Journal of EducationalSciences
Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Eğitim Bilimleri Dergisi, Sayı: Aralık, 2018, 9(2), Sayfa: 119-136
http://dergipark.gov.tr/aduefebder

Matematik Eğitimi Öğretmen Adaylarının Kanıt Şemalarının Ortaya Çıkarılması [1]

Sultan ELDEKCİ[2]

Geliş Tarihi: 06.10.2018 **Kabul Tarihi: 13.12.2018** **Yayın tarihi: 31.12.2018**

Özet

Matematik eğitiminde akıl yürütme, problem çözme ve sorgulama becerilerine verilen önem her gün biraz daha artmaktadır. Sorgulama becerisini geliştirmede öğrencilerin sundukları kanıtlar yani cevabın doğruluğuna kendilerini ve başkalarını nasıl ikna ettikleri önem kazanmaktadır. Kanıtları oluştururken kullandıkları yapıların sınıflandırmasıyla kanıt şemalarına yönlendirmektedir. Öğrencilerin kullandıkları kanıt şemalarının öğretmen kaynaklı olduğunu ifade etmeleri kanıt şemalarının geliştirilmesinde öğretmenlerin varlığına vurgu yapmaktadır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının rasyonel sayıların öğretimi kapsamında kullandıkları kanıt şemalarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda matematik eğitimi bölümünden üçüncü sınıf düzeyindeki üç öğretmen adayı ile klinik görüşme yapılmıştır. Görüşmeler ile çalışma yaprağındaki sorular analiz edilerek kullandıkları kanıt şemaları incelenmiştir. Öğretmen adaylarının dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarından üçünü de kullandıkları sonucuna ulaşılmıştır. Sonuç olarak benzer kanıt yapılarını ve matematik öğretimine ilişkin alan eğitimi bilgilerini kullandıkları gözlemlenmiştir. Bu bağlamda öğretmen adaylarının eğitiminde kullandıkları kanıt şemalarının gelişimine yönelik farklı eğitimler verilebilir. Öğretmenlik deneyimlerini içeren stajları gözlemlenerek uygulamadaki yansımaları incelenebilir.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, Kanıt şemaları, Öğretmen adayları, Uzmanlık alan bilgisi, Rasyonel sayılar

Elicitation Of Proof Schemes For Teacher Candidates İn Secondary School Mathematics Education

Abstract

The importance given to the reasoning, problem solving and questioning skills in mathematics education increases every day It is important for students to improve their inquiry skills that they are convinced of how to convince themselves and others. The classification of the structures they use to create proof leads to proof schemes. The students use the proof schemes that emphasizing the existence of teachers in the development of proof schemes. In this study, it is aimed to reveal the proof schemes used by the pre-service teachers in the context of teaching rational numbers. For this purpose, a clinical interview was conducted with three pre-service teachers at the third grade level from the department of mathematics education. The responses to the interviews and the study sheets were analyzed and the proof schemes used were examined. Concluded that teacher candidates used three of the external, experimental and analytical proof schemes. As a result, similar proof structures and their special context knowledge were used in mathematics teaching. In this context, different trainings can be given to develop the proof schemes used by teacher candidates in mathematics education. Internship experiences of teacher candidates can be observed and their reflections in practice can be examined.

Key words: Mathematics education, Proof scheme, Teacher candidates, Special context knowledge, Rational numbers

[1] II. Uluslararası Eğitim Araştırmaları ve Öğretmen Eğitimi Kongresinde sözlü özet bildiri olarak sunulmuştur.

[2] Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, eldekci_sultan_06@hotmail.com

GİRİŞ

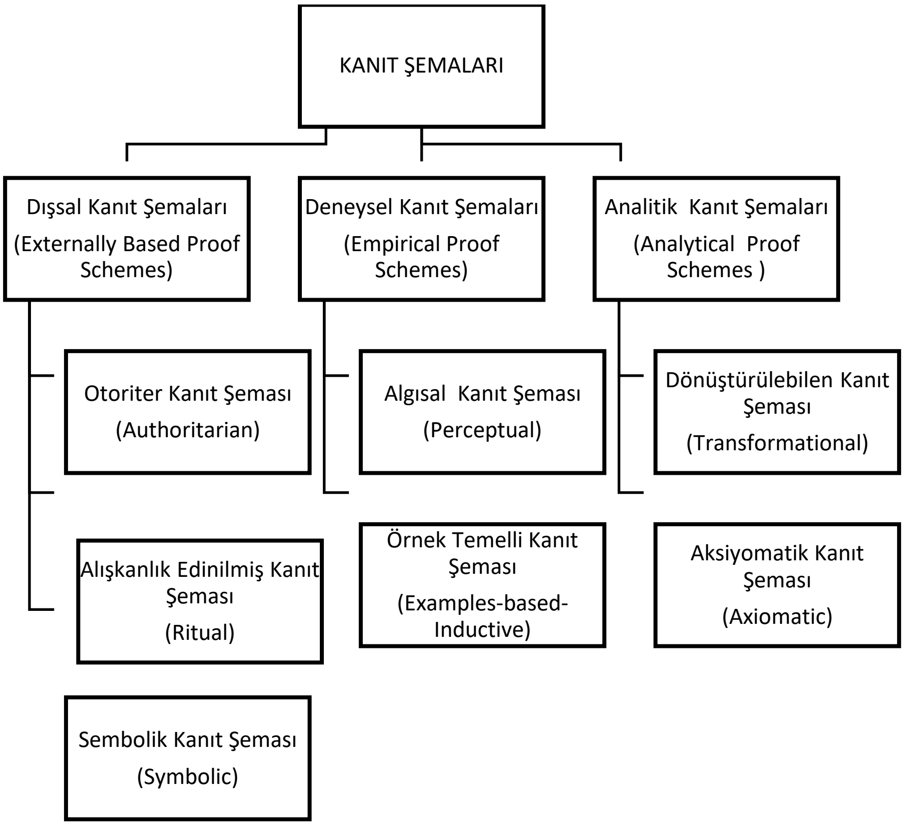
Matematik eğitimi üzerine pek çok ülkede disiplinler arası uygulamaları da içeren problem çözmeye dayalı öğretim modelleri üzerinde çalışmalar gerçekleştirilmektedir. Son zamanlardaki yenilik çalışmaları ortaokul matematik öğretmenlerinin tüm öğrencilere ortaokul matematik müfredatına bağlı olarak matematiğin disiplini içerisindeki kanıtın doğası ve rolünü yansıtan fırsatlar ve deneyimler sunmalarını gerektirir (Knuth,1999). Bu deneyimler öğrencilerin matematik problemlerine ait çözümlerini sunmaları için bir fırsattır. Çözümlerini ifade ederken kullandıkları yapılar ve düşünceler onların bu konudaki düşünme yolları hakkında bilgi verebilir.

Düşüncelerin açıklanması, bireyin anlama biçimlerini neyin yönlendirdiğini anlatır bundan dolayı belirli bir durumun değil, çok sayıda çalışmaya özgü bir akıl yürütmeyi ifade eder (Sowder ve Harel, 2005). Çözüme yönelik düşüncelerin ifade biçimleri matematiksel savunmaların temsilidir. Matematik eğitiminde öğrencilerin matematik problemlerine ürettikleri çözümün yanı sıra bu çözümden nasıl emin oldukları da önemlidir (Akkuş ve Ertuna, 2010). Problemin çözümünde emin olmalarını sağlayan yapılar konusunda farklılıklar görülebilir. Bu nedenle bireylerin savunma veya kanıtlama sürecinde kullandıkları yöntemler, bireylerin o durum hakkındaki düşünce yapılarını da ortaya koymaktadır (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Bu yöntemlerden biri de sorgulama becerisini aktif kılan kanıt yapılarıdır.

Harel ve Sowder (2007)'e göre öğrencilerin zayıf kanıt türlerini kullanmalarının sebebi matematiksel etkinliklerde fırsat sunulmaması ile doğrudan ilgilidir. (Sears,2012) Matematik eğitiminde kanıt yoluyla düşünmenin, okulda öğrencilerin bu konuda teşvik edilmesinin önemli olduğuna dair şüphe yoktur çünkü kanıt matematik yapmanın özünü temsil eder. (Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002; Yackel & Hanna, 2003; Sears, 2012). Kanıtlarla bireyler varsayımlarını doğrulayabilir, açıklayabilir, matematiksel fikirleri sistemleştirebilir, iletişim kurabilir, keşfedebilir, birleştirebilir ve ayrıca kanıtlar entellektüel bir meydan okuma sağlayabilir (De Villiers, 1999; Sears, 2012). Kanıt yapılarını ortaya koyarken zihinsel sürecin düşünsel yapıları açığa çıkması olarak düşünülebilir. Kanıt bir zihinsel sorgulama süreci sonrası kişinin doğru olduğuna inandığı matematiksel açıklamalar, tanımlamalar, çizimler ve yapıların ortaya konulması biçiminde ifade edilebilir.

