nın teğet bileşenin uzunluğu (normal bileşenin uzunluğu) sabit ise α eğrisine T-sabit (N-sabit) eğrisi denir. Ayrıca bu sabit değer sıfır olursa eğri, birinci türden T-sabit (birinci türden N-sabit), diğer durumlarda ikinci türden olarak adlandırılır [1].

[1] çalışmasında, Öklid uzayında sabit oranlı eğriler ile bunların bazı karakterizasyonları ifade edilmiştir. Ayrıca Öklid uzayının alt manifoldlarında sabit oranlı eğrilerin tanımı verilmiş [2] ve Riemann yüzeyleri ele alınmıştır [3]. Buna ek olarak [4] çalışmasında Öklid uzayında rektifiyan eğriler ile burulmuş eğriler arasındaki ilişki ele alınmıştır. Bu çalışmanın devamı olarak rektifiyan eğrilerin bazı geometrik özelliklerine yer verilmiştir [5]. Ayrıca [6] çalışmasında üç boyutlu kompakt Lie gruplarında rektifiyan, normal ve oskülatör eğriler çalışılmıştır. Diğer yandan $\mathbb{R}^m$'de ardışık eğrilikleri oranı sabit olan eğriler ele alınmıştır [7].

2. Temel Bilgiler

Bu kısımda, Öklid uzayında birim hızlı olmayan eğriler ve Bertrand eğri çiftleri ile ilgili temel ifadelere değinilecektir.

2.1. Birim Hızlı Olmayan Eğriler İçin Frenet Formülleri

Tanım 2.1.1. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ bir regüler eğri olmak üzere α'nın yay parametresi ile ifade edilen birim hızlı eğrisi $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ olsun. γ eğrisinin Frenet elemanları ile eğrilikleri $T_\gamma, N_\gamma, B_\gamma, \kappa_\gamma$ ve τ_γ olarak verilsin. O halde

$$T(t) = T_\gamma\big(s(t)\big), N(t) = N_\gamma\big(s(t)\big), \quad (1)$$

$$B(t) = B_\gamma\big(s(t)\big), \kappa(t) = \kappa_\gamma\big(s(t)\big), \quad (2)$$

*İlgili yazar: ozturkserkan42@gmail.com

$$\tau(t) = \tau_\gamma\left(s(t)\right) \qquad (3)$$

tanımlanır. Bundan dolayı α'nın Frenet elemanları γ birim hızlı eğrisinin yeniden parametrelendirilmesidir. ($\frac{d}{dt} = " \,' "$ şeklinde gösterilir). Ayrıca $\alpha(t) = \gamma\big(s(t)\big)$ olmak üzere, eşitliğin t parametresine göre türevi

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\gamma}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \qquad (4)$$

$$\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| = \left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\| \cdot \frac{ds}{dt} \qquad (5)$$

$$\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| = \frac{ds}{dt} = V \qquad (6)$$

olur. Yani V, α eğrisinin bir hız fonksiyonudur. Son olarak α eğrisinin Frenet vektörleri ve formülleri ise

$$T = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}, \qquad N = B \times T, \qquad (7)$$

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}, \qquad (8)$$

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}, \qquad (9)$$

$$\tau = \frac{det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \qquad (10)$$

ve

$$T' = V\kappa N \qquad (11)$$

$$N' = -V\kappa T + V\tau B \qquad (12)$$

$$B' = -V\tau N \qquad (13)$$

şeklinde ifade edilir [8, 9, 10].

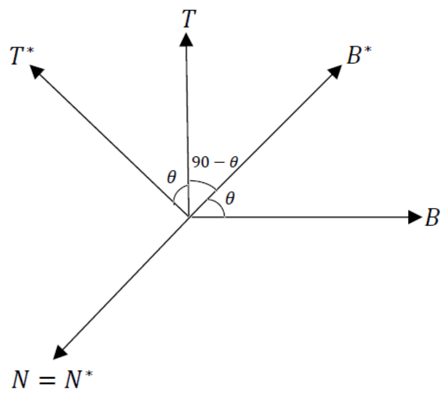
2.2. Bertrand Eğri Çiftleri

Tanım 2.2.1. Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha^*: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha^*(s)$ noktası ile $\alpha(s)$ noktasını birleştiren doğru, α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki asli normalini ve α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normalini kapsıyorsa, α^* eğrisi α eğrisi ile Bertrand eğri çifti oluşturuyor denir [8, 9, 10].

