

Kapula ile Küresel Borsa İndeksleri Arasındaki Bağımlılığın Araştırılması

Murat GÜL^{1*} , Merve AKŞEN¹

¹Giresun Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Giresun

(Geliş Tarihi/Received Date: 03.10.2018; Kabul Tarihi/Accepted Date: 03.12.2018)

Öz

Bu çalışma uluslararası borsalar arasındaki bağımlılığı nispeten yeni fakat hızla gelişen bir yaklaşım olan kapulaları kullanarak incelemektedir; bu da hem bağımlılık yapısının hem de bağımlılığın derecesini incelememize olanak sağlamaktadır. Kapulanın önemi marjinal dağılımın biçimine bakmadan, rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapılarını modellemesi ve yakalamasıdır. Korelasyon ölçüleri bağımlılığın derecesini yansıtır ancak bağımlılığın yapısını ve şeklini yansıtmaz. Kapula modelleri aynı dağılım ailesine ait olmayan ve heterojen olan marjinal dağılımlara dayalı olarak çok değişkenli dağılımlara izin verirler. Böylelikle araştırmacı sadece mevcut çok değişkenli dağılımları göz önünde bulundurmadan kurtulur. Bu çalışmanın amacı kapulaların avantajlarını kullanarak, dünyada en çok işlem hacmine sahip FTSE-100, S&P-500, Nasdaq, Nikkei-225 gibi küresel borsa indeksleri arasındaki bağımlılığı kapula ile araştırmak ve indeksler arasındaki bağımlılığı uygun kapula ile modellemektir.

Anahtar kelimeler: Kapula, Borsa, Bağımlılık

Investigation of Dependence among Global Stock Exchanges via Copula

Abstract

This study examines the dependence among international stock exchanges by using copulas that is relatively new but rapidly evolving approach, which allows us to examine both the structure of dependence and the degree of dependence. The importance of this approach is modeling and capturing dependencies among random variables, regardless of the form of the marginal distribution. Correlation measures reflect the degree of dependence but not the structure and shape of dependence. Copula models allow for multivariate distributions based on marginal distributions that have not same distribution family and is heterogeneous. Thus, the researcher get rid of taking into account only the present multivariate distributions. The aim of this study is to investigate the dependence among the global stock exchange indices such as FTSE-100, S&P-500, Nasdaq, and Nikkei-225, which have the largest trading volume in the world, and to model the dependence among the indices with the appropriate copula, using the advantages of copulas

Keywords: Copula, Stock Exchange, Dependence

* Sorumlu Yazar /Corresponding Author : murat.gul@giresun.edu.tr

1. Giriş

Finansal piyasalar arasındaki bağımlılık, hem ekonomistler hem de yatırımcılar için her zaman önemli bir konu olmuştur. Bu konu uluslararası portföy çeşitlendirmesi ve piyasa entegrasyonu üzerindeki etkileri nedeniyle literatürde büyük ilgi çekmiştir. Uluslararası borsalar arasındaki karşılıklı bağımlılık, ülkeler genelinde risk yönetimini güçlü bir şekilde etkilemektedir. Borsalar arasındaki karşılıklı bağımlılık, uluslararası portföylerin ortak dağılımı ve çeşitlendirilmesi ile uluslararası portföylerin ortak riskleri ve genel getirileri üzerinde etkilidir. Bu nedenle, küresel yatırımcıların uluslararası piyasalardaki bağımlılık derecesini ve yapısını anlamaları ve ölçmeleri çok önemlidir. Bulaşma genellikle, özellikle kriz dönemlerinde ülkeler arasında iletilen şoklar veya yayılma etkileri olarak anlaşılmaktadır. Bir kriz sırasında “korelasyonun bozulmasına” yol açarak önemli bir korelasyon değişimi olacağını ima eder. (Peng & Ng 2012). Son çalışmalar ise hisse senedi piyasalarında bulaşıcılığı kanıtlamıştır (Ane & Labidi 2006; Jondeau & Rockinger 2006; Bekaert et al 2005; Poon et al 2004; Longin & Solnik 2001; Forbes & Rigobon 2002). Kapula tabanlı çok değişkenli modeller, araştırmacıya ortak bir dağılım oluşturacak şekilde marjinal dağılımları bağlayan bağımlılık yapısından ayrı olarak herhangi bir marjinal dağılıma göre çok değişkenli dağılımların modellenmesini sağlar. Bu özellik çok değişkenli dağılımların belirlenmesinde ve tahmin edilmesinde önemli ölçüde büyük bir esneklik sağlar, böylelikle araştırmacı sadece mevcut çok değişkenli dağılımları göz önünde bulundurmaktan kurtulur.

