Minkowski 3-Uzayında Null ve Pseudo-null Tzitzeica Eğrileri

1. Özgül ÖZERDEM
Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya/TÜRKİYE
(ozgul.ozerdem@ogr.konya.edu.tr)

2. Melek ERDOĞDU
Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi, Konya/TÜRKİYE
(merdogdu@konya.edu.tr)

Özet

Minkowski 3-uzayında null olmayan eğriler için Tzitzeica eğrisi olma şartı yeniden formülize edildi. Buna bağlı olarak null ve pseudo-null eğriler için de Tzitzeica eğrisi olma koşulu ifade edildi. Ayrıca; hiç bir null rektifiyan Tzitzeica eğrisi olmadığı, sabit burulmaya sahip hiç bir pseudo-null Tzitzeica eğrisi olmadığı ispatlanmıştır.

1. Giriş

Tzitzeica eğrisi; ilk olarak ünlü matematikçi Gheorghe Tzitzeica tarafından 1911 yılında

$$\frac{\tau}{d^2} = sbt$$

özelliğini sağlayan yeni bir uzay eğri sınıfı olarak tanımlanmıştır [1]. Burada τ; eğrinin burulma fonksiyonu olup d^2 ise eğrinin oskülatör düzleminin orjine olan uzaklığının karesidir ve $\tau/_{d^2}$ değeri sıfırdan farklı bir sabittir. Bu eğriler afin değişmez geometrik objelerin bilinen ilk örneklerindendir ve afin diferansiyel geometrinin temelini teşkil ederler. Bu sebepten Tzitzeica eğrileri üzerine pek çok çalışma mevcuttur [2].

Karacan ve Bükcü 2009' daki bu çalışmalarında E_1^3' te eliptik silindirik Tzitzeica eğrileri bir harmonik denklemin çözümüne bağlı olarak elde etmiştir. Ayrıca bir eğrinin spacelike, timelike veya null eliptik silindirik Tzitzeica eğrisi olma koşulları verilmiştir [3].

İlarslan ve Nesovic 2008' deki bu çalışmalarında asli normali N olmak üzere pozisyon vektörü $N^{\perp}$ ortogonal hiperdüzleminde yatan eğriler olarak E^4' teki rektifiyan eğrileri tanımlamıştır. Bunun yanında E^4' teki rektifiyan eğrilerin eğrilik fonksiyonları yardımıyla karakterizasyonu yapılmıştır [4].

İlarslan 2005' teki bu çalışmasında E_1^3' te spacelike, timelike ve null asli normale sahip spacelike normal eğrilerin bazı karakterizasyonunu vermiştir [5].

Chen 2003' teki bu makalesinde 3 boyutlu Öklid uzayında normal eğriler yani pozisyon vektörleri normal düzlemlerinde yatan eğrilerin küresel eğriler olduğu söylemiştir. Bununla birlikte E^3' te rektifiyan eğrilerin karakterizasyonu incelenmiştir [6].

Grabovic ve Nesovic 2012' deki bu çalışmalarında E_1^3' te bazı özel spacelike rektifiyan eğriler üzerinde çalışmıştır. Bu eğrilerin spacelike, timelike ve null düzlemlere izdüşümleri birer normal eğridir [7].

Crasmareanu 2002' deki bu çalışmasında E^3' te Tzitzeica koşulunu sağlayan eliptik ve hiperbolik silindirik eğriler harmonik denklemin çözümüne bağlı olarak ifade etmiştir [3,8].

Constantinescu ve Crasmareanu 2011' deki bu çalışmalarında $\mathbb{R}^n$' de Tzitzeica hiperyüzeylerinin parametrik, açık ve kapalı denklemlerinin üçü de elde etmiştir. Ayrıca R^3' te bazı Tzitzeica yüzeyi örnekleri verilmiştir [9].

Chen ve Dillen 2005' teki bu çalışmalarında E^3' te rektifiyan eğrilerin bazı geometrik özellikleri vermiştir [10].

Bobe ve arkadaşları 2012' deki bu çalışmalarında E_1^3' te ve Öklid 3 uzayında Tzitzeica eğri ve yüzeyleri merkez afin değişmezleri bakımından incelemiştir [11].

Bilici ve Çalışkan 2009' daki bu çalışmalarında E_1^3' te timelike binormale sahip spacelike eğrilerin involute eğrileri incelemiştir. Bu involutlerin spacelike ya da timelike binormale sahip birer spacelike eğri olduğu gösterilmiştir. İnvolute-evolute eğri çiftinin Frenet çatıları aralarındaki ilişki ve bu eğri çiftlerinin bazı yeni karakterizasyonu elde edilmiştir [12].