α^* eğrisi α eğrisi ile Bertrand eğri çifti belirtiyorsa, h sabit bir sayı olmak üzere α^* eğrisi

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s) \qquad (14)$$

biçimindedir. Ayrıca α eğrisinin Bertrand eğri çifti olan α^* eğrisinin Frenet vektör alanları sırasıyla $\{T(s), B(s), N(s)\}$ ve $\{T^*(s), N^*(s), B^*(s)\}$ olmak üzere



Şekil 1. α^* eğrisinin Frenet vektör alanları

$$T^*(s) = T(s)\cos\theta - B(s)\sin\theta, \qquad (15)$$
$$N^*(s) = N(s), \qquad (16)$$
$$B^*(s) = T(s)\sin\theta + B(s)\cos\theta \qquad (17)$$

şeklinde ifade edilir. Burada θ; T ile T^* arasındaki açıdır ve sabittir. Son olarak α^* eğrisinin eğrilik ve burulması ise

$$\kappa^* = \frac{h\kappa - (\sin\theta)^2}{h(1 - h\kappa)}, \qquad (18)$$

$$\tau^* = \frac{1}{h^2\tau}(\sin\theta)^2 \qquad (19)$$

dir. Ayrıca τ ve τ^* aynı işaretlidir.

3. Öklid Uzayında Sabit Oranlı Eğriler

Tanım 3.1. [1] $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eğrisi ve $\kappa(s) > 0$ verilsin. Eğer $\frac{\|\alpha^T\|}{\|\alpha^N\|}$ oranı sabit ise $\alpha(s)$ eğrisine sabit oranlı eğri denir.

Buna ek olarak, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir α eğrisinin sabit oranlı olması için gerek ve yeter şart $\alpha^T = 0$ ya da $\frac{\|\alpha^T\|}{\|\alpha\|}$ oranının sabit olmasıdır.

Chen, 2001'deki çalışmasında, $m_0(s)$, $m_1(s)$, $m_2(s)$ birer diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere her $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ burulmuş eğrisinin

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \qquad (20)$$

şeklinde yazılabileceğini ifade etmiştir [2].

Bu kısımda birim hızlı olmayan burulmuş eğrilerin eğrilik fonksiyonları cinsinden karakterize edilmiş hali verilecektir. Bunun için her $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı olmayan burulmuş eğrisinin (20) ile verilen eşitlikle ifade edildiğini kullanacağız. Bu eşitliğin her iki tarafının s yay uzunluğu parametresine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s) = \big(m_0'(s) - m_1(s)V\kappa(s)\big)T(s) + \big(m_1'(s) + m_0(s)V\kappa(s) - m_2(s)V\tau(s)\big)N(s) + \big(m_2'(s) + m_1(s)V\tau(s)\big)B(s) \quad (21)$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$m_0'(s) - m_1(s)V\kappa(s) = V, \quad (22)$$

$$m_1'(s) + m_0(s)V\kappa(s) - m_2(s)V\tau(s) = 0, \quad (23)$$

$$m_2'(s) + m_1(s)V\tau(s) = 0 \quad (24)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $V = 1$ ve birim hızlı olmayan eğriler için (22-24) ile verilen eşitlikler yeniden düzenlenirse

$$m_0'(s) - \kappa(s)m_1(s) = 1, \quad (25)$$

$$m_1'(s) + \kappa(s)m_0(s) - \tau(s)m_2(s) = 0, \quad (26)$$

$$m_2'(s) + \tau(s)m_1(s) = 0 \quad (27)$$

İfadeleri elde edilir.

Önerme 3.1. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş eğrisi verilsin. α bir W- eğrisi ise pozisyon vektörü $\alpha(s)$

$$m_0(s) = c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \tfrac{\tau^2}{a^2}s, \quad (28)$$

$$m_1(s) = c_1 a\sin(as) + c_2 a\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (29)$$

$$m_2(s) = c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \tfrac{\kappa\tau}{a^2}s \ (30) \quad (30)$$

diferansiyellenebilir fonksiyonları ile ifade edilir. Burada c_i $(0 \le i \le 2)$ reel sabitler ile $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ dir.

