Cilt 7, Sayı 2, Sayfa 48-53, 2018 Volume 7, Issue 2, Page 48-53, 2018

Araştırma Makalesi

Türk Doğa ve Fen Dergisi
Turkish Journal of Nature and Science
www.dergipark.gov.tr/tdfd

Kendine Benzer Eğri Olmayan Bazı Özel Eğriler

Mustafa ALTIN[*1], Müge KARADAĞ [2]

[1]Bingöl Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksek Okulu, Bingöl, Türkiye
[2]İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Malatya, Türkiye

* *Sorumlu yazar:* maltin@bingol.edu.tr – ORCID No: 0000-0001-5544-5910

(Alınış: 18.10.2018, Kabul: 30.12.2018, Online Yayınlanma: 31.12.2018)

Anahtar Kelimeler
Kendine Benzer Eğriler,
Kardioid,
Saykloid,
Limaçon,
Astroid,
Eş açılı spiral

Özet: Görüntü işleme ve örüntü tanıma uygulamalarında yer bulan kendine benzer eğriler birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada Öklid uzayında Kardioid, Saykloid, Limaçon, Astroid, Eş açılı spiral eğrilerinin kendine benzer eğri olup olmadıkları incelenmiştir. Ayrıca bu eğrilerin kendine benzer eğri olmaması için gerekli şartlar elde edilmiştir.

Some Special Curves Non Self-Similar

Keywords
Self-Similar Curves,
Kardioid,
Saykloid,
Limaçon,
Astroid,
Spiral

Abstract: Self-similar curves used in image processing and pattern recognition have been studied by many researchers. In this study, we examine whether kardioid , saykloid, limaçon, Astroid, Spiral curve in Euclidean space are self- similar curves. We have also obtained the necessary conditions so that these curves do not have a self-similar curve.

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi, diferansiyel geometriyi en iyi temsil eden ve belki de onu en ilginç kılan çalışma alanıdır. Eğrilerin özellikleri incelendiğinde farklı ve önemli sonuçlar elde edilir. Bu teori; fizik, lineer ve nonlineer diferensiyel denklemler ve mühendislik alanlarında farklı uygulamalarda kullanılmaktadır. Özellikle ele alınan nesnenin zamana göre değişiminin analiz edilmesini gerektiği durumlarda değişim bilgisi eğrilerle ölçülebilmektedir. Görüntü işleme ve örüntü tanıma uygulamalarında ise, görüntüdeki nesnelerin yer değişimi ve piksel değerlerinin değişimleri gibi ihtiyaç duyulan bilgiler eğriler yardımıyla etkili bir şekilde tespit edilebilmektedir[1]. Diferansiyel geometrideki eğriler teorisinde bazı özel eğriler bulunmaktadır. Bu özel eğriler hakkında daha fazla bilgiye [2-9] da ulaşılabilir. Bu özel eğrilerin bazıları aşağıda sıralanmıştır;

Kardioid eğrisi: 1741'de Royal Society'nin Felsefe İşlemlerinde Castillon tarafından ilk kez kullanılmıştır. Kardioid eğrisinin yay uzunluğunu ise 1708'de La Hire tarafından bulunmuştur.

Limaçon eğrisi: Pascal'ın limaçonu olarak da adlandırılır. Limaçon sözcüğü salyangoz anlamına gelen Latince limaksından gelir. İlk önce Underweysung der Messung (1525) 'te çizim yöntemi olan Dürer tarafından araştırılmıştır. Blaise Pascal'ın babası olan Étienne Pascal tarafından yeniden keşfedilmiş ve 1650'de Gilles-Personne Roberval tarafından adlandırılmıştır.

Astroid eğrisi: Astroid sözcüğü Yunanca'da yıldız gibi nesneleri andıran asteroid kelimesinden gelir. 1691'de Romer ve Jean Bernoulli tarafından incelenmiştir. Ayrıca 1715'te Leibniz ve 1748'de D'Alembert tarafından çalışılmış, son olarak da Littrow tarafından 1838'de adlandırılmıştır.