Kapular, doğrusal ve doğrusal olmayan bağımlılık, simetrik ve asimetrik bağımlılık, kuyruk bağımlılığı dahil olmak üzere rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını çalışmak için çok kullanışlı aygıtlardır. Bilindiği gibi, lineer korelasyon katsayısı gibi geleneksel bağımlılık ölçümleri, değişkenler arasındaki ilişki doğrusal olmadıkça ve ortak dağılımı normal olmadıkça uygun değildir. Kapular rastgele değişkenlerin doğrusal olmayan artan dönüşümleri altında değişmezdir. Bu özelliğe sahip Kendall'ın τ 'su ve Spearman'ın ρ 'su gibi birkaç bağımlılık ölçüsü vardır ve doğrusal korelasyona uygun bir alternatif sunarlar. Bu bağımlılık ölçüleri sıra korelasyonu veya uyum ölçüleri olarak adlandırılır ve rastgele değişkenler arasındaki doğrusal olmayan bağımlılığı yakalarlar. Ancak doğrusal korelasyon değişkenler arasındaki doğrusal olmayan bağımlılığı yakalayamaz. Korelasyon ölçüleri bağımlılığın derecesini yansıtır ancak bağımlılığın yapısını, şeklini yansıtmaz. Bu anlamda kapular iki veya daha fazla (yüksek boyutlarda) rastgele değişken arasındaki bağımlılığın derecesini ve bağımlılığın yapısını ortaya çıkarır. Kapula yaklaşımının uygulamasının en büyük avantajı dağılım fonksiyonunu bilmeden esnek bir şekilde modellenbilmesidir.

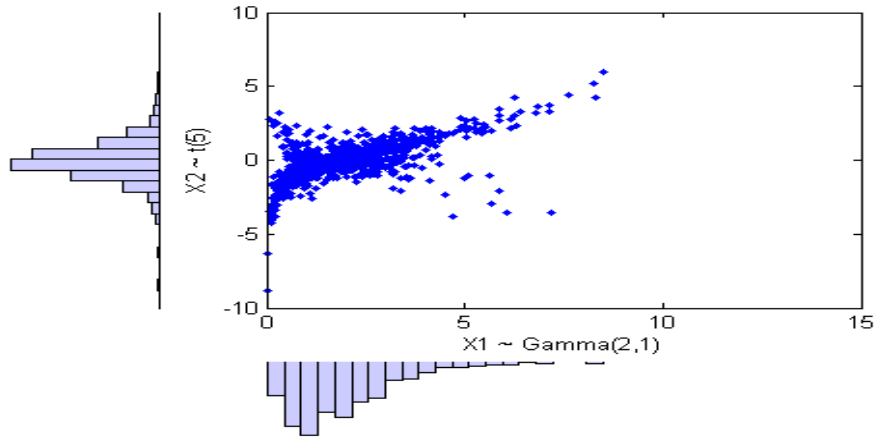
Bu çalışmanın amacı Dünya borsaları arasında önemli bir yere sahip olan NASDAQ (ABD) borsası, S&P-500(ABD), NIKKEI (Japonya) ile FTSE-100(İngiltere) arasındaki indekslerin kapula ile modellenmesine çalışıldı. Çalışmanın kısımları şu şekilde yapılandırılmıştır. İkinci bölümde materyal ve yöntem, üçüncü bölümde Bulgular ve Tartışma, dördüncü bölümde Sonuçlar kısımları verilmiştir. İstatistik literatüründe 50 yılı aşkın bir süredir iyi bilinmesine rağmen, istatistiksel modellemede Kapula teorisinin uygulamaları daha yeni bir fenomendir. Bugün, kapular ile ilgili hızlıca büyüyen bir literatür vardır. Dudley & Nimalendran (2011) ve Kang et al (2010), hedge fonlar ve diğer varlıklar arasındaki bağımlılığı incelemek için kapulara başvurdular. Abbara & Zevallos (2014) Latin Amerika (Brezilya, Meksika ve Arjantin), Avrupa (İngiltere ve Almanya), Asya (Japonya ve Singapur) ve A.B.D'nin önemli borsaları arasında 06 Ekim 1995 ve 19 Nisan 2013

tarihlerinde bulaşma ve bağımlılığın varlığını değerlendirdiler. İki değişkenli analizler borsalar arasında bulaşmanın yanında asimetrik bağımlılık olduğunu gösterdi.