Bila 2012' deki bu çalışmasında E^3' te Tzitzeica eğri denklemini bir lineer olmayan diferansiyel denklem olarak ele alıp Tzitzeica eğrilerini yeniden analiz etmiştir [13].

Balgetir ve arkadaşları 2004' teki bu çalışmalarında E_1^3' te null Bertrand eğrileri ve karakterizasyonları Cartan çatısı ile incelemiştir [14].

Bu çalışmada, Minkowski 3-uzayındaTzitzeica eğrileri ele alınmıştır. Tzitzeica olma şartı yeniden yorumlanıp null ve pseudo-null eğriler için tanımlanmıştır. Yeni elde edilen tanıma bağlı olarak hiç bir null rektifiyan Tzitzeica eğrisi olmadığı, sabit burulmaya sahip hiç bir pseudo-null Tzitzeica eğrisi olmadığı ispatlanmıştır. Ayrıca Minkowski 3-uzayında null ve pseudo-null eğrilerin burulma fonksiyonuna dair yeni sonuçlar elde edilmiştir.

2.Minkowski 3-Uzayında Eğriler

$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L=-u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

ile tanımlanan çarpıma Lorentz çarpımı ve bu çarpım ile donatılmış $\mathbb{R}^3$ uzayına 3 boyutlu **Lorentz (Minkowski) uzayı** denir ve E_1^3 ile gösterilir. Tanımı gereği bu çarpım pozitif tanımlı değildir. Bunun yerine bu çarpım E_1^3'deki vektörleri aşağıdaki gibi sınıflara ayırır. $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\in E_1^3$ olmak üzere

i) $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_L>0$ veya $(\vec{u}=0)$ ise $\vec{u}$ vektörüne **spacelike vektör**

ii) $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_L<0$ ise $\vec{u}$ vektörüne **timelike vektör**

iii) $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_L=0$ ise $\vec{u}$ vektörüne **lightlike (null) vektör**

adı verilir. [15]

Her $\vec{u}\in E_1^3$ için $\vec{u}$ vektörünün normu

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{|\langle\vec{u},\vec{u}\rangle_L|}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L=0$ ise $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri diktir denir. Ayrıca her $\vec{u},\vec{v}\in E_1^3$ için

$$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle_L=-u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=u^TI^*v$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$I^*=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$\alpha: I\to E_1^3$, $\forall s\in I$ için $\alpha'(s)$ vektörü timelike vektör ise α eğrisine **timelike eğri**, $\forall s\in I$ için $\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\rangle_L=-1$ ise α' ya **birim hızlı timelike eğri** denir. $\forall s\in I$ için $\alpha'(s)$ vektörü spacelike bir vektör ise α eğrisine **spacelike eğri**, $\forall s\in I$ için $\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\rangle_L=1$ ise α' ya **birim hızlı spacelike eğri** adı verilir.

$\alpha: I\to E_1^3$, $\forall s\in I$ için $\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\rangle_L=0$ ve $\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\rangle_L>0$ ise α eğrisine **null eğri**, eğer $\langle\alpha''(s),\alpha''(s)\rangle_L=1$ ise α' ya **pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null eğri** denir. $\forall s\in I$ için $\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\rangle_L>0$ ve $\langle\alpha''(s),\alpha''(s)\rangle_L=0$ ise α eğrisine **pseudo-null eğri**, eğer $\langle\alpha'(s),\alpha'(s)\rangle_L=1$ ise α' ya **pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null eğri** denir. [15]

2.1. Null Olmayan Eğriler

$\alpha: I \to E_1^3$ birim hızlı bir timelike eğri olsun.

$$T(s) = \alpha'(s)$$

vektörü $\boldsymbol{\alpha}$ eğrisinin birim teğet vektörüdür.

$$T'(s) = \alpha''(s)$$

vektörü $T(s)$' e dik olup

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\sqrt{|\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle_L|}} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

vektörü α eğrisinin asli normal vektörüdür. Son olarak

$$B(s) = T(s) \times_L N(s)$$

ise α eğrisinin binormal vektörüdür. Burada α eğrisinin eğriliği ve burulma fonksiyonu

$$\kappa(s) = \sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle_L}$$

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle_L$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.1.1. Birim hızlı timelike $\alpha: I \to E_1^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere Frenet formülleri aşağıda verildiği gibidir:

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}.$$

$\alpha: I \to E_1^3$ birim hızlı bir spacelike eğri olsun. $T(s) = \alpha'(s)$ vektörü α eğrisinin birim teğet vektörüdür. [16]

$T(s)$ spacelike olduğundan $T'(s)$ spacelike ya da timelike olabilir.