Saykloid eğrisi: İlk olarak 1630'lu yıllarda Desargues tarafından önerilen dişli dişleri sikloidlerden yapılmıştır. Bu sikloid ayrıca 1634'te Roberval, 1658'de Wren, 1673'te Huygens ve 1696'da Johann Bernoulli tarafından incelenmiştir.

Logaritmik spiral: Eşaçılı spiral olarak da isimlendirilir. 17. yüzyılda René Descartes ve Jakob Bernoulli ilk kez incelemiş ve tanımlamıştır. Ayrıca Bernoulli bu spirale, spira mirabilis (mucizevi spiral) adını vermiştir.

Son yıllarda; birçok özelliğe ve öneme sahip olan eğrilerin, farklı uzaylarda kendine benzer olma durumları çalışılmaya başlanmıştır. Bu farklı uzaylardan özellikle Öklid uzayında kendine benzer eğriler birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Öklid uzayında kendine benzer eğriler hakkında daha fazla bilgiye [10-12] de ulaşılabilir. IR^n de kendine benzer Frenet eğrilerle ilgili detaylı kavramlar da 2009 yılında Radostina P. Encheva ve Georgi H. Georgiev tarafından incelenilmiştir [13].

Bu çalışmamızda Öklid uzayında Kardioid , Saykloid, Limaçon, Astroid, Eş açılı spiral eğrilerinin kendine benzer eğri olma durumlarını incelenmiştir ve bu durumları incelerken kendine benzer eğri olma şartlarında tanımsız olan değerler bulunmuştur. Son olarakta kendine benzer eğri olma şartlarının tanımlı olduğu aralıklarda kendine benzer eğri olmadıkları gösterilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

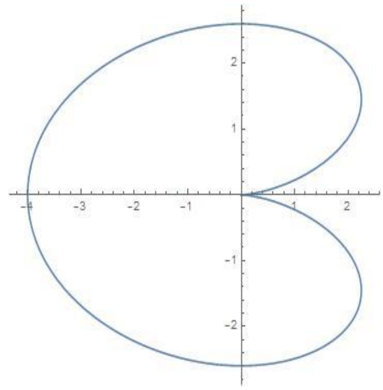
Tanım 2.1. : I, R nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \to R^n$ biçimin de tanımlı düzgün bir α dönüşümüne R^n de bir eğri denir[14].

Şimdi sırayla alt başlıklarda birkaç özel düzlemsel eğrinin tanım aralıkları, tanımlandığı fonksiyonları ve şekilleri verilecektir.

İlk olarak bu birkaç özel eğriden Kardioid eğrisi verilecek olursa; Kardioid eğrisi, kutupsal koordinat sisteminde $r = a\cos t$ denklemiyle ifade edilir. Ayrıca düzlemsel Kardioid eğrisi $I = \{ t \mid 0 \le t \le 2\pi \}$ olmak üzere

$$\alpha : I \to E^2$$
$$t \to \alpha(t) = \left(a(2\cos t - \cos 2t), a(2\sin t - \sin 2t) \right) \quad (2.1)$$

biçiminde bir fonksiyon ile tanımlanır ve $a = 1$ için Şekil 1.'deki gibi görülür.