2. Materyal ve Yöntem

2.1. Kapulalar

Bu bölümde kapulaların matematiksel ve istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Nelsen tarafından yapılan tanıma göre kapula; “çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını kendi tek boyutlu marjinal dağılım fonksiyonlarına bağlayan fonksiyondur. Alternatif olarak kapulalar, tek boyutlu marjinalleri (0,1) aralığı üzerinde düzgün dağılmış olan çok boyutlu dağılım fonksiyonlarıdır.” (Nelsen 2006). Kapulaların kullanıldığı alanlara bakıldığında çok değişkenli dağılımların bağımlılık yapısı, yeni çok değişkenli dağılımların elde edilmesi ve gösterilmesi, yeni değişkenler arasında bağımlılık ölçülerin geliştirilmesi ve değişkenler arasında bağımlılık gerektiren simülasyon çalışmalarında veri üretimi için kapulalar sıklıkla kullanılmaktadır.



Şekil 1. Farklı marjinal dağılımlara sahip değişkenler için bağımlılık yapısı

Şekil 1’de Gamma ve t dağılımı gibi farklı marjinallere sahip değişkenler için kapulaları kullanarak 1000 adet bağımlı değer üretilmiştir.

2.2. Kapulaların Tanımı ve Özellikleri

$C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$, fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağladığında kapula adını alır:

1. $C(0,v) = C(u,0) = 0$; $u,v \in [0,1]$; $C(1,v) = v$, $C(u,1) = u$; $u,v \in [0,1]$;
2. $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ ve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0,1]$ iken, $C(a_1, b_1) + C(a_2, b_2) - C(a_1, b_2) - C(a_2, b_1) \geq 0$ ‘dır.

Teorem 2.1. Sklar teoremi: kapulalar teorisinin yapı taşıdır. Bu teorem, çok boyutlu dağılım fonksiyonlarının tek değişkenli marjinalleri ile aralarındaki ilişkide kapulaların ne işe yaradığını açıklar (Nelsen 2006).

Sürekli marjinal dağılım fonksiyonları F_1, F_2, \dots, F_n ile verilen bir n-boyutlu dağılım fonksiyonu F için tek bir $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ kapulası vardır ve $x_i \in R, i=1,2,\dots, n$ için

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer F_1, F_2, \dots, F_n sürekli değilse $C, \text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2 \times \dots \times \text{Ran } F_n$ üzerinde tek türlü tanımlanmıştır. Tersine, eğer C bir kapula ve F_1, F_2, \dots, F_n dağılım fonksiyonlarıysa, o zaman Eşitlik (2.1)'de tanımlanan F fonksiyonu, marjinalleri F_1, F_2, \dots, F_n olan bir ortak dağılım fonksiyonudur (Nelsen 2006).

Bu teorem kapulalar için hem bir yapı planı, hem de çok değişkenli dağılımların parametrelendirilmesini sağlar. Gerçekten F_1, F_2, \dots, F_n marjinalleri ile verilen çok değişkenli bir F fonksiyonu için $u_i \in [0,1], i=1,2,\dots,n$ olmak üzere,

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (2.2)$$

fonksiyonu otomatik olarak bir kapuladır (Nelsen 2006; Malevergne & Sornette 2003).

2.3. Arşimedyen kapulalar ve özellikleri

Kapulaların en önemli sınıflarından biri Arşimedyen kapulalardır. Birçok kapula fonksiyonu Sklar Teoremi kullanılarak oluşturulmalarına karşın Arşimedyen kapulaları kendi üretici fonksiyonları ile elde edilir. Basitlik olması açısından, iki değişkenli bir kapula düşünelim. $\varphi : [0,1] \rightarrow [0, \infty)$, sürekli, kesin azalan, konveks ve $\varphi(1) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. φ 'nin ters fonksiyonu için φ^{-1} 'i kullanalım. Bir Arşimedyen kapulayı

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad u, v \in [0,1] \text{ için} \quad (2.3)$$

biçiminde yazabiliriz ve φ 'yi C kapulasının üreticisi (toplumsal üreticisi) olarak adlandırırız. Dolayısıyla bir üretici bir Arşimedyen kapula belirler. Birçok kapula fonksiyonu vardır. Arşimedyen kapula ailesinden en çok kullanılan bazı kapulalar Ali-Mikhail-Haq, Clayton, Frank ve Gumbel Hougaard'dır. Bu kapula aileleri ve bunların üreticilerine ilişkin eşitlikler Çizelge 1'de görülmektedir (Frees & Valdez 1998).