Kanıt ileri matematiksel düşünce olup, anlama ve düşünme yolları arasında yer alır (Harel ve Sowder, 2005). Kanıt aslında bir ikna çabasıdır, matematiği anlamlandırmak gibi önemli bir görevi üstlenmiş, mantıksal bir gerçeği keşfetmeyi ya da savunmayı amaçlayan yapılardır. Dede ve Karakuş (2014)'e göre kanıt matematik bilgisinin inşa edilmesinde önemli bir role sahiptir bu nedenle matematik eğitiminde kanıta verilen önem giderek artmaktadır. Kanıtlar kişiden kişiye konudan konuya hatta aynı kişide farklı zamanlarda bile değişebilir. Bireylerin kanıtlarının farklı oluşu aslında kanıt yapma süreçlerinin farklı oluşundan kaynaklanmaktadır. Harel&Sowder 'e (2005) göre kişinin düşünme biçimleri birbiriyle ilişkili en az üç kategoriyi içerir; inançlar, problem çözme yaklaşımları ve kanıt şemalarıdır. Bu yapıların farklılıklarına göre sınıflandırılması ile kanıt şemaları ortaya çıkmaktadır.

Kanıt şemaları bir bireyin kendisini veya bir başkasını matematiksel bir durumun doğruluğuna veya yanlışlığına ikna etmek için yaptığı açıklamaları, savunmaları ve kanıtları içeren düşünme biçimidir. (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016).Sowder & Harel (1998) tarafından gerçekleştirilen çalışmada kanıt şemalarını açıklayan teori, matematik ve mühendislik öğrencileri ile geometri, lineer cebir ve soyut matematik derslerinde yapılan ve üç yıl süren öğretim deneyleri değerlendirilerek oluşturulmuştur. Öğretim deneylerinin sonucunda öğrencilerin sorulara ilişkin savunma yapıları sınıflandırılarak kanıt şemaları elde edilmiştir. Kanıt şemaları dışsal deneysel ve analitik olmak üzere üç ana kategoride çeşitlendirilmiştir. Her bireyin kullandığı kanıt şemaları konudan konuya farklılık gösterebileceği gibi bazen bir birey bir durum için bu şemaları birlikte de kullanabilir. Kanıt şemalarındaki her bir sınıflama öğrencilerin matematiksel gelişimlerini bilişsel düzeylerini ve zihinsel aşamalarını temsil etmektedir (İskenderoğlu, 2016). Kanıt şemaları ile ilgili sınıflama yapılırken matematiksel bir durumun sonucunun doğru ya da yanlış olmasına bakılmaksızın bireylerin açıklamaları, kanıtları ve savunmaları sınıflandırılmaktadır (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Bu nedenle öğrencilerin bu zihinsel süreçte kanıtlarını ortaya koymasında önceki bilgi ve deneyimleri, kavramlarıyla oluşturduğu şemalar ve öğretmeni ile kurduğu iletişim kendi kanıt şemalarını oluşturmalarında etkilidir. Öğrencilerle yapılan farklı çalışmalar sonunda öğrencilerin kanıt şemalarının oluşumunda öğretmen profilinin kullandığı yöntemler, düşünsel açıklamaları ve en nihayetinde kullandığı kanıt şemalarının etkisi ortaya konulmuştur. Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının kendi kanıt şemalarını oluşturmasında önceki bilgileri ve matematiksel düşünme süreçleri etkili olmakta sınıf içerisinde ya da öğrencilerle olan iletişiminde kullandığı kanıt şemaları ortaya çıkmaktadır. Kanıt şeması kişinin varsayım ve hakikatlerini içeren felsefesinden oluşur (Lee,1999). Harel ve Sowder (1998) tanımına göre; kanıt şeması sadece kanıt yöntemlerine odaklanmaz bir kanıtı oluşturmak için kullanılan bilişsel düşünme süreçlerine de odaklanır (Lee,1999). Kanıt şeması bir teoremi ispatlamanın zihinsel eylemi üzerine bir düşünme biçimidir (Olsker,2007). Bir kişinin düşünme biçimleri en az üç birbiriyle ilişkili kategoriyi içerir; inançlar, problem çözme yaklaşımları ve kanıt şemaları (Sowder ve Harel, 2005).



Şekil 1 Kanıt şemaları ve alt şemaları (Sowder ve Harel,1998)

1.Dışsal Kanıt Şemaları

Dışsal kanıt şeması bireylerin matematik bilgilerinin doğruluğunu ispatlamak için bir otoriteye, önceden elde ettikleri delillere veya semboller gibi bazı sebeplere güvenmeleriyle oluşur. (Martin, McCrone, Bower ve Dindyal, 2005; Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Bireyler bu kanıt şemasında dış kaynaklara bağlı olarak kanıt yapılarını şekillendirirler. Bu şemada problem birey tarafından bir kere okunur ve konuyla ilgili hatırlanan kural ya da teorem uygulanır. (Harel ve Sowder, 1998; Lee, 1999). Kanıt yapılarını oluştururken problemi anlamaktan ziyade çözümü oluşturmaya yönelik önceden edinilmiş bilgilere odaklanıldığının bir göstergesidir.

1.1.Otoriter Kanıt Şeması

Bir durumu kanıtlarken ne anlama geldiğini bilmeden belirli bir kaynaktan elde edilmiş kural formül ve tanımların ikna etmek amacıyla kullanılmasıyla oluşur (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Bu aşamada kişiler doğru cevaba ulaşmak için kuralları nasıl ezberlemeleri gerektiğine, formülleri nasıl kullanacaklarını bilmeleri gerektiğine inanırlar (Lee, 1999).

1.2.Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması

Bu şemada öğrenciler bir durumun doğruluğunu ispat etmek için daha önce elde ettikleri bilgi ve düşünme yollarını kullanırlar. (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Bireyler yüzeysel çözüm adımlarına odaklanarak derin açıklamaları dikkate almazlar (Lee, 1999).

1.3.Sembolik Kanıt Şeması

Sembollerin var olan anlamlarını düşünmeden, matematiksel durumun ispatında kullanılan alışkanlık haline getirilmiş sembolik akıl yürütmeleri içeren kanıt şemalarıdır (Aydoğdu İskenderoğlu,2016). Bu kanıt şemasını kullanan bireyler büyük olasılıkla problem çözme sürecini tamamlayamazlar (Lee,1999). Çünkü yazdıkları sembolik ifadelere anlam veremezler onlar için çözüme ulaşmalarını sağlayacağını düşündüren sembollerle oynanan bir oyun gibidir.

2.Deneysel Kanıt Şemaları

Bu tür kanıt şemalarında bireyler matematiksel durumun çözümü için eylemlere, örneklere ve algısal şekillere odaklanarak kanıt yapılarını oluşturur. Düşünme sürecinde günlük deneyim, sezgi ve bilgilerini problem çözmede kullanan bireyler deneysel kanıt şemalarını kullanmaktadırlar (Lee, 1999).

2.1.Algısal Kanıt Şeması

Algısal kanıt şeması bireylerin zihinsel çizimlerini veya sezgilerini temel alarak sonuca ulaşmalarını sağlamaktadır (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Problemin çözümünde kişinin çözüme yönelik sezgilerini çizimlerinin doğruladığı kanıt yapılarıdır.

2.2.Örnek Temelli Kanıt Şeması

Örnekler yoluyla varılan sonucun doğruluğunun kanıtlandığı kanıt şemasıdır. Bireylerin bir veya daha fazla örnekle varsayımlarının doğruluğuna kendilerini ya da akranlarını ikna etmek için kullandığı düşünme stili aynı zamanda ispat yapısıdır. (Harel ve Sowder, 1998; Lee, 1999).

3.Analitik Kanıt Şemaları

Analitik kanıt şemalarında bireylerin çözüm yapılarının biçiminden ziyade problemi anlamlandırmalarını sağlayan sürecin zihinsel ifadeleri önemlidir. Bu şemada öğrenciler aksiyomları, teoremleri kullanmalarının yanı sıra matematiksel ilişkileri keşfederek bazı stratejilerini geliştirirler (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016).

3.1.Dönüştürülebilen Kanıt Şeması

Mantıksal çıkarım, genelleme ve işlemsel düşünme dönüştürülebilen kanıt şemasını oluşturan üç ayrı özelliktir (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Bu kanıt şemasını kullanan bireyler problemin temel nedeni anlar ve kanıt için fikir üretmek amacıyla mantıksal ilişki ve çıkarımları içeren yapıları oluşturabilirler (Lee, 1999).

3.2.Aksiyomatik Kanıt Şeması

Matematiksel bir durumun doğruluğunu gösterme aşamasında tanımsız terimleri, tahminleri, teoremleri neden sonuç ilişkisi içerisinde anlamlı olarak kullanılmasıyla oluşan kanıt türüdür (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Aksiyomatik kanıt şemasında bireyler ispat süreçlerini hatırlar ve kanıt yaparken kullanırlar (Lee, 1999).