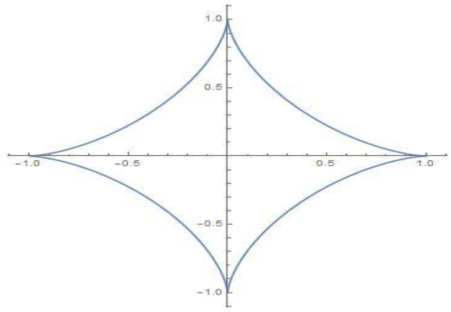


Şekil 1. Kardioid eğrisi

Özel eğriler içinde Kardioid eğrisinden sonra Astroid eğrisi incelenecek olursa, Astroid eğrisi, $2a$ uzunluğunda bir doğru parçasının iki ucu mafsallı olarak koordinat eksenleri üzerinde hareket ederken orta noktasının geometrik yeri olarak adlandırılmaktadır. Astroid eğrisinin Kartezyen denklemi $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ şeklindedir ve bu düzlemsel eğri; $I = \{ t \mid 0 \le t \le 2\pi \}$ olmak üzere

$$\alpha : I \to E^2$$
$$t \to \alpha(t) = \left(a\cos^3 t, a\sin^3 t \right) \quad (2.2)$$

fonksiyonu ile de tanımlanıp, $a = 1$ için Şekil 2.'deki gibi gösterilir.



Şekil 2. Astroid eğrisi

Yine özel eğrilerden olan Limaçon eğrisi incelenecek olursa, a yarıçaplı merkezil bir çember üzerindeki hareketli bir Q noktası için, $\overline{QP}.\overline{QP'} = k^2$ denklemine uyan P ve P' noktalarının geometrik yerine Limaçon eğrisi denir. Limaçon eğrisinin Kartezyen denklemi,

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$$

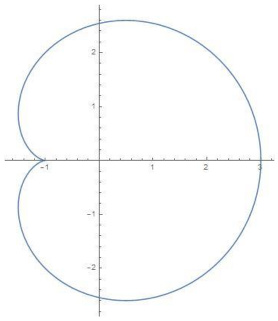
şeklinde verilir. Bu eğri kutupsal koordinat sisteminde ise aşağıdaki gibi tanımlanır

$$r = b + 2a\cos(\theta).$$

Ayrıca düzlemsel Limaçon eğrisini $I = \{ t \mid 0 \le t \le 2\pi \}$ olmak üzere

$$\alpha = I \to E^2$$
$$t \to \alpha(t) = \left(k\cos t + a\cos 2t, k\sin t + a\sin 2t \right) \quad (2.3)$$

fonksiyonu ile de ifade edilebilir ve $a=1, k=2$ için, düzlemsel Limaçon eğrisi Şekil 3.'de görülmektedir.

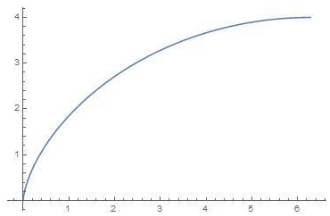


Şekil 3. Limaçon eğrisi

Yukarıda açıklanan özel eğrilere ek olarak Saykloid eğrisi tanımlanacak olursa, a yarıçaplı bir çemberin $0x$ ekseni üzerinde yuvarlanması halinde çember üzerindeki sabit bir P noktasının yörüngesi Saykloid (Cycloid) olarak adlandırılır veya düzlemsel Saykloid eğrisi $I = IR$ iken aşağıdaki fonksiyon ile tanımlanır

$$\begin{aligned} &\alpha : I \to IR^2 \\ &t \to \alpha(t) = (at - a\sin t, a - a\cos t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ayrıca, düzlemsel Saykloid eğrisinin $a=2$ sabit değeri ile xy düzlemindeki görüntüsü Şekil 4.'de verilmektedir.