Çizelge 1. Bazı Arşimedyen kapula ailelerine ilişkin fonksiyonlar ve üreticiler

Aileler	Kapulanın Genel Formu	$C(u,v)$	Üreticiler $\varphi(t)$
Ali- Mikail- Haq	$uv[1 - \theta(1-u)(1-v)]^{-1}$		$\ln \frac{1 - \theta(1-t)}{t}$
2.4. Clayton	$[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}$		$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right]$		$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$
Gumbel - Hougaard	$\exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}$		$(-\ln t)^\theta$

Bağımlılık Kavramları

Kapula fonksiyonları rasgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını gösterdiğinden, bağımlılık ölçüleri kapula yardımıyla ifade edilebilir. Dolayısıyla, kapulanın çok değişkenli bir dağılımın bağımlılık yapısını ve uygunsa, yani doğru seçilmişse, verilerin bağımlılık yapısını gösterdiği düşünülebilir.

Tanım 2.1. Tam (Mükemmel) Bağımlılık: Her n- kapula C için Fréchet-Hoeffding eşitsizliği

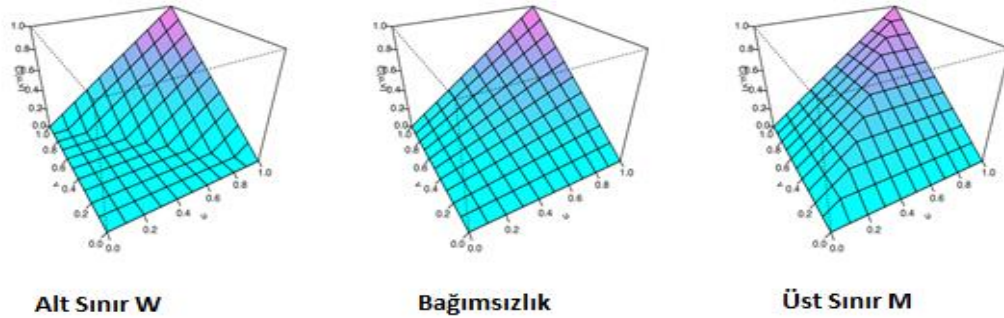
$$W^n(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq M^n(u_1, \dots, u_n) \quad (2.4)$$

vardır. n = 2 için alt ve üst sınırların kendileri birer kapuladır ve W, M sırasıyla $(U, 1-U)^T$ ve $(U, U)^T$ rastgele değişkenlerinin iki değişkenli dağılım fonksiyonlarıdır; burada $U \sim U(0,1)$ 'dir ($U, [0,1]$ 'de tekdüze dağılır). Bu durumda, W tam negatif bağımlılığı ve M'de tam pozitif bağımlılığı belirtir.

Tanım 2.2. Birleşik Dağılım Fonksiyonları için Fréchet-Hoeffding Sınırları: $[0,1]^n$ de değer alan M^n, Π^n ve W^n fonksiyonlarını düşünelim:

$$M^n(u) = \min(u_1, \dots, u_n), \quad \Pi^n(u) = u_1, \dots, u_n, \quad W^n(u) = \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0).$$

M^n ve Π^n fonksiyonları her $n \geq 2$ için birer n-kapuladır. Bununla birlikte W^n herhangi bir $n \geq 3$ için bir kapula değildir. Ancak W^n fonksiyonuna istenildiği kadar yaklaşılabilen bir kapula bulunabilir (Nelsen 2006).



Şekil 2. İki değişken için Fréchet-Hoeffding sınırları ve Bağımsızlık kapulası

Şekil 2'de solda Fréchet-Hoeffding alt sınırı, ortada bağımsızlık kapulası, sağda ise Fréchet-Hoeffding üst sınırı gösterilmiştir.