Öğretmenlerin matematik eğitimi üzerine yapılan yeniliklere cevap verme başarısı büyük ölçüde kendi kanıt kavramlarına bağlıdır; ancak bugüne kadar çok az araştırma öğretmenlerin ispat kavramlarına odaklanmıştır (Knuth, 1999). Öğretmen ve öğretmen adaylarının matematik eğitiminde kanıt yapmaya dair gerekli becerileri öğrencilerine kazandırabilmesi için kendisinin de bu becerilerini geliştirmesi gerektiği düşünülebilir. Eğer öğretmenler bu konuda bir eksiklik hissediyorsa bu yapı etkili öğretim yapma konusunda bir engel teşkil edebilir. Knuth (2002a)'a göre öğretmenlerin kanıt yapmayı öğretme becerilerinin önündeki engel, yine onların kavram ve ispata dair bilgileri olabilir (Sears,2012). Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının kanıta, kanıt yapmaya dair bilgisi kadar kendi alan eğitimleri kapsamındaki bazı bilgileri edinmiş olması gerekir. Öğretmenin sınıf içerisinde gözlemlenebilir matematik durumlarının altında yatan fikirleri, temsilleri ilişkilendirme kapsamında belirli yeterliliklere sahip olması gerekir (Ball, 2008; Tutak ve Köklü, 2016). Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının eğitim ortamında kanıtlarını sunmalarında gerekli bilgi, Ball (2008) öğretmek için matematik bilgisi modeline göre konu alan bilgisi içerisinde yer alan uzmanlık alan bilgisi kapsamında yer almaktadır.

Öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının öğrencilerle iletişim kurarak matematiksel durumların çözümüne ait düşünme biçimlerini onlara aktardıkları düşünülürse kullandıkları kanıt şemalarını uzmanlık alan bilgileri dahilinde geliştirmeleri önem taşımaktadır. Öğrencilerin rasyonel sayılar hakkındaki anlayışı matematiksel anlama ve düşünme yeteneğini kazanmaları açısından önemlidir (Behr, Harel, Khoury ve Post ,1997). Bu nedenle öğretmen ve öğretmen adaylarının rasyonel sayılar konusundaki açıklamaları ve rasyonel sayılarla işlemleri anlamlandırmalarını sağlayan kanıt yapılarının nasıl olduğu önemlidir. Bununla birlikte literatürde bu konunun kanıt şemaları bağlamında ele alınmayışının eksikliği fark edilerek çalışma rasyonel sayılar kapsamında incelenmiştir.

Amaç

Çalışmada öğretmen adaylarının ortaokul matematik eğitimi kapsamında rasyonel sayıların tanımlanması ve rasyonel sayılarla yapılan işlemlerin gerektirdiği alan eğitimine ait bilgisi üzerine hangi türde kanıt şemalarını ortaya koyduklarını araştırmak amaçlanmıştır. Çalışma kapsamı gereği şu araştırma soruları üzerine yoğunlaşılmıştır:

1. Matematik eğitimi öğretmen adayları rasyonel sayılar konusunda öğretim durumları üzerine ne tür kanıt şemalarını kullanmaktadırlar?

2. Matematik eğitimi öğretmen adayları rasyonel sayıların öğretim durumlarına ilişkin hangi matematiksel yapıları kullanmakta ve bunları kanıt olarak sunarken nasıl anlamlandırmaktadırlar?

Literatür kapsamında bu konu incelendiğinde konu kapsamındaki çalışmalar Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin kanıt şemalarının türlerini belirlemeleriyle ortaya çıkmış olup, Harel (2000) kanıt şemalarına yönelik DNR (Duality, Necessity and Repeated Reasoning) adını verdiği modelle geliştirilmiş, bu konuda Flores (2002), Knuth (1999), Martino (1999) ve daha pek çok araştırmacının ortaokul, lise düzeyinde kanıt şemalarının varlığını incelediği fark edilmiştir. Ayrıca Knuth (1999) yaptığı çalışmada öğretmen ve öğretmen adaylarının kanıt yapılarını incelemiştir. Genel olarak çalışmaların sonuçları incelendiğinde ortaokul, lise düzeyindeki öğrencilerin dışsal ve deneysel kanıt şemalarını kullandığı aktarılırken lisans düzeyindeki öğrencilerin ve öğretmen adaylarının analitik kanıt şemalarını kullandıkları belirtilmiştir.

Kanıt şemaları bağlamında yapılan çalışmaların çoğunluğu, fonksiyon, Van hiele geometri düşünme düzeyleri ve kanıtlamaya ilişkin görüşlerin açığa çıkarılmasına ilişkin olup rasyonel sayılar konusunda ve öğretmen adaylarının sahip olması gereken yeterlilikler açısından uzmanlık alan bilgisi kapsamında ele alınmaması nedeniyle bu çalışmanın literatüre katkı sunacağı düşünülmektedir.

YÖNTEM

Çalışma uzmanlık alan bilgisi kapsamında öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını ortaya koymak amaçlanmaktadır. Bu nedenle çalışma nitel araştırma yönteminde durum çalışması deseninin içerisinde bütüncül tek durum olarak ele alınmıştır. Durum çalışması nasıl ve niçin sorularını temel alan, bir yapının, olgunun ya da olayın derinlemesine incelenmesine olanak veren araştırma desenidir (Yıldırım ve Şimşek,2016). Araştırma sürecinde öğretmen adaylarıyla klinik görüşme yapılmış ve çalışma sorularına ilişkin cevaplarının bulunduğu dökümanlar analiz edilmiştir. Çalışmada klinik görüşmelerden elde edilen bulguların analizinde kanıt şemaları teorisini oluşturan kodlar kullanılarak, kanıt şemalarının karakteristiklerine göre incelenerek veriler anlamlandırılmıştır.

Araştırmanın Katılımcıları

Araştırma, 2017-2018 öğretim yılı içerisinde Abant İzzet Baysal Üniversitesi matematik eğitimi alanındaki öğretmen adaylarından üçüncü sınıf düzeyindeki üç öğretmen adayının katılımı ile gerçekleştirilmiştir. Katılımcılar belirlenirken; adayların matematik eğitimi üzerine, uzmanlık alan bilgisi kapsamında uygulamalar içeren alan eğitimi dersini almakta olan ve öğretmenlik deneyimi staj uygulamasını yapmamış adaylar arasında seçilerek ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Bu örnekleme yöntemindeki temel anlayış önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların sağlanmasıdır (Şimşek ve Yıldırım,2016).

Veri Toplama Aracı

Çalışmaya ait veriler çalışma yaprağındaki sorular ve klinik görüşmelerin yazılı dökümanlara dönüştürülmesiyle elde edilmiştir. Çalışma yaprağındaki sorular rasyonel sayılar konusunda olup, ortaokul 7. sınıf düzeyinde yer almaktadır.

Bu konu alan eğitimi kapsamında incelendiğinden kanıt yapılarını ortaya çıkarmayı amaçlayan açık uçlu sorular içeren çalışma yaprağı geliştirilmeye ihtiyaç duyulmuştur. Sınıf düzeyine bağlı rasyonel sayıların öğretimine yönelik kazanımlara göre belirlenerek öğretmen adaylarının alan eğitimi bilgisine ait uygulamalara dönük sorgulamaları içeren sorular kullanılmıştır.

Çalışma yaprağındaki sorular rasyonel sayıların tanımı, rasyonel sayılarda eksi işaretinin konumu, dört işlem, ondalık gösterim ve rasyonel sayıların karesini alma gibi matematiksel eylemlerine dair açıklamalarını nasıl kanıtladıklarını ortaya çıkarmaya yöneliktir. Soruların biçimsel anlamda yapılarının oluşturulmasında kanıt şemalarına yönelik çalışmalar incelenerek oluşturulmuştur. Bu konuda Knuth (1999) deneyimli öğretmen adaylarının kanıt şemalarını incelemeyi amaçlayan çalışmasından yararlanılmıştır.

Verilerin Toplanması ve Analizi

Görüşme yapılacak olan adaylara çalışma yaprağındaki sorular yöneltilerek cevaba ilişkin ‘Doğru olduğu kanısına nasıl vardın?’, ‘Doğruluğunu nereden biliyorsun?’, ‘Doğru olduğuna nasıl karar verdin?’ ve ‘Doğru olduğuna bizi nasıl ikna edersin?’ gibi açık uçlu sorular yöneltilerek kullandıkları kanıt şemalarının kaynakları daha detaylı olarak inceleme fırsatı yaratılmıştır. Görüşmelerin her biri yaklaşık 20 dakika sürmüş olup ses kaydı altına alınarak yazılı dökümanlar haline getirilip içerik analizi yapılmıştır.

Çalışmaya ait verilerin analizi; çalışma yaprağındaki sorulara verdikleri cevaplar ve görüşmelere ait ses kayıtlarının transkript edilmesiyle elde edilen yazılı kayıtlar üzerinden yapılmıştır. Öğretmen adaylarının rasyonel sayıların tanımı, rasyonel sayılarla dört işlem ve rasyonel sayılarla problem çözmeye yönelik sorgulamalarını içeren cevaplarında kullandıkları kanıt şemaları sorgulanmıştır.

Verilerin analizinde; teoremin kategorileri bağlamında kanıt şemalarına ait karakteristikleri içeren kod ve temalar kullanılmıştır. (Bkz.Tablo.1) Harel ve Sowder (1998) kullandığı kategoriler baz alınarak içerik analizi yapılmıştır. Kanıt şemalarına ait karakteristik özelliklere göre eylem ve sözel ifadelerin varlığı sınanarak şemalar kategorize edilmiştir. Çalışma yaprağı ve ses kayıtlarına ilişkin veriler ayrı ayrı incelenerek tutarlılıkları kontrol edilmiş ve böylece bulguların kontrolü sağlanmıştır. Ses kayıtlarının yazılı dökümanlara dönüştürülmesiyle elde edilen bilgilerle çalışma yaprağındaki sorulara verilen eş zamanlı cevapların birbiriyle uyumu doğrulanmıştır.