1.Durum: $T'(s) = \alpha''(s)$ spacelike ise; bu durumda

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \sqrt{\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle_L}$$

olarak tanımlanır.

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

eğrinin asli normali olup

$$B(s) = T(s) \times_L N(s)$$

ise eğrinin binormal vektörüdür. Bu eğriler için burulma fonksiyonu

$$\tau(s) = -\langle N'(s), B(s)\rangle_L$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.2. Birim hızlı spacelike $\alpha: I \to E_1^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere Frenet formülleri;

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. [16]

2.Durum: $T'(s) = \alpha''(s)$ timelike ise; bu durumda

$$\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s)\rangle_L} = \sqrt{-\langle \alpha''(s), \alpha''(s)\rangle_L}$$

olmak üzere normal vektörü

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

şeklindedir.

$$B(s) = T(s) \times_L N(s)$$

spacelike bir vektördür. Eğrinin burulması ise $\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle_L$ olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.3. Birim hızlı spacelike $\alpha: I \to E_1^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere Frenet formülleri aşağıda verildiği gibidir:

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. [16]

2.2. Pseudo Yay Uzunluğu Parametresine Göre Verilmiş Null Eğriler

$\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine gore verilmiş bir null eğri olsun.

$$T(s) = \alpha'(s)$$

vektörü α eğrisinin teğet vektörüdür.

$$N(s) = \alpha''(s)$$

olup spacelike vektördür. B binormal vektör alanı ise α eğrisinin her $\alpha(s)$ noktasında $N(s)$' e dik olan tek null vektör alanıdır öyle ki

$$\langle T(s), B(s)\rangle_L = 1$$

dir. Burada α doğru ise $\kappa(s) = 0$ ve diğer durumlarda $\kappa(s) = 1$' dir. Ayrıca $\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle_L$' dır.

Teorem 2.2.1. $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine gore verilmiş bir null eğri, T, N, B Frenet vektör alanları olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ \tau(s) & 0 & -\kappa(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$\langle T(s), T(s)\rangle_L = \langle B(s), B(s)\rangle_L = \langle T(s), N(s)\rangle_L = \langle N(s), B(s)\rangle_L = 0$$

$$\langle N(s), N(s)\rangle_L = \langle T(s), B(s)\rangle_L = 1$$

olarak ifade edilir. [15]

2.3. Pseudo Yay Uzunluğu Parametresine Göre Verilmiş Pseudo-Null Eğriler

$\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine gore verilmiş bir pseudo-null eğri olsun.

$$T(s) = \alpha'(s)$$

vektörü α eğrisinin teğet vektörüdür.

$$N(s) = \alpha''(s)$$

olup null vektördür. B binormal vektör alanı ise α eğrisinin her $\alpha(s)$ noktasında $T(s)$ spacelike vektörüne dik olan tek null vektör alanıdır öyle ki

$$\langle N(s), B(s)\rangle_L = 1$$

dir. Burada α doğru ise $\kappa(s) = 0$ ve diğer durumlarda $\kappa(s) = 1$' dir. Ayrıca $\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle_L$.

Teorem 2.3.1. $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine gore verilmiş bir pseudo-null eğri, T, N, B Frenet vektör alanları olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ 0 & \tau(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$\langle N(s), N(s)\rangle_L = \langle B(s), B(s)\rangle_L = \langle T(s), N(s)\rangle_L = \langle T(s), B(s)\rangle_L = 0$$

$$\langle T(s), T(s)\rangle_L = \langle N(s), B(s)\rangle_L = 1$$

olarak ifade edilir [15].

3.Tzitzeica Eğrileri

Tanım 3.1. $\alpha: I \to E_1^3$ birim hızlı null olmayan bir eğri olmak üzere, her $s \in I$ için

$$\frac{\tau(s)}{\left(d(s)\right)^2} = c\ (sabit, c \neq 0)$$

ise α eğrisine **Tzitzeica eğrisi** adı verilir. Burada $\tau(s)$, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması; $d(s)$ ise α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzleminin orjine olan uzaklığıdır.