Tanım 2.3. Kendall'in τ 'su ve Spearman'ın ρ 'su: Kapula aileleri söz konusu iken, Kendall'in τ 'su veya Spearman'ın ρ 'su kullanılır. Kendall'in τ 'su ve Spearman'ın ρ 'su kapula aileleri üzerinden tahmin edilebilir. Bu işlem aşağıdaki izleyen eşitlikler ile gerçekleştirilebilir:

$$\tau(X_1, X_2) = 4 \iint C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (2.5)$$

Spearman ρ 'sunu aşağıdaki eşitlikle hesaplanabilir.

$$\rho_{X,Y} = 12 \iint C(u, v) du dv - 3 \quad (2.6)$$

Aşağıdaki çizelgede Kapula ailelerine ilişkin parametrelerle ilişki katsayıları arasındaki matematiksel bağıntılar verilmiştir (Frees & Valdez 1998).

Çizelge 2. Bazı kapula ailelerine ilişkin parametre aralıkları ve ilişki katsayıları

Aileler	Parametre Aralığı	Kendall'ın τ 'su	Spearman'ın ρ 'su
Clayton	$\theta \geq 0$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	—
Farlie-Gumbel-Morgestern	$-1 \leq \theta \leq 1$	$\frac{2}{9}\theta$	$\frac{1}{3}\theta$
Frank	$\theta \neq 0$	$1 - \frac{4}{\theta}[D_1(-\theta) - 1]$	$1 - \frac{12}{\theta}[D_2(-\theta) - D_1(-\theta)]$
Gumbel-Hougaard	$\theta \geq 1$	$1 - \theta^{-1}$	—
Plackett	$\theta \geq 0$	—	$\frac{(\theta + 1)}{(\theta - 1)} - \frac{2\theta \ln \theta}{(\theta - 1)^2}$

Not: D_1 ve D_2 Debye fonksiyonu olarak adlandırılır ve aşağıdaki eşitlikle ifade edilir:

$$D_k(x) = \frac{k}{x} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt, \quad D_k(-x) = D_k(x) + \frac{kx}{k + 1} \quad (2.7)$$

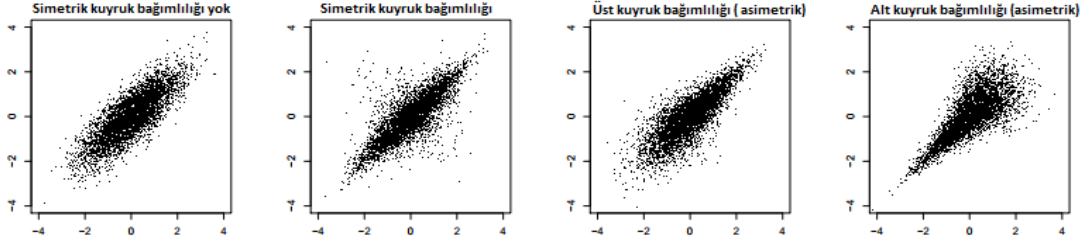
Tanım 2.4. Kuyruk Bağımlılığı: Kuyruk bağımlılığı, ortak dağılımın kuyruğunda olan iki rastgele değişken arasındaki aşırı (extreme) birlikte hareketi tanımlar. Gauss, Frank, Plackett gibi kapulalar alt ve üst kuyruk bağımlılık katsayıları sıfır olduğundan kuyruk bağımlılığına sahip değildirler ancak bu katsayılar eşit olduklarından simetrik kapulalar olarak kabul edilirler. Clayton, Gumbel gibi kapulalar alt veya üst kuyruk bağımlılığına sahiptirler ve asimetric kapulalar olarak adlandırılırlar. t-kapula ve simetrik Joe-Clayton gibi kapulalar aynı anda üst ve alt kuyruk bağımlılığına sahip olduğundan hem simetrik hemde asimetric kapulalar olarak bilinirler (Borovkova 2011). Kuyruk bağımlılığı iki değişkenli dağılımın alt ve üst kuyruklardaki bağımlılığın derecesini açıklar.

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P[F_Y(y) < u | F_X(x) < u] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u} \quad (2.8)$$

λ_L ile gösterilen alt kuyruk bağımlılığı katsayısı Y değişkeni çok düşük değer aldığımda, X değişkeninin çok düşük değer aldığı koşullu bir olasılıktır.