Tablo1. *Kanıt şemalarının karakteristiklerinin özeti (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016 s.69)*

Kanıt Şemaları	Kanıt Şemasının Karakteristiği	Gerçekleşme Metotları
Dışsal Kanıt Şemaları		
Otorite Kanıt Şeması	➢ Bir kanıtın neden doğru olduğu hakkında sebep geliştirmede yetersiz kalmak ➢ Kanıtın doğruluğunun birey tarafından belirlenememesi	➢ Teoremleri ezberlemek ➢ Formülleri uygulamak
Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması	➢ Yüzeysel deliller sunmak ➢ Bir kanıtın delilleri arasında sınırlı bağlantı kurmak	➢ Tanıdık kanıt süreçlerini kullanmak ➢ Diğer kanıt süreçlerine benzeyen süreçleri kullanmak
Sembolik Kanıt Şeması	➢ Sembollerin anlamını anlamak ➢ Sembolleri anlamsız deliller olarak sunmak ➢ Bir kanıtın sembollerin içinde olduğuna inanmak ➢ Matematiksel sembollerle kanıtlamak	➢ Matematiksel durumları sembolleri kullanarak yazmak ➢ İyi bilinen sembolik algoritmaları kullanmak ➢ Bir kanıtın ilk ve takip eden adımlarında sembolik işlemler yapmak
Deneysel Kanıt Şemaları		
Temel Örnekler Kanıt Şeması	➢ Mantıksal delillerin bulunmaması ➢ Sonuçları hızlıca yapmak ➢ Bir kanıtın doğruluğunu örneklerle belirtmek	➢ Akranlarını çizimlerle ikna etmek ➢ Bir veya daha fazla çizime odaklanarak sonuçlar çıkarmak
Sezgisel Kanıt Şeması	➢ Çizimler aracılığıyla kanıt basamaklarıyla hipotezleri ilişkilendirmek, bu süreçte mantıksal delilleri göz ardı etmek ➢ Bir kanıtın doğruluğunu çizimlerle belirtmek	➢ Örnekler göstererek diğerlerini ikna etmek ➢ Bir kanıtı örnekler göstererek oluşturmak
Analitik Kanıt Şemaları		
Dönüştürülebilen Kanıt Şeması	➢ Tutarlı basamaklar oluşturmak ➢ Bir kanıtın önceki durumlarına mantıklı kurallar uygulamak	➢ Temel konuyu belirlemek ➢ Akıl yürütmeyle diğerlerini ikna etmek
Aksiyomatik Kanıt Şeması	➢ Tanımsız terimlerle sınırlı bir küme kurmak ➢ Lineer metotları kullanarak kanıtlamak ➢ Geleneksel kanıt süreçlerini kullanmak	➢ Aksiyomatik bir sistem geliştirmek ➢ Bir teoremi aksiyomatik sistemi kullanarak kanıtlamak

Araştırmada Geçerlik ve Güvenirlik

Çalışmanın katılımcıları etik kurallar çerçevesinde araştırmanın amacı hakkında bilgilendirilmiştir. Katılımcılar gönüllü olarak çalışmaya katıldıklarını belirtmişlerdir. Transkript ve çalışma yaprağındaki cevapların tutarlılığı sınanarak gerekli görüldüğü kısımlarda katılımcılara dönüş yapılarak soruya ait ifadeleri hakkında yorumları alınmış ve veriler daha açık hale getirilmiştir. Çalışmaya ait veri toplama sürecinde araştırmacı katılımcı gözlem rolünde soruları yönelterek hiçbir problemle karşılaşılmamıştır.

Veri çeşitlemesi yapılarak iki farklı teknik olan görüşme tekniği ve doküman analizinin birbirini teyidine bakılmıştır. Araştırmada elde edilen veriler ve araştırmacının ulaştığı bulgular katılımcılar ile paylaşılarak onların da onayladığı görülmüştür. Katılımcıların bulguların doğruluğuna ilişkin yorumları alınmıştır. Araştırmanın aktarılabilirliğini artırmak adına ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Katılımcıların cevapları kanıt şemalarına yönelik çalışmalar incelenerek diğer çalışmalarla aynı kategorize etme sürecinden geçirilmiştir.

BULGULAR ve YORUM

Çalışmaya dair yapılan görüşme ve dökümanların analiziyle elde edilen bulgular, görüşme kayıtlarından aktarımlar ve soru yaprağındaki cevapların görselleriyle desteklenmiş biçimde sunulmuştur. Öğretmen adaylarının rasyonel sayılar konusu üzerine kullandıkları kanıt şemalarına dönük ifadeler her bir katılımcı bağlamında ayrı ayrı ele alınmıştır.

Öğretmen Adayı Burcu'nun Kullandığı Kanıt Şemalarına İlişkin Bulgular

Burcu, matematik eğitimi öğretmen adayı olup üçüncü sınıf düzeyindedir. Uzmanlık alan bilgisi kapsamında alan eğitimi dersini almaktadır. Matematik eğitiminde problem durumlarının kanıtlanmasına yönelik düşüncelerini ifade yeteneği kuvvetli olduğu düşünüldüğünden çalışmaya dahil edilmiştir. Görüşme öncesinde soruları yanıtlamaya yönelik rahat ve özgüvenli olduğu gözlemlenmiş ve cevaplara ait düşüncelerini açık bir şekilde ifade etmiştir.

$\frac{a}{1}$ İfadesinin her zaman rasyonel olup olmayacağı sorusu yöneltilerek rasyonel sayıların tanımı üzerine matematiksel açıklamalar incelenmiştir. Bu soruyla ilgili öğretmen adayı ile araştırmacı arasında şöyle bir diyalog geçmiştir:

A: *Cevabının doğruluğuna nasıl emin oldun?*

ÖAB: *$\frac{a}{1}$ ifadesinde eğer a sayısı rasyonel bir sayıysa $\frac{a}{1}$ rasyonel sayıdır. Çünkü bir sayının bire bölümü her zaman kendisini verir. Bu yüzden a rasyonel olduğu sürece $\frac{a}{1}$ rasyonel bir sayıdır.*

A: *Cevabının doğru olduğunu düşünüyorsun?*

ÖAB: 'a' koşullu olarak doğru olduğunu düşünüyorum. Eğer a rasyonel bir sayıysa doğru.

A: *Bunu kafandaki hangi bilgiye dayanarak söylüyorsun?*

ÖAB: *İlk baktığımda 'a' yı direk mesela doğal sayı olarak aldım. Sıfır gibi. Pardon daha doğrusu tam sayı olarak geldi aklıma. Ama sonra dedim ki mesela bu ayrıca bir kesirli ifade de olabilir dedim. Mesela.$\frac{\frac{1}{2}}{1}$ Yine şey olur. Ama rasyonel sayı olursa rasyonel olur.* ***Sonra karmaşık sayılar geldi aklıma hani sayılar kümesini düşündüm****. Mesela a karmaşık bir sayıysa yine bir karmaşık sayıya eşit olur. O zamanda irrasyonel olur. O yüzden a ya bağlı olaraktan.*

Çalışma kağıdındaki ifadeleri net olan öğretmen adayımız başta a için koşullu bir durum oluştuğunu ifade etse de aslında doğal sayılardan, tam sayılara geçiş yaparak kesirli bir ifadede olabileceği tahminlerinde bulunmuştur. Daha sonra aksi bir örnek olarak karmaşık sayılar ve irrasyonelik ilişkilerine ulaşarak a ya bağlı değişebileceğini savunmuş ve sayıdan sayılar kümesine doğru bir yol izleyip mantıksal çıkarımda bulunmuştur.

Öğretmen adayı Burcu 'ya rasyonel sayılarda eksi işaretinin kullanımı ile ilgili bir soru yöneltilmiştir. Soruya cevap verirken her işlemin farklı olduğunu söyleyerek işleme vurgu yaparak bir örnek üzerinden açıklamıştır.$-\frac{a}{b}$ ifadesinde a ve b yerine örnek olabilecek sayılar yerleştirerek ispatlamaya çalışmış ve bununla birlikte aslında oradaki sayılardan ziyade – ve + matematiksel sembollerine vurgu yapan yorumlarda bulunmuştur.

A: *Soruya ait cevabının doğruluğuna nasıl emin oldun?*

ÖAB: *ikinci soru hakkında şunu düşündüm. Bu eşitlik doğru. Her eşitlikte yapılan işlem farklı ama hepsinin ifade ettiği sonuç aynı.* ***Mesela ben burada bir tane örnek verdim.*** *Örneğin $\frac{-8}{4}$ hani şuradan da şeyi var. (Çözümü gösteriyor) Bu şekilde yaptım 2'yi buldum. İşlemin başında da eksi olduğu için -2 oluyor. -8 sayısını 4'e böldüm. Her grupta -2 oldu.*

A: *Burada eksi eksi artı artı diye neyi kastettin?*

ÖAB: *Kastım şu mesela; hani şu eksi eksi kesrin başında ya eksi olduğu için -2 buldum. Ama $\frac{8}{-4}$ istediğim gibi* ***modelleyemedim****. Aynı şekilde de -8 sayısını 4'e böldüm.*

Journal of EducationalSciences

Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Eğitim Bilimleri Dergisi, Sayı: Aralık, 2018, 9(2), Sayfa: 119-136
http://dergipark.gov.tr/aduefebder

Burcu çözümü yaparken rasyonel ifadeyi sayı olarak düşünmek yerine kesir çizgisine yüklediği bölme anlamında değerlendirdi. Değerlendirirken a ve b değerleri için sayılar deneyerek sonucun doğruluğunu ifade teme istedi. Sayılara ait olduğunu düşündüğü + ve – matematiksel sembolleri ayrı olarak yazıp grupladı ve çözümü anlatan ifadelerinde sıklıkla bu işlem sembollerini kullandı.