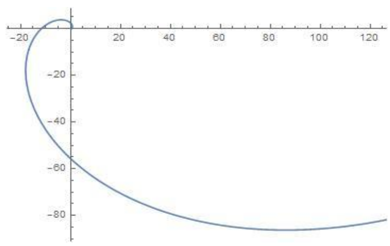


Şekil 4. Saykloid eğrisi

Son olarak da bu özel eğriler içinde Eşaçılı Spiral eğrisi tanımınlanırsa, Eş açılı spiral (equiangular spiral) eğrisinin Kutupsal koordinatlardaki denklemi, $\varphi = sabit$ ve $k = \cot g\varphi$ iken $r = ae^{k\theta}$ dır. Bu tanım kullanıldığında, düzlemsel Eşaçılı spiral eğrisi, $I = \{ t | 0 \leq t \langle 2\pi \}$ olmak üzere, parametrik olarak aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\begin{aligned} &\alpha : I \to E^2 \\ &t \to \alpha(t) = (ae^{kt}\cos t, a e^{kt}\sin t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ayrıca $a=1, k=1$ için Eşaçılı spiral eğrisi Şekil 5.'de görülmektedir.



Şekil 5. Eşaçılı Spiral

Düzlemsel bir eğrinin Frenet vektörleri ve 1. eğriliği (κ) eşitlikleri incelenecek olursa; burada düzlemsel bir eğrinin 2. eğriliğinin sıfır yani $\tau = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ düzlemsel bir eğri olsun. Bu düzlemsel eğrinin, 1. eğriliği (κ), teğet vektörü T ve normal vektörü N sırasıyla aşağıdaki gibidir [15,16].

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)^{3/2}}, \\ T(t) &= \frac{1}{\sqrt{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)}} (x'(t), y'(t)), \\ N(t) &= \frac{1}{\sqrt{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)}} (-y'(t), x'(t)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

$\alpha(t): I \to E^n$ türevlenebilir bir eğri iken, bir eğrinin kendine benzer bir eğri olabilmesi için gerekli olan aşağıdaki şart sağlanırsa

$$\vec{\kappa}(t) + \lambda\alpha(t)^{\perp} = 0 \tag{2.7}$$

$\alpha(t)$ eğrisine kendisine benzer bir eğridir denir, burada

$$\alpha^{\perp}(t) = \alpha(t) - \frac{\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2} \alpha'(t)$$ şeklindedir (10).

Ayrıca $\alpha : I \to E^n$ birim hızlı parametrik bir eğri iken $\alpha(t)$ eğrisinin eğrilik vektörü $\vec{\kappa} : I \to E^n ; \vec{\kappa}(t) = \alpha''(t)$ şeklindedir ve $\|\vec{\kappa}\| : I \to [0, \infty) ; \kappa = \|\vec{\kappa}(t)\| = \|\alpha''(t)\|$ fonksiyonuna $\alpha(t)$ eğrisinin eğriliği denir. Eğer $\alpha : I \to E^n$ keyfi parametreli parametrik bir eğri ise α eğrisinin eğrilik vektörü $\vec{\kappa} : I \to E^n ; \vec{\kappa}(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2} \left(\alpha''(t) - \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^2} \alpha'(t) \right)$ dir (3).

Özel olarak, düzlemsel $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \subset E^2$ eğrisinin kendine benzer eğri olma durumu incelendiğinde (2.6) ve (2.7) eşitlikleri yardımıyla, düzlemsel $\alpha(t)$ eğrisinin kendine benzer eğri olması için ya doğru olması ya da

$$A(A + \lambda BC) = 0 \tag{2.8}$$

şartını sağlaması gerekmektedir, burada

$$\begin{aligned} x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) &= A \\ (x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= B \\ x'(t)y(t) - x(t)y'(t) &= C \end{aligned} \tag{2.9}$$

dir (11).

3. KENDİNE BENZER OLMAYAN BAZI EĞRİLER

Bu bölümde, 2. bölümde tanımlanan Kardioid, Astroid, Limaçon, Saykloid Eşaçılı Spiral eğrilerinin kendine benzer olup olmadıklarını araştırılacaktır. Bu araştırma sonucunda hangi şartlar altında kendine benzer eğri olmadıkları hesaplanacaktır.

İlk olarak (2.1) deki düzlemsel Kardioid eğrisi incelenirse, düzlemsel Kardioid eğrisinin kendine benzer bir eğri olup olmamasıyla ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem.3.1: (2.1) fonksiyonu ile tanımlanan düzlemsel Kardioid eğrisi $\cos t \neq 1$ iken kendine benzer eğri değildir.