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P[F_Y(y) \geq u | F_X(x) \geq u] = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (2.9)$$

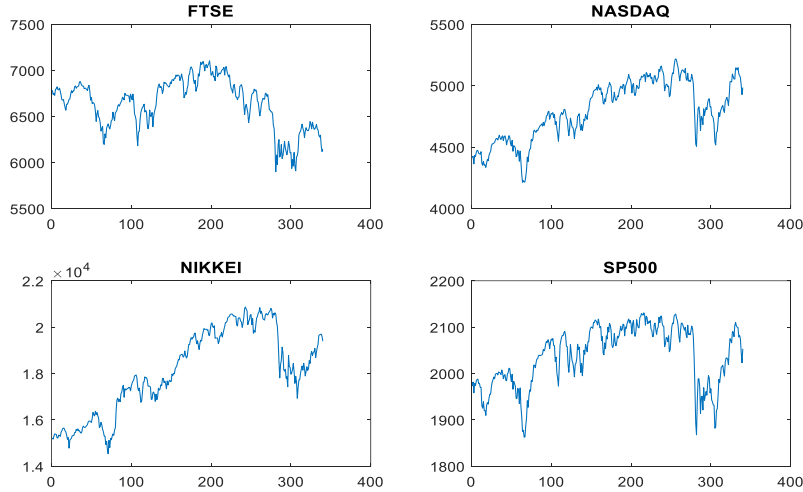
λ_U ile gösterilen üst kuyruk bağımlılığı katsayısı Y değişkeni çok büyük değer aldığı anda, X değişkeninin çok büyük değer aldığı koşullu bir olasılıktır. λ_U ve $\lambda_L \in [0,1]$. Eğer λ_L veya λ_U pozitif ise X ve Y değişkenleri, sırasıyla alt(sol) veya üst(sağ) kuyruk bağımlıdır. Eğer $\lambda_L > 0$ ise büyük kayıpların aynı anda olma eğilimi vardır. $\lambda_U > 0$ büyük kazançların aynı anda olma eğilimi vardır (Joe 2014; Nelsen 2006). $\lambda_L=0$ ve $\lambda_U=0$ olursa X ve Y değişkenlerinin kuyrukları bağımsızdır. Eğer $\lambda_U = \lambda_L$ ise X ve Y değişkenlerinin simetrik kuyruk bağımlılığı olduğu kabul edilir. Aksi durumunda ($\lambda_U \neq \lambda_L$) bağımlılık yapısı asimetriktrir.



Şekil 3. Kuyruk bağımlılıklarına göre bağımlılık yapısı

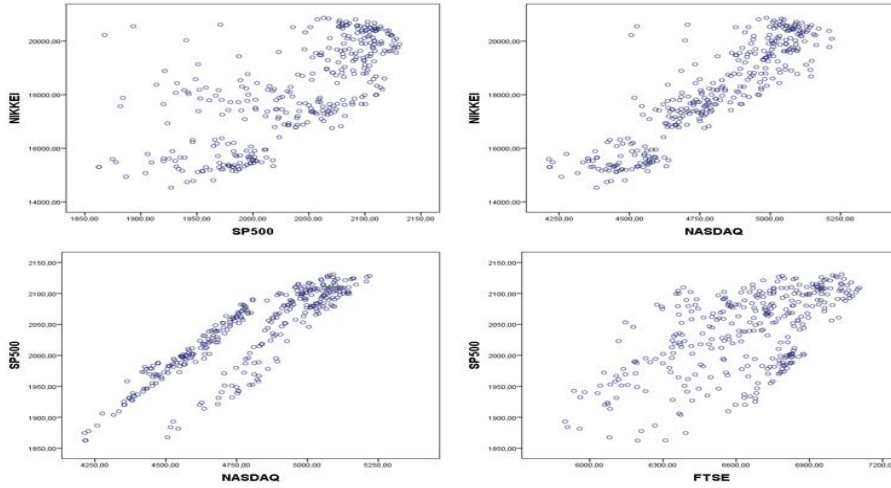
3. Bulgular ve Tartışma

Dünya üzerinde en çok işlem gören 4 hisse senedi borsası üzerinde gerçekleştirilen çalışma Temmuz 2014-Kasım 2015 tarihleri arasındaki NIKKEI(Japonya), FTSE(İngiltere), NASDAQ(ABD), SP500(ABD) borsaların arasındaki 340 veri dönemine ilişkindir.