Ayrıca $\frac{\tau}{d^2} = sabit$ olması koşuluna **Tzitzeica eğrisi olma koşulu** adı verilir [17].

Teorem 3.1. $\alpha: I \to E_1^3$ yay uzunluğu parametresine gore verilmiş null olmayan bir eğri olsun.

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s)$$

olmak üzere

$$\frac{\tau(s)}{\left(d(s)\right)^2} = \frac{\tau(s)}{\left(f_2(s)\right)^2} = \frac{\tau(s)}{(\langle \alpha(s), B(s)\rangle_L)^2}$$

dir. Burada $f_0, f_1, f_2: I \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

İspat: $\alpha: I \to E_1^3$ birim hızlı timelike bir eğri olduğundan;

$$\alpha'(s) = T(s)$$

dir. Eşitliğinin türevi alınırsa

$$\alpha''(s) = \kappa(s)N(s) \tag{3.1.1.}$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha'(s)\times_L \alpha''(s) = T(s)\times_L \kappa(s)N(s) = \kappa(s)\left(T(s)\times_L N(s)\right) = \kappa(s)B(s)$$

bulunur. Ayrıca

$$\|\alpha'(s)\times_L \alpha''(s)\|^2 = \kappa^2(s)\langle B(s), B(s)\rangle_L = \kappa^2(s)$$

dir. Diğer yandan (3.1.1.)' in türevi alınırsa

$$\alpha'''(s) = \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)N'(s) = \kappa^2(s)T(s) + \kappa'(s)N(s) + \kappa(s)\tau(s)B(s)$$

elde edilir. O halde

$$\langle \alpha'(s)\times_L \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L = \kappa^2(s)\tau(s)$$

dir. Sonuç olarak

$$\tau(s) = \frac{\langle \alpha'(s)\times_{\boldsymbol{L}} \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L}{\|\alpha'(s)\times_{\boldsymbol{L}} \alpha''(s)\|^2}$$

bulunur. $\alpha: I \to E_1^3$ eğrisinin oskülatör düzleminin orjine olan uzaklığını $d(s)$ ile gösterirsek

$$\left(d(s)\right)^2 = \frac{(\langle \alpha(s), \alpha'(s)\times_{\boldsymbol{L}} \alpha''(s)\rangle_L)^2}{\|\alpha'(s)\times_L \alpha''(s)\|^2}$$

olduğundan

$$\frac{\tau(s)}{\left(d(s)\right)^2} = \frac{\langle \alpha'(s)\times_{\boldsymbol{L}} \alpha''(s), \alpha'''(s)\rangle_L}{(\langle \alpha(s), \alpha'(s)\times_{\boldsymbol{L}} \alpha''(s)\rangle_L)^2} = \frac{\tau(s)}{\left(f_2(s)\right)^2}$$

bulunur. $\alpha: I \to E_1^3$ yay uzunluğu parametresine gore verilmiş bir spacelike eğrisi için de ispat benzer şekildedir.

Sonuç 3.1. $\alpha: I \to E_1^3$ yay uzunluğu parametresine gore verilmiş null olmayan bir eğrinin Tzitzeica eğrisi olma koşulu olan $\frac{\tau(s)}{\left(d(s)\right)^2} = sbt$ koşulu yerine

$$\frac{\tau(s)}{(\langle \alpha(s), B(s)\rangle_L)^2} = sbt$$

olma koşulu alınabilir.

Teorem 3.2. $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine gore verilmiş bir null eğri olsun öyle ki

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_1(s)N(s) + f_2(s)B(s)$$

şeklinde verilsin. α eğrisinin Tzitzeica eğrisi olma şartı

$$\frac{\tau(s)}{(\langle\alpha(s),T(s)\rangle_L)^2}=sbt$$

olmasıdır.

İspat: $f_2(s)=\langle\alpha(s),T(s)\rangle_L$ olduğundan açıkça görülür.

Teorem 3.3. $\alpha\colon I\to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine gore verilmiş bir pseudo-null eğri olsun öyle ki

$$\alpha(s)=f_0(s)T(s)+f_1(s)N(s)+f_2(s)B(s)$$

şeklinde verilsin. α eğrisinin Tzitzeica eğrisi olma şartı

$$\frac{\tau(s)}{(\langle\alpha(s),N(s)\rangle_L)^2}=sbt$$

olması şeklinde de ifade edilebilir.

İspat: $f_2(s)=\langle\alpha(s),N(s)\rangle_L$ olduğundan açıkça görülür.