İspat: (2.1) eşitliğindeki Kardioid eğrisinin $x(t), y(t)$ fonksiyonları ve bu fonksiyonların 1. ve 2. türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} &y = a\left(2\sin t - \sin 2t\right)\\ &x' = a\left(-2\sin t + 2\sin 2t\right)\\ &y' = a\left(2\cos t - 2\cos 2t\right) \qquad (2.10)\\ &x'' = a\left(-2\cos t + 4\cos 2t\right)\\ &y'' = a\left(-2\sin t + 4\sin 2t\right)\end{aligned}$$

Böylece (2.10) da bulunan eşitlikler, (2.9) eşitliklerinde yerine yazılabilir. İlk olarak (2.9) eşitliğindeki $A = \left(x'y'' - x''y'\right)$ ifadesi hesaplanacak olursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} A &= a^2\left(4\sin^2 t - 8\sin t\sin 2t - 4\sin 2t\sin t + 8\sin^2 2t\right)\\ &\quad - a^2\left(-4\cos t^2 + 4\cos t\cos 2t + 8\cos t\cos 2t - 8\cos^2 2t\right)\\ &= a^2(4\sin^2 t + 4\cos^2 t - 12(\sin t\sin 2t + \cos t\cos 2t)\\ &\quad + 8\sin^2 2t + 8\cos^2 2t)\\ &= a^2\left(12 - 12\cos t(2\sin^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t)\right)\\ &= 12a^2(1-\cos t)\end{aligned}$$

İkinci olarak (2.9) eşitliğindeki $B = \left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2$ ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} B &= a^2\left(4\sin^2 t - 8\sin t\sin 2t + 4\sin^2 2t\right)\\ &\quad + \left(a^2(4\cos^2 t - 8\cos t\cos 2t + 4\cos^2 2t)\right)\\ &= a^2(4+4-8\cos t)\\ &= 8a^2(1-\cos t)\end{aligned}$$

Son olarak (2.9) eşitliğindeki $C = x'y - xy'$ eşitliği de aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} C &= a^2\left(-4\sin^2 t + 2\sin t\sin 2t + 4\sin 2t\sin t - 2\sin^2 2t\right)\\ &\quad - a^2\left(4\cos^2 t - 4\cos t\cos 2t - 2\cos 2t\cos t + 2\cos^2 2t\right)\\ &= -6a^2(1-\cos t)\end{aligned}$$

Sonuç olarak; üste hesaplanan A, B, C eşitlikleri, (2.9) eşitliğinde kullanılırsa $\cos t \neq 1$ iken $A(A+\lambda BC)=0$ şartının sağlanması için

$$\lambda = \frac{1}{4a^2(1-\cos t)}$$

elde edilir. Bu durum da λ sabiti $\cos t = 1$ iken tanımsız olacağından kendine benzerlik durumundan bahsedilemez. Ancak $\cos t \neq 1$ iken λ sabit olmayacağından Kardioid eğrisine kendine benzer eğri değildir denir.

İkinci olarak (2.2) de verilen düzlemsel Astroid eğrisinin hangi durumlarda kendine benzer eğri olmadığı incelenecektir. Şimdi aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem.3.2: (2.2) fonksiyonu ile ifade edilen düzlemsel Astroid eğrisi $\sin 2t \neq 0$ iken kendine benzer eğri değildir.