Şekil 4. Borsa indekslerinin kapanış değerlerine göre grafikleri

Şekil 4’de NIKKEI, FTSE, SP500 VE NASDAQ borsalarının Temmuz 2014 ile Kasım 2015 tarihleri arasında kapanış işlem değerlerine göre grafiklerini göstermektedir.



Şekil 5. Borsa indeksleri arasındaki saçılım grafikleri

Şekil 5’de NIKKEI-SP500 ; NIKKEI-NASDAQ; SP500-NASDAQ; SP500-FTSE Borsaları arasındaki saçılım grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerden borsaların farklı bağımlılık yapılarına sahip oldukları anlaşılmaktadır. Kapulalar ile bağımlılık ölçüleri arasındaki ilişki bilindiğinden Çizelge 3 ve Çizelge 4 hazırlanmıştır.

Çizelge 3. Borsa indeksleri arasındaki bağımlılık ölçüsü (Kendall's τ)

Kendall's τ	NIKKEI	FTSE	NASDAQ	SP-500
NIKKEI	1.000	0.101	0.715	0.506
FTSE	0.101	1.000	0.200	0.421
NASDAQ	0.715	0.200	1.000	0.712
SP-500	0.506	0.421	0.712	1.000

Çizelge 4. Borsa indeksleri arasındaki bağımlılık ölçüsü (Spearman's ρ)

Spearman's ρ	NIKKEI	FTSE	NASDAQ	SP-500
NIKKEI	1.000	0.171	0.888	0.703
FTSE	0.171	1.000	0.289	0.588
NASDAQ	0.888	0.289	1.000	0.881
SP-500	0.703	0.588	0.881	1.000

Çizelge 3 ve Çizelge 4’de küresel borsalar arasındaki parametrik olmayan bağımlılık ölçülerinin (Kendall's τ ve Spearman's ρ) değerleri verilmiştir. Bu tablolardan Nikkei ile Nasdaq arasında, Nikkei ile SP-500 arasında, FTSE ile SP-500 arasında, Nasdaq ile SP500 arasında pozitif yönde güçlü ilişki olduğu görülmektedir.

Kapula tahmin yöntemi olarak, parametrik olmayan, gözlenen frekanslar ile teorik frekanslar arasındaki farklara dayanan ve $sd=(I-1)(J-1)-p(q-1)$ serbestlik derecesi ile Ki-Kare testi kullanıldı. Burada p tahmin edilen parametre sayısını, q birleştirilen hücre sayısını, I satır sayısını ve J ise sütün sayısını gösterir. İki değişkenin gözlenen frekanslarının 4x4 ’lük çapraz tablosunu göstermektedir. Bu iki değişken için hücre sınırları j=1,2,3,4 için yaklaşık olarak $[340*j/4]$ sıra sayısına sahip sıra istatistiklerine karşı gelen değerler olarak alınmıştır. Daha açık bir şekilde ifade edilecek olunursa, Nikkei endeks değerlerine bakıldığında 85.

birim için 16,796; 170.birim için 18,070; 255.birim için 19,698 değeri bulunmuştur. SPSS paket programında Compute seçeneği kullanılarak ve Nikkei $\leq 16,796$ değerleri için “1” kodu, $16,796 < \text{Nikkei} \leq 18,070$ için “2” kodu, $18,070 < \text{Nikkei} \leq 19,698$ için “3” kodu ve $\text{Nikkei} > 19,698$ için “4” kodu kullanılarak sıra istatistik değerleri atanmıştır. Benzer işlemler Nasdaq için gerçekleştirildiğinde 85. birim için 4,605, 170. birim için 4,801 ve 255. birim için 5,009 değeri bulunmuş ve Nasdaq $\leq 4,605$ değerleri için “1” kodu, $4,605 < \text{Nasdaq} \leq 4,801$ için “2” kodu, $4,801 < \text{Nasdaq} \leq 5,009$ için “3” kodu ve $\text{Nasdaq} > 5,009$ için “4” kodu kullanılarak sıra istatistik değerleri atanmıştır. Daha sonra Tabloda Nikkei-Nasdaq kodlarına karşılık gelen çapraz tablo oluşturulmuştur. İlişki katsayıları kullanılarak veri kümesine en uygun kapula ailesi ve parametresi tahmin edilmeye çalışılmıştır.