İspat. α bir burulmuş W- eğrisi ve $\kappa, \tau \in \mathbb{R}$ olsun. O halde (25-27)'de verilen diferansiyel denklemin katsayıları sabittir ve

$$\begin{bmatrix} m_0'(s) \\ m_1'(s) \\ m_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0(s) \\ m_1(s) \\ m_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu diferansiyel denklemin homojen çözümü

$$X_h(s) = c_0\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} + d_1\begin{pmatrix} -\kappa\cos(as) \\ a\sin(as) \\ \tau\cos(as) \end{pmatrix} + d_2\begin{pmatrix} -\kappa\sin(as) \\ -a\cos(as) \\ \tau sin(as) \end{pmatrix} + d_3\begin{pmatrix} -\kappa\cos(as) \\ a\sin(as) \\ \tau\cos(as) \end{pmatrix} + d_4\begin{pmatrix} \kappa\sin(as) \\ a\cos(as) \\ -\tau\sin(as) \end{pmatrix} \quad (32)$$

olarak elde edilir. Burada c_0, d_1, d_2, d_3 ve d_4 birer sabittir ve $a = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ dir.

$$d_1 + d_3 = c_1, \quad (33)$$

$$d_4 - d_2 = c_2 \quad (34)$$

olmak üzere homojen çözüm düzenlenirse

$$X_h(s) = c_0\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix} -\kappa\cos(as) \\ a\sin(as) \\ \tau\cos(as) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \kappa\sin(as) \\ a\cos(as) \\ -\tau\sin(as) \end{pmatrix} \quad (35)$$

eşitliği elde edilir. Özel çözüm için temel matrisi

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} \tau & -\kappa\cos(as) & \kappa\sin(as) \\ 0 & a\sin(as) & a\cos(as) \\ \kappa & \tau\cos(as) & -\tau\sin(as) \end{pmatrix} \quad (36)$$

şeklinde yazılabilir. (25-27) diferansiyel denkleminin özel çözümünü bulmak için

$$X_p(s) = \varphi(s)u(s) \quad (37)$$

eşitliğinden yararlanırsak, burada $u(s)$ vektörü

$$\varphi(s)u'(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

eşitliğiyle bulunur. O halde elde edilen 3×3 lineer denklem sisteminin çözümü

$$u_1'(s) = \tfrac{\tau}{a^2}, \quad (39)$$

$$u_2'(s) = -\tfrac{\kappa\cos(as)}{a^2}, \quad (40)$$

$$u_3'(s) = \tfrac{\kappa\sin(as)}{a^2} \quad (41)$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$u_1(s) = \frac{\tau}{a^2}s, \quad (42)$$

$$u_2(s) = -\frac{\kappa\sin(as)}{a^3}, \quad (43)$$

$$u_3(s) = -\frac{\kappa\cos(as)}{a^3} \quad (44)$$

ifadeleri elde edilir. O halde sistemin özel çözümü

$$X_p(s) = \begin{pmatrix} \frac{\tau^2}{a^2}s \\ \frac{-\kappa}{a^2} \\ \frac{\kappa\tau}{a^2}s \end{pmatrix} \quad (45)$$

olduğundan

$$m_0(s) = c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s, \quad (46)$$

$$m_1(s) = c_1 a\sin(as) + c_2 a\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (47)$$

$$m_2(s) = c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2} \quad (48)$$

olduğu görülür .

4. Öklid Uzayında Sabit Oranlı Bertrand Eğri Çiftleri

Teorem 4.1. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş eğrisi verilsin, öyle ki bu eğri