Matematiksel durum olarak rasyonel sayılar verilerek karşılaştırması istendiğinde Burcu; çeyrek, yarım gibi kavramları kullanmanın yanı sıra yorumlarında bu kavramların çağrıştırdığı zihinsel görsel algılardan bahsederek bu görsellerle cevabın doğruluğuna inandığını anlatmıştır.

A: *Burada sayıları karşılaştırman isteniyor, nasıl bir yöntem kullandın? Cevabının doğruluğunu nereden biliyordun?*

ÖAB*: Rasyonel sayılarda hani burada* $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ *rasyonel sayıları var, bunların nelere karşılık geldiğini yazdım öncelikle. Hani* $\frac{1}{2}$ *yarıma,* $\frac{3}{4}$ *üç çeyreğe,*$\frac{2}{3}$ *yarımdan büyük ama üç çeyrekten küçük bir büyüklüğe karşılık* geliyor. Bunların zaten *büyüklüklerini karşılaştıracağımız için iki çeyrek küçük üç çeyrekten,*$\frac{2}{3}$ *de küçüktür bu şekilde karar verdim.*

A: *Neyi düşünerek o karşılıkları buldun?*

ÖAB: *aslında mesela hani* ***yarımı bulurken daire dilimini****, üç çeyrekte* ***de daire dilimini*** *ama,* $\frac{2}{3}$ ***için için daha çok bir sayı doğrusu gibi, bir dikdörtgen prizması gibi bir şey****. Onu hani mesela, üçe böldüm karşılığında onun karşılığı gibi. Onu göstererek büyüklüklerini karşılaştırdım.*

Burcu çözümünü anlatırken zihninde yer alan görsel algılardan bahsetmiş ve o görsel algılar üzerinde değerleri belirleyerek karşılaştırma yaptığını ifade etmiştir.

Öğretmen adayına sorulan sorulardan biri de $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ ifadesinin doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlamasıdır. Burcu a ve b yerine sayı değerleri vererek örnek üzerinden açıklama yolunu tercih etmiştir.

A*: Evet bu ifadenin doğruluğunu nasıl kanıtladın?*

ÖAB*:* ***Örnek vererek kanıtladım.***

A*: (açıklama beklediğini belli ederek) örnek vererek kanıtladın?*

ÖAB*: (özgüvenli bir ses tonuyla) Aynen* ***'a' yerine -4 'b' yerine -2 sayısını verdim****. Eşitliğin sol tarafıyla 4 cevabını buldum. Sağ tarafıyla yine 4 cevabını buldum. Bu yüzden de bu ifade doğru dedim.*

Öğretmen adayının sorulara verdiği yanıtlardan yola çıkarak ulaşılan kanıt şemalarına ilişkin diğer detaylar Tablo 2 ile açıklanmıştır.

Tablo 2. *Öğretmen adayı Burcu'nun kullandığı kanıt şemalarına ilişkin bulgular*

Öğretmen adayı Burcu'ya yöneltilen sorular	Kullandığı Kanıt şeması türü	Kanıt şemasını belirleyen çözümün karakteristikleri
1. $\frac{a}{1}$ *ifadesi her zaman rasyonel bir sayıyı ifade eder mi? Cevabınızın doğruluğuna nasıl emin olduğunuzu açıklayınız.*	Dönüştürülebilen Kanıt Şemaları	Özelden genele düşünüp sayılar kümesinden genel çıkarımlara ulaşmak

2. $\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ eşitliğinin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında ne düşünüyorsunuz? Nasıl bu kanıya vardığınızı ispat ediniz.	Örnek Temelli Kanıt Şeması	Rasyonel sayılarda bilinmeyen ifadelere farklı sayılar yerleştirerek örnek üzerinden açıklamak
3. $\frac{24}{25}$ rasyonel sayısını ondalık gösterimle ifade ediniz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.	Dönüştürülebilen kanıt şeması	Ondalık gösterimle ilgili tanım ve kavramları işlemlerle destekleyip rasyonel sayılarla ilişkilendirmek
4. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ rasyonel sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız. Karşılaştırırken kullandığınız yöntemin doğruluğuna nasıl karar verdiğinizi açıklayınız.	Algısal Kanıt Şeması	Sayıları karşılaştırmada daire gibi görsel kavramları düşünce kaynağı olarak göstermek
5. Aşağıdaki işlemleri yapınız. a) $\frac{2}{6} + \frac{3}{12} =$ $\quad$ $\frac{3}{12} + \frac{2}{6} =$ b) $\frac{2}{6} + \left(\frac{3}{12} - \frac{1}{4}\right) =$ $\quad$ $\frac{3}{12} + \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{4}\right) =$	Otoriter Kanıt Şeması	Rasyonel sayılarla dört işlemde sonucun doğruluğunu kurallara bağlamak
6. $\frac{1}{4} \div \underset{(2)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$ Yukarıdaki ifadede bir öğrenci rasyonel sayılarla bölme işlemini yapmıştır. Rasyonel sayılarla Bölme işlemini yaparken payda eşitleyerek cevaba ulaşmıştır. Cevapla ilgili ne söylersiniz ve sizce cevap nasıl olmalıdır nedeniyle birlikte açıklayınız.	Sembolik Kanıt şeması	Problemin çözümünde ÷ sembolü yerine / kesir ifadesi şeklinde yazarak doğru çözüme ulaşmak
7. Aşağıdaki dikdörtgenin alanını bulunuz. 	Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması	Daha önce kullanılan yöntem kullanılarak (tam sayılı kesrin bileşik kesire çevirilerek doğru sonuca ulaşılması
8. $\left(\frac{a^2}{b^2}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ ifadesinin doğruluğunu ispatlayınız	Örnek Temelli Kanıt Şeması	Sayılar yerleştirerek örnek üzerinden kanıtlamak
9. Sütün kütlesinin $\frac{1}{6}$ sı kadar kaymak, kaymağın kütlesinin $\frac{1}{6}$ sı Kadar tereyağı elde ediliyor. Buna göre 1 kilogram tereyağı elde etmek için Kaç kg süt gerekir açıklayınız ve cevabınızın neden doğru olduğunu ifade ediniz.	Aksiyomatik Kanıt Şeması	Denklem yapılarını kullanarak genel bir sistem geliştirip kanıt süreci kullanmak

Journal of EducationalSciences
Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Eğitim Bilimleri Dergisi, Sayı: Aralık, 2018, 9(2), Sayfa: 119-136
http://dergipark.gov.tr/aduefebder

Öğretmen Adayı Hümeyra'nın Kullandığı Kanıt Şemalarına İlişkin Bulgular

Öğretmen adayı Hümeyra görüşme öncesinde oldukça heyecanlıydı, soruları kâğıt üzerinde detay vererek düzenli bir şekilde yazdığı gözlemlendi. Ek olarak cevabını savunurken mantıklı açıklamalarda bulunmasına rağmen eksik hissettiği noktada ulaştığı bilgiyi ders kapsamında öğrendiğini belirtti. Eksinin rasyonel sayılarla kullanımı üzerine sorulan soruyu şöyle yanıtladı:

A: *2. Soru için ne düşünüyorsun?*

ÖAH*: İkinci soruda bu ifadede aslında birbirine eşit.*

A*: Nasıl vardın bu kanıya?*

ÖAH: *Büyüklük açısından birbirine eşittir. Ama şimdi* $-\frac{a}{b}$ *, bu* $\frac{a}{b}$ *kesrinin önüne eksi gelmiştir. İkincisine baktığımızda –a sayısının b sayısına bölümü üçüncüsünde de a sayısının –b ye bölümü şeklinde verilmiştir. Ama dediğim gibi bunların büyüklükleri eşittir.*

A: *Birbirine eşit olduğunu düşünüyorsun.*

ÖAH: Ama anlamları farklıdır.

A: *anlamları derken neyi kastediyorsun?*

ÖAH*: ya şey açısından mesela* $-\frac{a}{b}$ *,* $\frac{a}{b}$ *kesrinin önüne gelmesi farklı bir şey bir de –a sayısının b ye bölümü şeklinde farklı bir durum söz konusu.*

A*: Peki.*

ÖAH*: Bölmenin anlamları ile alakalı bir şey ondan bahsetmeye çalışıyorum aslında.*

A*: Bölmenin anlamlarından bahsediyorsun, cevabının doğruluğunu neye bağlıyorsun?*

ÖAH*: Dediğim gibi* ***ya işaretlerin bulunduğu yerler ve bölmenin anlamından kaynaklandığı*** *için böyle düşünüyorum.*

Bu çözüm için Hümeyra çözümünün doğruluğunu ispat etmeye çalışırken, rasyonel sayıları bölme durumunda yer alan iki sayı yani kesir ifadesi şeklinde düşünmekte ve bölme çizgisi ve farklı yerlerde yer alan eksi işaretlerini kaynak olarak göstermiştir. Ama bölmenin anlamlarına vurgu yaparak iki farklı sayı olarak ifade edildiğinde farklı olacağını belirtmiştir.