İspat: (2.2) deki düzlemsel Astroid eğrisinin $x(t) = a\cos^3 t, y(t) = a\sin^3 t$ fonksiyonlarının 1. ve 2. türevleri hesaplandığında aşağıdaki eşiklikler elde edilir

$$\begin{aligned} &x' = -3a\cos^2 t\sin t\\ &y' = 3a\sin^2 t\cos t\\ &x'' = 6a\sin^2 t\cos t - 3a\cos^3 t \qquad (2.11)\\ &y'' = 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t\end{aligned}$$

Ayrıca düzlemsel eğrilerin kendine benzer eğri olma şartı olan (2.8) eşitliğinde kullanılmak üzere (2.9) ve (2.11) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} &A = -9a^2\cos^2 t\sin^2 t\\ &B = 9a^2\sin^2 t\cos^2 t\\ &C = -3a^2\cos^2 t\sin^2 t\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda hesaplanan A, B, C eşitliklerini $\sin 2t \neq 0$ iken (2.8) de yerine yazılırsa λ değeri aşağıdaki gibi bulunur

$$\lambda = -\frac{1}{3a^2\cos^2 t\sin^2 t}.$$

Bu durum da λ sabiti $\sin 2t = 0$ iken tanımsız olacağından kendine benzerlik durumundan bahsedilmez. Ancak $\sin 2t \neq 0$ iken λ sabit olmayacağından Astroid eğrisine kendine benzer eğri değildir denir.

Üçüncü olarak (2.3) de verilen düzlemsel Limaçon eğrisinin hangi durumlarda kendine benzer eğri olma şartını sağladığını ve kendine benzer eğri olmadığı gösterilecektir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem.3.3: (2.3) fonksiyonu ile tanımlanan, Limaçon eğrisi $k\neq 0$, $\frac{k^2+2a^2}{3ak}\neq -\cos t\neq \frac{k^2+4a^2}{4ak}$ iken kendine benzer eğri değildir.

İspat: (2.3) düzlemsel Limaçon eğrisinin $x=k\cos t+a\cos 2t,\ y=k\sin t+a\sin 2t$ fonksiyonları için (2.9) daki A,B,C eşitlikleri, önceki ispatlara benzer işlemlerle aşağıdaki gibi bulunur.

$$A=k^2+8a^2+6ak\cos t$$

$$B=k^2+4a^2+4ak\cos t$$

$$C=-k^2-2a^2-3ak\cos t\ .$$

Elde edilen A,B,C eşitlikleriyle, $\cos t\neq -\frac{k^2+8a^2}{6ak}$ iken (2.8) deki kendine benzer eğri olma şartı olan $A(A+\lambda BC)=0$ ifadesinin sağlanması için

$$\lambda=\frac{k^2+8a^2+6ak\cos t}{(k^2+4a^2+4ak\cos t)(k^2+2a^2+3ak\cos t)}$$

olmalıdır. Bu durum da λ sabiti $\cos t=-\frac{k^2+2a^2}{3ak}$, $\cos t=-\frac{k^2+4a^2}{4ak}$ iken tanımsız olacağından kendine benzerlik durumundan bahsedilemez. Ancak $\frac{k^2+2a^2}{3ak}\neq -\cos t\neq \frac{k^2+4a^2}{4ak}$ iken λ sabit olmayacağından Limaçon eğrisine kendine benzer eğri değildir denir.

Eğer $k=0$ ise Limaçon eğrisi çemberdir ve kendisine benzer bir eğridir. $k\neq 0$ ve yukardaki şartlar sağlandığında Limaçon eğrisi kendisine benzer bir eğri değildir.

Dördüncü olarak (2.4) de verilen düzlemsel Saykloid eğrisinin hangi durumlarda kendine benzer eğri olmadığını göstermek için gerekli olan teorem aşağıda verilecektir.

Teorem.3.4: (2.4) fonksiyonu ile gösterilen, düzlemsel Saykloid eğrisi $\cos t\neq 1$, $\cot\left(\frac{t}{2}\right)\neq \frac{2}{t}$ iken kendine benzer bir eğri değildir.