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (49)$$

şeklinde ifade edilsin. α eğrisinin Bertrand çifti olan α^* eğrisi

$$\alpha^*(s) = m_0{}^*(s)T^*(s) + m_1{}^*(s)N^*(s) + m_2{}^*(s)B^*(s) \quad (50)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $m_0{}^*$, $m_1{}^*$ ve $m_2{}^*$

$$m_0{}^*(s) = m_0(s)\cos\theta - m_2(s)\sin\theta, \quad (51)$$

$$m_1{}^*(s) = m_1(s) + h, \quad (52)$$

$$m_2{}^*(s) = m_0(s)\sin\theta + m_2(s)\cos\theta \quad (53)$$

şeklinde diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

İspat. α^* eğrisi, α eğrisinin Bertrand eğri çifti ise

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s) \quad (54)$$

şeklinde yazılır. Tanım 2.2.1 ile verilen α^* eğrisinin Frenet vektörleri (50)'de yerine yazılırsa

$$\alpha^*(s) = m_0{}^*(s)\big(\cos\theta\, T(s) - \sin\theta\, B(s)\big) + m_1{}^*(s)N(s) + m_2{}^*(s)\big(\sin\theta\, T(s) + \cos\theta\, B(s)\big) \quad (55)$$

$$\alpha^*(s) = T(s)(m_0{}^*(s)\cos\theta + m_2{}^*(s)\sin\theta) + N(s)m_1{}^*(s) + B(s)(-m_0{}^*(s)\sin\theta + m_2{}^*(s)\cos\theta) \quad (56)$$

olur. Diğer taraftan (49) eşitliği (54) de yerine yazılırsa

$$\alpha^*(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B + hN(s) \quad (57)$$

$$\alpha^*(s) = m_0(s)T(s) + (m_1(s) + h)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (58)$$

bulunur. Daha sonra (56) ve (58) ifadelerinden

$$m_0(s) = m_0{}^*(s)\cos\theta + m_2{}^*(s)\sin\theta, \quad (59)$$

$$m_1(s) = m_1{}^*(s) - h, \quad (60)$$

$$m_2(s) = -m_0{}^*(s)\sin\theta + m_2{}^*(s)\cos\theta \quad (61)$$

olduğu görülür. Buradan

$$m_0{}^*(s) = m_0(s)\cos\theta - m_2(s)\sin\theta, \quad (62)$$

$$m_1{}^*(s) = m_1(s) + h, \quad (63)$$

$$m_2{}^*(s) = m_0(s)\sin\theta + m_2(s)\cos\theta \quad (64)$$

eşitlikleri elde edilir.

□

Teorem 4.2. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı burulmuş bir W-eğrisi

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (65)$$

eğrisinin Bertrand çifti

$$\alpha^*(s) = m_0{}^*(s)T^*(s) + m_1{}^*(s)N^*(s) + m_2{}^*(s)B^*(s) \quad (66)$$

olsun. Bu durumda $m_0{}^*$, $m_1{}^*$ ve $m_2{}^*$ ifadeleri

$$m_0{}^*(s) = c_0(\tau\cos\theta - \kappa\sin\theta) + (\tau\sin\theta + \kappa\cos\theta)(c_2\sin(as) - c_1\cos(as)) + \frac{\tau^2}{a^2}s\cos\theta - \frac{\kappa\tau}{a^2}s\sin\theta, \quad (67)$$

$$m_1{}^*(s) = ac_1\sin(as) + ac_2\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2} + h, \quad (68)$$

$$m_2{}^*(s) = c_0(\tau\sin\theta + \kappa\cos\theta) + (\tau\cos\theta - \kappa\sin\theta)(c_1\cos(as) - c_2\sin(as)) + \frac{\tau^2}{a^2}s\sin\theta + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\cos\theta \quad (69)$$

şeklinde bulunur.

İspat. Önerme 3.1'de bilinen $m_0(s)$, $m_1(s)$ ve $m_2(s)$ değerler (51-53) ile verilen eşitliklerde yerine yazılırsa,

$$m_0{}^* = \cos\theta\left(c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s\right) - \sin\theta\left(c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\right), \quad (70)$$

$$m_1{}^* = ac_1\sin(as) + ac_2\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2} + h, \quad (71)$$

$$m_2{}^* = \sin\theta\left(c_0\tau - c_1\kappa\cos(as) + c_2\kappa\sin(as) + \frac{\tau^2}{a^2}s\right) + \cos\theta\left(c_0\kappa + c_1\tau\cos(as) - c_2\tau\sin(as) + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\right) \quad (72)$$

ifadeleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$m_0{}^*(s) = c_0(\tau\cos\theta - \kappa\sin\theta) + (\tau\sin\theta + \kappa\cos\theta)(c_2\sin(as) - c_1\cos(as)) + \frac{\tau^2}{a^2}s\cos\theta - \frac{\kappa\tau}{a^2}s\sin\theta, \quad (73)$$

$$m_1{}^*(s) = ac_1\sin(as) + ac_2\cos(as) - \frac{\kappa}{a^2} + h, \quad (74)$$

$$m_2{}^*(s) = c_0(\tau\sin\theta + \kappa\cos\theta) + (\tau\cos\theta - \kappa\sin\theta)(c_1\cos(as) - c_2\sin(as)) + \frac{\tau^2}{a^2}s\sin\theta + \frac{\kappa\tau}{a^2}s\cos\theta \quad (75)$$

olduğu görülür.

□

Teorem 4.3. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (76)$$

Şeklinde verilsin. α eğrisinin Bertrand çifti α^* olmak üzere bu eğrinin, eğrilik ve burulması

$$(m_1(s) + h)\kappa^*(s) = \frac{1}{V^*}\left[\tau(s)m_1(s)\sin\theta + \left(1 + \kappa(s)m_1(s)\right)\cos\theta - V^*\right], \quad (77)$$

$$(m_1(s) + h)\tau^*(s) = \frac{1}{V^*}\left[\tau(s)m_1(s)\cos\theta - \left(1 + \kappa(s)m_1(s)\right)\sin\theta\right] \quad (78)$$

şeklinde verilir. Burada

$$V^* = \sqrt{(1 - \kappa(s)h)^2 + (\tau(s)h)^2} \quad (79)$$

α^* eğrisinin hız fonksiyonudur.

İspat. α eğrisinin Bertrand eğri çifti olan α^* eğrisi

$$\alpha^*(s) = m_0{}^*(s)T^*(s) + m_1{}^*(s)N^*(s) + m_2{}^*(s)B^*(s) \quad (80)$$

şeklinde yazılabilir. (51-53)'deki eşitliklerin yay uzunluğu parametresine göre türevi

$$m_0{}^{*\prime}(s) = m_0{}'(s)\cos\theta - m_2{}'(s)\sin\theta, \quad (81)$$

$$m_1{}^{*\prime}(s) = m_1{}'(s), \quad (82)$$

$$m_2{}^{*\prime}(s) = m_0{}'(s)\sin\theta + m_2{}'(s)\cos\theta \quad (83)$$

olur. Bulunan bu türevleri (22-24) ile verilen eşitlikte yerine yazılırsa

$$m_0{}'(s)\cos\theta - m_2{}'(s)\sin\theta - m_1{}^*(s)V^*\kappa^*(s) = V^*, \quad (84)$$

$$m_0{}'(s)\sin\theta + m_2{}'(s)\cos\theta + m_1{}^*(s)V^*\tau^*(s) = 0 \quad (85)$$

bulunur. Daha sonra $m_1{}^*(s) = m_1(s) + h$ olduğundan

$$m_0{}'(s)\cos\theta - m_2{}'(s)\sin\theta - (m_1(s) + h)V^*\kappa^*(s) = V^*, \quad (86)$$

$$m_0{}'(s)\sin\theta + m_2{}'(s)\cos\theta + (m_1(s) + h)V^*\tau^*(s) = 0 \quad (87)$$

olur. (25-27) ile verilen ifadeleri son eşitliklerde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(m_1(s) + h)\kappa^*(s) = \frac{1}{V^*}\left[\tau(s)m_1(s)\sin\theta + \left(1 + \kappa(s)m_1(s)\right)\cos\theta - V^*\right], \quad (88)$$

$$(m_1(s) + h)\tau^*(s) = \frac{1}{V^*}\left[\tau(s)m_1(s)\cos\theta - \left(1 + \kappa(s)m_1(s)\right)\sin\theta\right] \quad (89)$$

olduğu görülür.

□

Teorem 4.4. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ bir T- sabit düzlemsel eğri olsun, öyle ki

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (90)$$

şeklinde ifade edilsin. Buna göre α eğrisinin Bertrand eğri çifti

$$\alpha^*(s) = m_0{}^*(s)T^*(s) + m_1{}^*(s)N^*(s) + m_2{}^*(s)B^*(s) \quad (91)$$

de bir T- sabit eğrisidir.