Teorem 3.4. $\alpha\colon I\to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine gore verilmiş sabit burulmaya sahip null bir eğri olmak üzere α eğrisi Tzitzeica eğrisi ise α rektifiyandır.

İspat: $\alpha\colon I\to E_1^3$ null bir eğri, $\tau(s)=sbt$ ve Tzitzeica eğrisi olsun. Bu durumda Teorem 3.2. gereğince

$$\frac{\tau(s)}{\left(f_2(s)\right)^2}=\frac{\tau(s)}{(\langle\alpha(s),T(s)\rangle_L)^2}=c\ (sbt)$$

olmalıdır. $\tau(s)$ sabit olduğuna göre $\langle\alpha(s),T(s)\rangle_L$ değeri sabittir. O halde α eğrisinin rektifiyan olduğunu göstermeliyiz.

$$\alpha(s)=f_0(s)T(s)+f_1(s)N(s)+f_2(s)B(s)$$

verilsin. O halde;

$$\langle\alpha(s),N(s)\rangle_L=f_1(s)$$

olduğu görülür. Diğer yandan

$$\langle\alpha'(s),T(s)\rangle_L+\langle\alpha(s),T'(s)\rangle_L=0$$

eşitliğinden Teorem 2.2.1.' e göre

$$\langle\alpha(s),\kappa(s)N(s)\rangle_L=0\Rightarrow\kappa(s)\langle\alpha(s),N(s)\rangle_L=0\Rightarrow\langle\alpha(s),N(s)\rangle_L=0$$

elde edilir. Sonuçta α rektifiyan eğridir.

Teorem 3.5. $\alpha\colon I\to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null eğri öyle ki $\kappa(s)>0$ olsun. Eğer α rektifiyan bir eğri ise $c_1\in\mathbb{R}_0$, $c_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\tau(s)=c_1s+c_2$$

dir.

İspat: $\alpha(s)$ eğrisi rektifiyan eğri ise

$$\alpha(s)=f_0(s)T(s)+f_2(s)B(s)$$

şeklinde yazılabilir. $\alpha(s)$ eğrisinin türevi alınır, Teorem 2.2.1.' den ve $\kappa(s)=1$ olduğundan

$$\alpha'(s)=f_0{}'(s)T(s)+\left(f_0(s)\kappa(s)-f_2(s)\tau(s)\right)N(s)+f_2{}'(s)B(s)$$

elde edilir. Burada

$$\alpha'(s)=T(s)$$

eşitliğinden

$$f_0{}'(s)=1\Rightarrow f_0(s)=s+a$$

$$f_2{}'(s)=0\Rightarrow f_2(s)=b$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$f_0(s)-f_2(s)\tau(s)=0$$

denkleminde bulunan $f_0(s),f_2(s)$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\tau(s) = \frac{s+a}{b}$$

bulunur. O halde $c_1 \neq 0$ olmak üzere

$$\tau(s) = c_1 s + c_2$$

elde edilir.

Teorem 3.6. $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null rektifiyan hiçbir Tzitzeica eğrisi yoktur.

İspat: α pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş null rektifiyan Tzitzeica eğrisi olsun. Önceki teoremin ispatından

$$\frac{\tau(s)}{\big(d(s)\big)^2} = \frac{\tau(s)}{\big(f_2(s)\big)^2} = \frac{s+a}{b^2}$$

olarak bulunur. α Tzitzeica eğrisi olduğundan

$$\frac{\tau(s)}{\big(d(s)\big)^2} = sbt$$

olmalıdır. O halde hiç bir null rekitifiyan Tzitzeica eğrisi yoktur.

Teorem 3.7. $\alpha: I \to E_1^3$ pseudo yay uzunluğu parametresine göre verilmiş pseudo null eğri öyle ki $\kappa(s) > 0$ olsun. Eğer α rektifiyan bir eğri ise $\tau(s) = 0$' dır.

İspat: $\alpha(s)$ eğrisi rektifiyan eğri olduğundan

$$\alpha(s) = f_0(s)T(s) + f_2(s)B(s)$$

şeklinde yazılabilir. $\alpha(s)$ eğrisinin türevi alınır ve Teorem 2.3.1. ve $\kappa(s) = 1$ eşitliği kullanılırsa

$$\alpha'(s) = {f_0}'(s)T(s) + \big(f_0(s)\kappa(s) - f_2(s)\tau(s)\big)N(s) + {f_2}'(s)B(s)$$

elde edilir. Buradan

$${f_0}'(s) - f_2(s) = 1, \quad f_0(s) = 0, \quad {f_2}'(s) - f_2(s)\tau(s) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde

$${f_2}'(s) = \tau(s) = 0$$

olduğu görülür.