Öğretmen adayına rasyonel sayılarda üs alma ile ilgili $\frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ bu eşitliği kanıtlaması istendiğinde üs almanın tersi olarak karekök ifadesini düşündüğünü belirtmiştir.

A: *Evet burada bir eşitlik verilerek doğruluğunu ispatlamanız istenmiş ne düşündün bununla ilgili?*

ÖAH*: Bununla ilgili şey düşündüm. Ben bununla ilgili ilk önce* ***bu iki ifadeyi kök içine aldım****. Daha sonra kök içine aldığımda şu şekilde oluyor (çözümü işaret ederek). Daha sonra bunu a üzeri 2 x* $\frac{1}{2}$ *olarak yazdım b yi de aynı şekilde.*

A: *Neden öyle yazdın?*

ÖAH: *Birbirine... kök şeyi… kökü yazarken ½ şeklinde yazabiliyorum. Onu yazdığımda da a üzeri* $2 \times \frac{1}{2}$ *oldu. İkiler birbirini götürdüğünde a sayısı ve b sayısı* $\frac{a}{b}$ *sayısını elde ediyorum. Sağ tarafa baktığımda ise yine* $\frac{a}{b}$ *sayısının karesiydi, kök içine aldığımdan dolayı yine aynı şekilde yazdım ve* $\frac{a}{b}$ *sayısı geldi.* ***Ama biz burada a ve b sayısının pozitif ve negatifliği hakkında bir bilgiye sahip değiliz.*** *O yüzden bu durum sıkıntı yaratabilir.*

A: *Nasıl bir sıkıntı yaratabilir?*

ÖAH*: Kökten çıkarkenki önüne aldığı işaretten dolayı.*

A: *Özet olarak cevabın neden doğru sence?*

Journal of EducationalSciences

Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Eğitim Bilimleri Dergisi, Sayı: Aralık, 2018, 9(2), Sayfa: 119-136
http://dergipark.gov.tr/aduefebder

ÖAH: *Her iki ifade de* ***üs almanın tersi olarak kök içerisine alındığında*** *kareler ile üsler birbirini götürdüğünde her iki ifade de $\frac{a}{b}$ haline dönüştüğünden doğrudur.*

Öğretmen adayı bu soruyu çözerken sayılar denemek yerine a ve b bilinmeyenleri karekök içerisine almış ve işlemsel süreci gerçekleştirmiştir. Daha sonrasında $\frac{a}{b}$ ifadesine genelleme yaparak ve a ve b sayılarının pozitif ve negatifliğine yönelik mantıksal açıklamalar yaparak ispatını açıklamıştır. Öğretmen adayının cevaplarına ilişkin belirlenen kanıt şemalarına ait diğer bulgular Tablo 3'te aktarılmıştır.

Tablo 3. *Öğretmen adayı Hümeyra'nın kullandığı kanıt şemalarına ilişkin bulgular*

Öğretmen adayı Hümeyra'ya yöneltilen sorular	Kullandığı Kanıt şeması türü	Kanıt şemasını belirleyen çözümün karakteristikleri
1. $\frac{a}{1}$ *ifadesi her zaman rasyonel bir sayıyı ifade eder mi? Cevabınızın doğruluğuna nasıl emin olduğunuzu açıklayınız.*	Analitik kanıt şeması	a sayısının rasyonelliğine göre karar verebileceği yönünde mantıklı açıklamalar yapmak
2. $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$ *eşitliğinin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında ne düşünüyorsunuz? Nasıl bu kanıya vardığınızı ispat ediniz.* .	Sembolik Kanıt Şeması	Sayının farklı yerlerdeki eksi sembollerinin varlığından anlamsal olarak etkileneceğine vurgu yapmak
3. $\frac{24}{25}$ *rasyonel sayısını ondalık gösterimle ifade ediniz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.*	Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması	Daha önce kullandığı payda eşitleme yolunu kullanarak doğru cevaba ulaşmak
4. $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}$ *rasyonel sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.* Karşılaştırırken kullandığınız yöntemin doğruluğuna nasıl karar verdiğinizi açıklayınız.	Dönüştürülebilen Kanıt Şeması	Farklı yollardan ulaşabileceğini belirterek kesirleri genelleyerek 1'e yakınlık mantıksal çıkarımı içerisinde ele almak
5.Aşağıdaki işlemleri yapınız. a) $\frac{2}{6}+\frac{3}{12}=$ $\frac{3}{12}+\frac{2}{6}=$ b) $\frac{2}{6}+\left(\frac{3}{12}-\frac{1}{4}\right)=$ $\frac{3}{12}+\left(\frac{2}{6}-\frac{1}{4}\right)=$	Otoriter Kanıt Şeması	Kural ve özelliğe bağlı olarak cevaba ulaşmak ve bu yönde açıklamalarda bulunmak
6. $\frac{1}{4}\div\underset{(2)}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{2}=\frac{1}{2}$ Yukarıdaki ifadede bir öğrenci rasyonel sayılarla bölme işlemini yapmıştır. Rasyonel sayılarla Bölme işlemini yaparken payda eşitleyerek cevaba ulaşmıştır. Cevapla ilgili ne söylersiniz ve sizce cevap nasıl olmalıdır nedeniyle birlikte açıklayınız.	Sembolik Kanıt şeması	Bölme sembolünün anlamı üzerine yoğunlaşarak çözümü şekillendirmek
	Algısal Kanıt Şeması	Tam sayılı ifadeyi 1+2/5 şeklinde yazarak

Journal of EducationalSciences
Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Eğitim Bilimleri Dergisi, Sayı: Aralık, 2018, 9(2), Sayfa: 119-136
http://dergipark.gov.tr/aduefebder

7.Aşağıdaki dikdörtgenin alanını bulunuz. 		farklı biçimde ifade ile çözmek
8. $\left(\frac{a^2}{b^2}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ ifadesinin doğruluğunu ispatlayınız	Dönüştürülebilen Kanıt Şeması	Üs ifadesinin tersi olarak karekök kavramına ulaşıp işlemsel süreçlerin genellenmesiyle cevaba ulaşmak
9. Sütün kütlesinin $\frac{1}{6}$ *sı kadar kaymak , kaymağın kütlesinin* $\frac{1}{6}$ *sı* Kadar tereyağı elde ediliyor. Buna göre 1 kilogram tereyağı elde etmek için Kaç kg süt gerekir açıklayınız ve cevabınızın neden doğru olduğunu ifade ediniz.	Aksiyomatik Kanıt Şeması	Cebire ait yapılar ile sistem geliştirip mantıksal ilişkilere yoğunlaşarak cevabı doğru olduğunu düşünmek

Öğretmen Adayı Sümeyye'nin Kullandığı Kanıt Şemalarına İlişkin Bulgular

Sümeyye'nin görüşmenin ilk kısmında rahat olduğu gözlemlendi ve çalışma yaprağındaki soruları hızlıca yanıtladı. Sorulara verdiği cevaplar incelendiğinde genel anlamda kural ve özellikleri kullanarak çok fazla detaya girmeden kısa yanıtlar şeklinde düşüncelerini aktardığı gözlemlendi. Çalışmanın sonunda da soruları cevaplarken zorlandığını rasyonel sayılarla ilgili bu durumları sorgulamadan öğrendiğini üniversite öncesindeki eğitim ortamında öğretmenin aktardıklarını sorgulamadan kabul ettiğini itiraf etti.

Sümeyye rasyonel sayının tanımına yönelik sorulan $\frac{a}{1}$ ifadesi her zaman rasyonel sayı mıdır sorusuna yönelik olarak şu cevapları aktardı:

A: *İlk soruyu anladın mı?*

ÖAS: *Anladım.*

A: Ne anladın ilk sorudan?

ÖAS: *İlk soruda bir a ifadesinin 1'e bölümündeki sayının her zaman rasyonel olup olmadığını soruyor.*

A: *Peki cevabının doğru olduğunu mu düşünüyorsun?*

ÖAS: *(gayet emin bir tavırla) Evet cevabımın doğru olduğunu düşünüyorum.*

A: *Bunu neye bağlıyorsun?*

ÖAS: *Çünkü **her zaman yaptığım gibi düşündüğüm gibi düşünürüm. Hep deneme yanılma yolunu**. Aksini ispat ettiğimde mesela* $\frac{1}{3}$ *tamam rasyonel sayı ama* $\frac{\sqrt{2}}{1}$ *rasyonel sayı olmadığı için bu yanlıştır. **Aksine bir örnek verdiğimi düşündüğüm için yanlıştır.***

Burada öğretmen adayı çözümünün doğruluğunu kullandığı yöntemin doğruluğuna dayandırmıştır. Aksine ispat örneğini hep yaptığını ve bu soru için de kullanabildiği için çözümün doğru olduğuna ikna etmek istemiştir.