İspat. α eğrisi düzlemsel bir eğri olduğundan $\tau = 0$ dır. O halde (27) eşitliğinden

$$m_2{}'(s) = 0 \quad (92)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$m_0{}^*(s) = m_0(s)\cos\theta - m_2(s)\sin\theta \quad (93)$$

eşitliğinin yay uzunluğu parametresine göre türevi,

$$m_0{}^{*\prime}(s) = m_0{}'(s)\cos\theta - m_2{}'(s)\sin\theta \quad (94)$$

olur. α eğrisi birinci veya ikinci türden bir T- sabit eğri olduğundan $m_0{}'(s) = 0$ dır. Buradan da

$$m_0{}^{*\prime}(s) = -m_2{}'(s)\sin\theta \quad (95)$$

bulunur. Buradan

$$m_0{}^{*\prime}(s) = 0 \Rightarrow m_0{}^*(s) = c \quad (96)$$

elde edilir. Sonuç olarak α^* eğrisi de bir T- sabit eğri olur.

□

Örnek 4.1.

$$\alpha(s) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sin(\sqrt{3}s), \sqrt{2}, \cos(\sqrt{3}s)\right) \quad (97)$$

şeklinde verilen eğri, birinci türden T- sabit düzlemsel bir eğri ise Bertrand eğri çifti olan

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s) \quad (98)$$

eğrisi de birinci türden bir T- sabit eğridir. Gerçekten $\|\alpha'(s)\| = 1$ olduğundan α eğrisi birim hızlı bir eğridir. Bu eğrinin Frenet aparatları

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(\cos(\sqrt{3}s), 0, \sin(\sqrt{3}s)\right), \quad (99)$$

$$N(s) = \left(-\sin(\sqrt{3}s), 0, \cos(\sqrt{3}s)\right), \quad (100)$$

$$B(s) = (0, -1, 0), \quad (101)$$

$$\kappa(s) = \sqrt{3}, \tau(s) = 0 \quad (102)$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan α eğrisi

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (103)$$

şeklinde yazıldığında

$$m_0(s) = 0 \quad (104)$$

olur. Dolayısıyla α eğrisi birinci türden düzlemsel bir T- sabit eğridir. Bu eğrinin Bertrand eğri çifti

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + hN(s), \quad (105)$$

$$\alpha^*(s) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sin(\sqrt{3}s), h + \sqrt{2}, \cos(\sqrt{3}s)\right) \quad (106)$$

şeklinde olup, yay uzunluğu parametresine göre türevi

$$\alpha^{*\prime}(s) = \left(\cos(\sqrt{3}s), 0, -\sin(\sqrt{3}s)\right) \quad (107)$$

olur. Ayrıca $\|\alpha^{*\prime}(s)\| = 1$ olduğundan

$$\alpha^{*\prime}(s) = T(s) \quad (108)$$

dir. Öte yandan α^* eğrisi

$$\alpha^*(s) = m_0{}^*(s)T^*(s) + m_1{}^*(s)N^*(s) + m_2{}^*(s)B^*(s) \quad (109)$$

şeklinde olduğundan

$$m_0{}^*(s) = 0 \quad (110)$$

elde edilir. Dolayısıyla, birinci türden düzlemsel bir T- sabit eğrinin Bertrand eğri çiftinin de birinci türden düzlemsel bir T- sabit eğri olduğu görülür.

Teorem 4.5. $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi N - sabit ve birinci türden T- sabit düzlemsel bir eğri olsun, öyle ki bu eğri

$$\alpha(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N(s) + m_2(s)B(s) \quad (111)$$

şeklinde yazılabilir. α eğrisinin Bertrand eğri çifti olan

$$\alpha^*(s) = m_0{}^*(s)T^*(s) + m_1{}^*(s)N^*(s) + m_2{}^*(s)B^*(s) \quad (112)$$

eğrisi de bir T- sabit ve N- sabit eğri olur. $(\kappa(s) > 0)$.