Uyarı 3.1. $\tau(s) = 0$ iken $\frac{\tau(s)}{\big(d(s)\big)^2} = 0$ olacağından Tzitzeica eğrisi olma koşulu sağlanmaz.

Sonuç 3.2. E_1^3' te hiç bir pseudo-null rektifiyan Tzitzeica eğrisi yoktur.

Teorem 3.8. E_1^3' te sabit burulmaya sahip hiçbir pseudo-null Tzitzeica eğrisi yoktur.

İspat: $\alpha: I \to E_1^3$ sabit burulmaya sahip pseudo-null bir eğri olsun. α eğrisi Tzitzeica eğrisi olsun. Bu durumda

$$\frac{\tau(s)}{(\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L)^2} = c\ (sbt)$$

olmalıdır. $\tau(s)$ sabit olduğundan $\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L = sbt$ olmalıdır. $\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L$ eşitliğinin pseudo yay uzunluğu parametresine gore türevini alırsak ve Teorem 2.3.1.' i kullanırsak

$$\langle T(s), N(s)\rangle_L + \langle \alpha(s), \tau(s)N(s)\rangle_L = 0$$

elde edilir. $\tau(s)$sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $\langle \alpha(s), N(s)\rangle_L = 0$ elde edilir. O halde hiçbir pseudo-null Tzitzeica eğrisi yoktur.

REFERANSLAR

[1] Tzitzeica, G. (1911). Sur Certaines Courbes Gouches. Ann. De I'Ec. Normale Sup., 28, 9-32.

[2] Agnew, A.F., Bobe, A., Boskoff, W.G., Suceava, B.D. (2010). Tzitzeica Curves and Surfaces. The Mathematica Jorunal, 12, 1-18.

[3] Karacan, M. K., Bukcu, B. (2009). On the elliptic cylindrical Tzitzeica curves in Minkowski 3-space. Sci. Manga, 5, 44-48.

[4] Ilarslan, K., Nesovic, E. (2008). Some Characterizations of Rectifying Curves in the Euclidean Space E^4 . Turk J. Math., 32, 21 - 30.

[5] Ilarslan, K. (2005). Spacelike Normal Curves in Minkowski Space E_1^3. Turk J Math., 29, 53-63.

[6] Chen, B. Y. (2003). When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?, Amer. Math. Monthly, 110, 2, 147-152.

[7] Grbovic, M., Nesovic, E. (2012). Some relations between rectifying and normal curves in Minkowski 3-space. Math. Commun., 17, 655-664.

[8] Crasmareanu, M. (2002). Cylindrical Tzitzeica curves implies forced harmonic oscillators. Balkan J. Geom. Appl., 7, 1, 37-42.

[9] Constantinescu,O., Crasmareanu, M. (2011). A new Tzitzeica hypersurface and cubic Finslerian metrics of Berwald type. Balkan J. Geom. Appl., 16, 2, 27-34.

[10] Chen, B. Y., Dillen, F. (2005). Rectifying curves as centrodes and extremal curves. Bull. Inst. Math. Academia Sinica, 33, 2, 77-90.

[11] Bobe, A., Boskoff, W. G., Ciuca, M. G. (2012). Tzitzeica-Type centro-affine invariants in Minkowski spaces. An. St. Univ. Ovidius Constanta, 20, 2, 27-34.

[12] Bilici, M., Caliskan, M. (2009). On the Involutes of the spacelike curve with a timelike binormal in Minkowski 3-space. Int. Math. Forum, 4, 31, 1497-1509.

[13] Bila, N. (2012). Symmetry reductions for the Tzitzeica curve equation. Math and Comp.Sci. Working Papers, Paper 16.

[14] Balgetir, H., Bektas, M., and Ergut, M. (2004). Bertrand curves for Nonnull curves in 3-dimensional Lorentzian space. Hadronic Journal, 229-236.

[15] Walrave, J. (1995). Curves and Surfaces in Minkowski Space. K.U. Leuven, Faculteit Der Wetenschappen.

[16] O`Neill, B. (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, New York.

[17] Aydın, M. E., Ergüt, M. (2014). Non-null curves of Tzitzeica Type in Minkowski 3-space. Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 81-90.