İspat: (2.4) Saykloid eğrisinin $x(t)=at-a\sin t$, $y(t)=a-a\cos t$ fonksiyonlarını kullanıp, yukarıdaki ispat yöntemlerine benzer işlemler yapıldığında ve $\cos t\neq 1$ iken kendine benzer eğri olma şartı olan (2.8) deki λ değeri aşağıdaki gibi bulunur

$$\lambda=\frac{1}{2(2a^2(1-\cos t)-a^2 t\sin t)}\ .$$

λ sabitinin paydasında yer alan $2(1-\cos t)-t\sin t$ ifadesi sıfır olduğunda λ sabiti tanımsız olur. Yani

$$2(1-\cos t)\neq t\sin t \qquad (2.12)$$

olmalıdır. (2.12) eşitsizliğinde gerekli aritmetik işlemler yapıldığında $\cot\left(\frac{t}{2}\right)\neq \frac{2}{t}$ elde edilir.

Bu da teoremin ispatını vermektedir.

Son olarak da (2.5) de verilen düzlemsel Eşaçılı spiral eğrisinin kendine benzer eğri olmadığını göstermek için aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem.3.5: (2.5) fonksiyonu ile tanımlanan, eşaçılı spiral eğrisi kendine benzer bir eğri değildir.

İspat: (2.5) eşaçılı spiral eğrisinin $x(t)=ae^{kt}\cos t$, $y(t)=ae^{kt}\sin t$ fonksiyonları için benzer işlemler yapıldığında (2.8) eşitliğindeki λ değeri aşağıdaki gibi bulunur

$$\lambda=\frac{1}{a^2e^{2kt}}\ .$$

Bu durum da λ sabit olmayacağından Eşaçılı spiral eğrisine kendine benzer eğri değildir denir.

KAYNAKLAR

[1] Hanbay K, Alpaslan N, Talu MF, Hanbay D. Principal curvatures based rotation invariant algorithms for efficient texture classification. Neurocomputing 199: 77–89, 2016.

[2] Beyer WH. Standard Mathematical Tables. Boca Raton: FL: CRC Press; 216 p, 1987.

[3] Gray A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton: FL: CRC Press; 50-52 p, 1997.

[4] Lawrence JD. A Catalog of Special Plane Curves. New York: Dover Publications Inc.; 192-197, 1972.

[5] Lockwood EH. “The Cycloid.” Ch. 9. In: A Book of Curves. Cambridge, England: Cambridge University Press; 80–92, 1967.

[6] MacTutor History of Mathematics Archive [Internet]. Available from: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Cycloid.html

[7] Smith DE. Special Topics of Elementary Mathematics. In: History of Mathematics, Vol 2. New York: Dover Publications Inc.;327p, 1958.

[8] Wells D. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry. Londra: Penguin; 44-47 p, 1991.
[9] Yates RC. Cycloid. In: A Handbook on Curves and Their Properties. Ann Arbor, MI: J. W. Edwards; 65–70p, 1952.
[10] E. Ethemoglu. E^n deki Kendine Benzer Yüzeylerin Bir Karekterizasyonu. Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi; 2013.
[11] Etemoglu E, Arslan K, Bulca B. Self similar surfaces in Euclidean space. Selcuk J Appl Math,;14(1):71–81, 2013.
[12] Anciaux H. Construction of Lagrangian Self-similar Solutions to the Mean Curvature Flow in Cn. Geom Dedicata.;120(1):37–48, 2006.
[13] Uribe-Vargas R. On Vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves. Bull Brazilian Math Soc.;36(3):285–307, 2005.
[14] Hacısalihoğlu H.H. Differensiyel Geometri. Ankara: Gazi Üniversitesi Basın Yayın Yüksekokulu Basımevi; 1-895 p, 1983.
[15] O'Neill B. Elementary Differential Geometry. Academic Press Inc; 1-520 p, 1966.
[16] J.W. Rutter. Geometry of Curves. 1 st. New York: Chapman and Hall/CRC; 384 p, 2000.