Yine başka bir soruda $\frac{24}{25}$ sayısını ondalık gösterimle ifade etmesi istenmiş ve sonucun doğruluğu konusunda açıklamaları incelenmiştir.

A: *Doğru olacağı kanısına nasıl vardın?*

***ÖAS**: Ya artık şey bu tarz sorular sınav sistemimizde çok fazla olmasından kaynaklı oradan düşündüm.*

***A**: Nereden öğrendiğini düşünüyorsun?*

***ÖAS**: **Ezber bilgi**. Ama bunu modelleyerek de yapabilirim.*

***A:** Biraz açabilir misin modelleyerek yapabilirim derken?*

***ÖAS:** $\frac{25}{24}$ **ü şekil üzerine çizip** daha sonra 25'lik kısmı 4'e bölüp yapılabilirdi.*

Sümeyye'nin ifadelerinde ezber bilgi olduğundan otorite kaynaklı bu cevabı verdiği anlaşılsa da aslında sezgileriyle hareket ettiği ve algısal zihinsel alanda çizdiği şekil üzerinde yaptığı parçalara ayırma yöntemiyle doğruluğu kanıtlayabileceğini belirtmiştir. Öğretmen adayına ait diğer bulgular özetlenerek Tablo 4'te ifade edilmiştir.

Tablo 4. *Öğretmen adayı Sümeyye'nin kullandığı kanıt şemalarına ilişkin bulgular*

Öğretmen adayı Sümeyye'ye yöneltilen sorular	Kullandığı Kanıt şeması türü	Kanıt şemasını belirleyen çözümün karakteristikleri
1. $\frac{a}{1}$ ifadesi her zaman rasyonel bir sayıyı ifade eder mi? Cevabınızın doğruluğuna nasıl emin olduğunuzu açıklayınız.	Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması +algısal kanıt şeması	Her zaman aksine ispat yaparak çözdüğünü iddia etmesi
2. $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$ eşitliğinin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında ne düşünüyorsunuz? Nasıl bu kanıya vardığınızı ispat ediniz. .	Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması	Rasyonel sayıların önündeki eksiyi -1 ile çarpmak Olarak düşünüp doğru cevaba ulaşacağını iddia etmek
3. $\frac{24}{25}$ rasyonel sayısını ondalık gösterimle ifade ediniz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.	Dönüştürülebilen Kanıt Şeması +algısal kanıt şeması	Orantısal akıl yürütme yoluyla çizimleri de dahil ederek sonuca ulaşmak
4. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ rasyonel sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız. Karşılaştırırken kullandığınız yöntemin doğruluğuna nasıl karar verdiğinizi açıklayınız.	Algısal Kanıt Şeması + Örnek temelli Kanıt şeması	Pasta dilimi görseli yardımıyla çözdüğünü ifade etmek ve örnekler sunarak karşılaştırmak
5.Aşağıdaki işlemleri yapınız. a) $\frac{2}{6}+\frac{3}{12}=$ $\frac{3}{12}+\frac{2}{6}=$ b) $\frac{2}{6}+\left(\frac{3}{12}-\frac{1}{4}\right)=$ $\frac{3}{12}+\left(\frac{2}{6}-\frac{1}{4}\right)=$	Otorite Kanıt Şeması	İlkokulda öğrendiği bilgileri, öğretmeni otorite göstererek çözmek

6. $\frac{1}{4} \div \frac{1}{\underset{(2)}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$ Yukarıdaki ifadede bir öğrenci rasyonel sayılarla bölme işlemini yapmıştır. Rasyonel sayılarla Bölme işlemini yaparken payda eşitleyerek cevaba ulaşmıştır. Cevapla ilgili ne söylersiniz ve sizce cevap nasıl olmalıdır nedeniyle birlikte açıklayınız.	Dönüştürülebilen Kanıt Şeması	Payda genişletilmesiyle katının alındığını cevabın doğru olduğu fikrine mantıksal açıklamalarla cevabı oluşturmak
7.Aşağıdaki dikdörtgenin alanını bulunuz. 	Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması	'her zamanki gibi' ifadesiyle daha önceki çözüm yolunu kaynak göstererek çözmek
8. $\left(\frac{a^2}{b^2}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ ifadesinin doğruluğunu ispatlayınız	Sembolik Kanıt Şeması	Parantezin etkilemediğini söyleyerek sembollere inanarak cevaplamak
9. Sütün kütlesinin $\frac{1}{6}$ *sı kadar kaymak , kaymağın kütlesinin* $\frac{1}{6}$ *sı* Kadar tereyağı elde ediliyor. Buna göre 1 kilogram tereyağı elde etmek için Kaç kg süt gerekir açıklayınız ve cevabınızın neden doğru olduğunu ifade ediniz.	Aksiyomatik Kanıt Şeması	Cebirsel yapıları geliştirip ilişkisel durumları mantıksal açıklamalar çerçevesinde açıklamak

SONUÇ ve TARTIŞMA

Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının ortaya koydukları kanıt şemaları incelendiğinde analitik kanıt şemalarının ağırlıkta olduğu görülmekle birlikte bunun yanında sembolik, algısal ya da alışkanlık edinilmiş kanıt şemaları da kullandıkları gözlemlenmiştir.

Öğretmen adaylarının yorumlarını alan eğitimi dersi kapsamında değerlendirecek olursak rasyonel sayının tanımlanmasına yönelik soruda özelden genele doğru geçiş yaparak sayılardan, sayılar kümesini düşünüp ilişkilendirme ve tahminlerini akıl yürütme becerilerini kullanarak genel bir matematiksel çıkarım üzerinde sabitleyerek analitik kanıt şemalarından dönüştürülebilen kanıt şemalarını kullanmışlardır.(Bkz. Tablo 2) Harel& Sowder (1998)' e göre dönüştürülebilen kanıt şemalarında çözüme yönelik yapılan işlemler dönüşümsel gözlemlere dönüşür ve amaca ulaştırır. Burada da farklı sayılarla denenmesi verilen değerin şeklinin dönüşümü ile rasyonel mi yoksa irrasyonel mi ifadeye ulaştıracağı konusunda genelemeye ulaştırarak cevabın doğruluğu katılımcılar tarafından ispatlanmıştır.

Rasyonel sayılarda eksi işaretinin konumuyla ilgili ilişkilendirmelerde öğretmen adayları ifadelere sayı değeri vererek örnek üzerinden rasyonel sayıyı kesir ifadesi olarak değerlendirmiş, kesir çizgisi ve +,- gibi matematiksel semboller aracılığıyla anlamlandırmaya dair eylemler gözlemlenmiştir (Bkz. Tablo 2.). Burada kesir çizgisi sembolüne yüklenen bölme anlamı ve eksi artı sembolleri ile ayrı ayrı denemesi sembolik kanıt şemasını kullandığına işaret etmiştir. Sembolik akıl yürütme eğitim hayatında edinilen zihinsel bir alışkanlık olduğundan öğrencilerin vazgeçemediği bir durumdur (Harel ve Sowder, 1998; Aydoğdu İskenderoğlu, 2016). Öğretmen adaylarından bazıları rasyonel sayılarda eksi işaretinin kullanımına dair bilgilerini sorgulamayı gerektiren soruda üç ifadenin de birbirine eşit olduğunu ifade etmişlerdir.'a' ve 'b' ifadelerini ayrı ayrı sayılar olarak değerlendirip kesir çizgisini bölme olarak anlamlandırmışlardır. Rasyonel sayılarda eksi işaretinin konumuna dair mantıksal çıkarımlara ulaşarak eşitliği ispat etmeye çalışmışlardır. Bu yorumlardan farklı olarak büyüklük aynı olsa da eksi işaretinin bulunduğu konumun anlamsal olarak farklılıklar yaratacağını söyleyerek rasyonel sayı yerine sembole odaklanmışlardır. Bu bakış açısı ve eylemleri doğrultusunda öğretmen adaylarının kanıt yapıları arasında sembolik kanıt şemalarına da rastlanmaktadır. (Bkz. Tablo 3)

Öğretmen adaylarının rasyonel sayıların karşılaştırılmasını içeren soruda, sayıları yarım çeyrek gibi kavramlarla benzer şekilde ilişkilendirmeler yaptıkları görülmüştür. Yapılan ilişkilendirmelerle cevapların doğruluğunu; daire dilimi, sayı doğrusu ve dikdörtgenler prizması gibi algılarındaki görsel varlıklara bağlayarak kanıtlamışlardır. Bu durum kanıt şemalarının karakteristiklerine göre değerlendirildiğinde; kanıtlar zihinsel gösterimlere ve algısal çizimlere bağlandığından algısal kanıt şemalarını kullandıkları gerçeğini ortaya koymuştur.

Adaylara yöneltilen $\frac{a^2}{b^2} = (\frac{a}{b})^2$ ifadesinin kanıtlanmasında ise yine a ve b yerine değerler vererek örnekler üzerinden kanıtlama yöntemini izlemeleri, verdiği sayı değerlerinin eşitliğin her iki tarafını da doğruladığı açıklamalarını savunarak kanıt yapmaya yönelik eylemleri örnek temelli kanıt şemasının varlığını açığa çıkarmıştır.