İspat. α birinci türden T- sabit düzlemsel bir eğri ise Teorem 4.4 den T- sabit eğri olduğu gösterildi. Şimdi ise N- sabit düzlemsel olan bir eğrinin Bertrand eğri çiftinin de N- sabit olduğunu gösterelim:

α eğrisi düzlemsel bir eğri olduğundan $\tau = 0$. Bu durumda (27) eşitliğinden

$$m_2{}'(s) = 0 \quad (113)$$

olur. Diğer taraftan α eğrisi hem birinci türden T- sabit hem de N- sabit ise

$$m_0(s) = 0, \quad (114)$$

$$m_1(s)m_1{}'(s) + m_2(s)m_2{}'(s) = 0 \quad (115)$$

olur. $m_2{}'(s) = 0$ olduğundan

$$m_1(s)m_1{}'(s) = 0 \quad (116)$$

bulunur. Diğer yandan $m_1{}'(s) = -\kappa(s)m_0(s)$ olduğundan

$$m_1(s)\kappa(s)m_0(s) = 0 \quad (117)$$

elde edilir. Öte yandan α^* eğrisinin N- sabit bir eğri olması için

$$m_1{}^*(s)\left(m_1{}^*(s)\right)' + m_2{}^*(s)\left(m_2{}^*(s)\right)' = 0 \quad (118)$$

eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz. (51-53) ve (81-83) deki ifadeler yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} m_1{}^*(s)m_1{}^{*\prime}(s) + m_2{}^*(s)m_2{}^{*\prime}(s) &= \\ \left(h + m_1(s)\right)m_1{}'(s) &+ \\ (m_0(s)\sin\theta + m_2(s)\cos\theta)& \\ (m_0{}'(s)\sin\theta + m_2{}'(s)\cos\theta)& \end{aligned} \quad (119)$$

$$\begin{aligned} m_1{}^*(s)m_1{}^{*\prime}(s) + m_2{}^*(s)m_2{}^{*\prime}(s) &= \\ \left(h + m_1(s)\right)\left(-\kappa(s)m_0(s)\right) &+ \\ (m_0(s)\sin\theta + m_2(s)\cos\theta)m_0{}'(s)& \end{aligned} \quad (120)$$

bulunur. $m_0(s) = 0$ olduğundan

$$m_1{}^*(s)\left(m_1{}^*(s)\right)' + m_2{}^*(s)\left(m_2{}^*(s)\right)' = 0 \quad (121)$$

elde edilir. Sonuç olarak α^* eğrisi de N- sabit bir eğri olur.

Kaynakça

[1] Gürpınar, S., Arslan, K. and Öztürk, G. 2014. A Characterization of Constant-Ratio Curves in

Euclidean 3-Space $\mathbb{R}^3$. *arXiv:1410.5577v1 [math.DG]*, (2014), 1-10.

[2] Chen, B. Y., 2001. Constant ratio Hypersurfaces, *Soochow J. Math.,* 27, (2001), 353-362.

[3] Chen, B. Y., 2003. More on convolution of Riemannian manifolds, *Beitrage Algebra Geom.*, 44, (2003), 9-24.

[4] Chen, B. Y., 2003. When does the position vector of space curve always lies in its rectifying plane?, *Amer. Math. Montly*, 110, (2003), 147-152.

[5] Chen, B. Y. and Dillen F., 2005. Rectifying curves as centrodes and extremal curves, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica*, 33, (2005), 77-90.

[6] Bozkurt, Z., Gök, I. and Ekmekçi, F. N., 2013. Characterization of rectifying, normal and osculating curves in there dimensional compact Lie groups, *Life Sci.*, 10, (2013), 353-362.

[7] Öztürk, G., Arslan, K. and Hacısalihoğlu, H., 2008. A characterization of ccr-curves in $\mathbb{R}^n$, *Proc. Estonian Acad. Sciences,* 57, (2008), 217-224.

[8] Do Cormo, M. P. 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice – Hall, New Jersey, 511s.

[9] Sabuncuoğlu, A., 2014. Diferensiyel Geometri, *Nobel,* Ankara-Türkiye, 514s.

[10] Yüce, S., 2017. Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri, PEGEM AKADEMİ Ankara-Türkiye, 557s.

[11] Edwards, C.H., Penney, D.E., 2004 . Differential Equations and Boundry Value Problems, Computing and Modelling, PRENTICE HALL, New Jersey, 787s.