Ortaokul matematik eğitimi üzerine rasyonel sayıların karesinin küpünün alınmasına dair savunmalarını teoremden faydalanarak; işlemsel süreç, ilişkisel anlamlandırma ve genellemelere ulaşarak kanıtlayan öğretmen adayları analitik kanıt şemalarına örnek sunmuşlardır.

Rasyonel sayının tanımı ile ilgili cevaplar kanıt şemalarının karakteristiği bağlamında değerlendirildiğinde; her zaman o yöntemi kullandıklarını ifade etmeleri, cevabın formuna dikkat çekmeleri ve aynı cevapta şekil üzerinden de ispat edebileceğinin aktarılması ise alışkanlık edinilmiş kanıt şeması ile algısal kanıt şemasını birlikte kullandıklarını göstermiştir. Öğretmen adaylarının kendilerini eksik hissettikleri bazı noktalarda farklı öğrenim dönemlerindeki matematik öğretmenlerinin sorgulama için yeterince fırsat vermediğini söyleyerek soruları cevaplarken zorlandıklarını ifade etmişlerdir.

Sonuçta araştırmanın amacına bağlı olarak öğretmen adaylarının dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarından üç türdeki şemaları kullandıkları görülmüştür. Ama ağırlıklı olarak dönüştürülebilen, algısal ve sembolik kanıt şemaları rasyonel sayılar konusunun öğretimi üzerine kullanmışlardır. Çalışma sonuçları açısından öğretmen adaylarında analitik kanıt şemalarına rastlanması açısından kanıt şemaları üzerine bulguları diğer çalışmalarla benzerlik göstermiştir.

ÖNERİLER

Kanıt şemaları genel anlamda öğrencilerin kavram yanılgılarının ortaya çıkmasını sağlamaktadır, semboller ve algoritmaların daha anlamlı şekilde kullanılmalarını sağlamakta ve ezber bilgiden ziyade öğrencilerin düşüncelerinin gelişimine katkı sunmaktadır. Öğretmenlerin de öğrencilere ait kanıt yapılarının gelişiminde etkili olduğu düşünülerek bu konuda şu öneriler dikkate alınabilir.

1. Öğrencilerin bu becerilerinin gelişiminde matematik öğretmenlerinin konu ile ilgili uzmanlık alan bilgisi ve kanıt yapmaya yönelik bilgisi etkili olduğundan öğretmen adaylarının kanıt yapılarının geliştirilmesi için araştırmalar yapılabilir.
2. Başka bir çalışma için farklı düzeydeki öğretmen adaylarının katılımı ile gerçekleştirilebilir. Öğretmen adaylarının öğretmenlik deneyimleri gözlemlenerek uygulamadaki yansımaları incelenebilir.
3. Öğretmen adaylarının kullandığı kanıt şemalarına yönelik uygulamalar farklı dersler kapsamında ele alınarak kanıt şemalarının oluşumunda öğrencileriyle olan iletişimi gözlemlenerek bu sürecin nasıl geliştiğine dair araştırmalarda bulunulabilir.
4. Öğretmen yeterlilikleri bazında öğretmen adaylarının kanıt şemalarının gelişimine yönelik müfredat ve program incelenebilir.

KAYNAKLAR

Agee, J. (2009). Developing qualitative research questions: a reflective process. *International Journal Of Qualitative Studies İn Education*. 22(4),431-447. doi:10.1080/09518390902736512

Akkuş, R. ve Ertuna, L. (2010). Öğrencilerin problem çözme sürecinde kullandıkları gerekçelendirme türleri ve seviyeleri. *9 Nisan 2018 tarihinde https://www.researchgate.net/publication/312211540 sitesinden alınmıştır.*

Altun, M. ve Aşkar, P. (2007). Undergraduate students' mathematical proof processes in a calculus course: a case study. *Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences, 40 (2),* 295-319.

Atwood, P. R. (2001*). Learnıng to construct proofs in a first course on mathematical proof.* (Doktora tezi). ProQuest Dissertations and Thesis veri tabanından erişildi. (UMI No. 3020223)

Aydoğdu, T., Olkun, S. ve Toluk, Z. (2003). İlköğretim 6,7 ve 8 sınıf öğrencilerinin matematik problemlerine ürettikleri çözümleri kanıtlama süreçleri. *Eurasian Journal Of Educational Research.*

Baki, A. ve Aydoğdu İskenderoğlu, T. (2011). Quantitative analysis of pre-service elementary mathematics teachers' opinions about doing mathematical proof. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 11 (4),* 2285-2290.

Davis, J. D. (2012). An examination of reasoning and proof opportunities in three differently organized secondary mathematics textbook units. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, *24*, 467-491, DOI 10.1007/s13394-012-0047-2.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). A pedagogical perspective concerning the concept of mathematical proof: a theoretical study. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences, 4 (2),* 47-71. doi: http://dx.doi.org/10.17984/adyuebd.52880.

Demiray, E. ve Işıksal Bostan, M. (2017). Pre-service middle school mathematics teachers' evaluations of discussions: the case of proof by contradiction. *Mathematics Education Research Group of Australasia*, *29*, 1-23. doi:10.1007/s13394-016-0182-2.

Ellis, A. B. (2004). *Relationships between generalizing and justifying: students' reasoning with linear functions.* (Doktora Tezi). ProQuest Dissertations and Thesis veri tabanından erişildi. (UMI No: 3137248)

Glesne, C. (2015). *Nitel araştırmaya giriş.* Ankara: Anı yayıncılık.

Harel, G. (2008). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM Mathematics Education, 40, 893-907,* doi:10.1007/s1185800801464

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, part I: focus on proving. *ZDM Mathematics Education, 40,* 487–500. doi:10.1007/s11858-008-0104-1.

Harel, G. (2013). DNR-Based Curricula: The Case of Complex Numbers. *Journal of Humanistic Mathematics, 3 (2),* 2-61. doi: 10.5642/jhummath.201302.03 .

Harel, G. (2013). Reid, D.A. and Knipping, C.: Proof in mathematics education: research, learning, and teaching. *ZDM Mathematics Education, 45,* 497–499.doi: 10.1007/s11858-013-0497-3.

Harel, G. (1999). Students' understanding of proofs: a historical analysis and implications for the teaching of geometry and lineer algebra. *Lineer Algebra and Its Applications,*302-303 601-613.

Harel, G., & Sowder, L. (tarih yok). *Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation*.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical thinking at any age: its nature and its development. *Mathematical Thinking And Learnıng, 1 (7),* 27-50.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues In Mathematics Education, 7*.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective of proof. Lester F. (Ed.). *Handbook Of Research On Teaching And Learning Mathematics, 2*, 805-842.

Housman, D., ve Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics (53)*, 139–158.

İskenderoğlu, T. A. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. *Matematik Eğitiminde Teoriler*, 65-99. Ankara: Pegem yayınları.

Knuth, E. J. (1999). The nature of secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. (Doktora Tezi). ProQuest Dissertations and Thesis veri tabanından erişildi. (UMI No: 9938829)

Koichu, B. (2010). On the relationships between (relatively) advanced mathematical knowledge and (relatively) advanced problem-solving behaviours. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41 (2)*, 257–275.

Lee, W. (1999). *The relationship between students' proof-writing ability and Van hiele levels of geometric thought in a college geometry course*. (Doktora Tezi). ProQuest Dissertations and Thesis veri tabanından erişildi. (UMI No:9939765)

Martin, W. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elemantary teachers. *Journal For Research In Mathematics Education*, *20 (1)*, 41-51.

Olsker, T. C. (2007). *Proof schemes and proof writing*. (Doktora Tezi). ProQuest Dissertations and Thesis veri tabanından erişildi. (UMI No:3268241)

Özgür, Z. (2017). *Relationships Between Students' Conceptions of Proof and Classroom Factors.* (Doktora Tezi). ProQuest Dissertations and Thesis veri tabanından erişildi. (UMI No: 10282321)

Pawlikowski, M. J. (2014). *Effects of social metacognition on geometric reasoning and micro-creativity: groups of students constructing proofs.* (Doktora Tezi). ProQuest Dissertations and Thesis veri tabanından erişildi. (UMI No:3629819)

Sears, R. (2012). *An examination of how teachers use curriculum materials for the teaching of proof in high school geometry*. (Doktora Tezi). ProQuest Dissertations and Thesis veri tabanından erişildi. (UMI No:3530872)

Sen, C. ve Güler, G. (2015). Examination of secondary school seventh graders' proof skills and proof schemes. *Universal Journal of Educational Research.3*(9).617-631. doi: 10.13189/ujer.2015.030906.

Shipley, W. J. (1999). An investigation of college students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs. (Doktora Tezi). ProQuest Dissertations and Thesis veri tabanından erişildi. (UMI No: 9940004)

Soto, O. D. (2010). *Teacher change in the context of a proof-centered professional development.* (Doktora Tezi). ProQuest Dissertations and Thesis veri tabanından erişildi. (UMI No: 3408003)

Tutak, A.F. ve Köklü, O. (2016). Öğretmek için matematik bilgisi. *Matematik Eğitiminde Teoriler.* Ankara: Pegem yayınları.

Uygan, C., Tanışlı, D., ve Köse, N. (2014). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıt Bağlamındaki İnançlarının, Kanıtlama Süreçlerinin ve Örnek Kanıtları Değerlendirme Süreçlerinin İncelenmesi1. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 5 (2)*, 137-157.