H_0 : Nikkei ve Nasdaq indeksleri arasındaki bağımlılık Plackett kapula ailesine uyuyor. H_1 : Nikkei ve Nasdaq indeksleri arasındaki bağımlılık Plackett kapula ailesine uymuyor.

Çizelge 5. Nikkei ve Nasdaq indekslerine ilişkin gözlenen frekanslar

	NASDAQ				Toplam
	1,00	2,00	3,00	4,00	
NIKKEI	1,00	77	8	0	85
	2,00	6	65	14	85
	3,00	0	10	54	85
	4,00	2	2	17	85
Toplam	85	85	85	85	340

Nikkei ve Nasdaq indekslerine ait Spearman'ın ρ 'su 0,888, Kendall'in τ 'su da 0,715 olarak tahmin edilmiştir. Bundan sonraki aşama, bu bağımlılık yapısını Spearman'ın ρ 'su ve Kendall'in τ 'suna dayanan yöntemler ile en iyi tahmin edecek kapula ailesini bulmak ve bu kapulanın parametresini tahmin etmektir. Bunu gerçekleştirmek için çeşitli kapula ailelerini ele alındı ve verilere en uygun düşen kapula ailesi bulunmaya çalışıldı.

Çizelge 6. Plackett kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar

	NASDAQ				Toplam
	1,00	2,00	3,00	4,00	
NIKKEI	1,00	68	14	2	85
	2,00	14	54	15	85
	3,00	2	15	54	85
	4,00	1	2	14	85
Toplam	85	85	85	85	340

Çizelge 5'de Nikkei ve Nasdaq endeksinden elde edilen gözlenen frekanslar ile Çizelge 6'daki $\theta=57$ için Plackett kapula ailesinden elde edilen beklenen frekanslar arasındaki ki-kare değeri 11,06 bulunmuştur. Böylece; 7 serbestlik derecesinde 0,95 güvenilirlik düzeyinde ki-kare tablo değeri 14,07 olduğundan, Nasdaq ile Nikkei indeksleri arasındaki bağımlılığın Plackett kapula ailesine uyduğunu

söyleyen H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez. Nikkei ve Nasdaq endekleri arasındaki bağımlılık yapısının Plackett kapula ailesine uygun olduğu sonucu çıkarılabilir.

Çizelge 7. Gumbel Hougaard kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar

	NASDAQ				Toplam	
	1,00	2,00	3,00	4,00		
NIKKEI	1,00	63	19	3	0	85
	2,00	19	45	20	1	85
	3,00	3	20	49	14	86
	4,00	0	1	14	69	84
Toplam	85	85	86	84		340

Çizelge 5’de Nikkei ve Nasdaq endeksinden elde edilen gözlenen frekanslar ile Çizelge 7’deki $\theta=3,508772$ için Gumbel-Hougaard kapula ailesinden elde edilen beklenen frekanslar arasındaki ki-kare değeri 21,77 bulunmuştur. Böylece; 7 serbestlik derecesinde 0,95 güvenilirlik düzeyinde ki-kare tablo değeri 14,07 olduğundan, Nasdaq ile Nikkei indeksleri arasındaki bağımlılığın Gumbel Hougaard kapula ailesine uyduğunu söyleyen H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilir. Nikkei ve Nasdaq endekleri arasındaki bağımlılık yapısının Gumbel Hougaard kapula ailesine uygun olmadığı sonucu çıkarılabilir.

Çizelge 8. Nikkei & Nasdaq borsa indeksleri arasındaki bağımlılığı modelleyen kapula ailesinin seçimi

Kendall & Spearman	Kapula Ailesi	θ	Hesaplanan Ki kare	Ho kabul/red
0,715	Clayton	5,02	0,8697	Ho kabul
	Frank	12,14	13,66	Ho kabul
0,888	Gumbel Hougaard	3,51	21,77	Ho red
	Plackett	57	11,06	Ho kabul

Yukarıda yapılan işlemlerin daha anlaşılır olması amacıyla diğer kapula aileleri de dahil edilerek Çizelge 8 hazırlanmıştır. Nikkei ile Nasdaq borsa indekslerine ait Kendall’ın τ ’su 0,715, Spearman’ın ρ ’su da 0,888 olarak tahmin edilmiştir. Hesaplanan en küçük Ki-Kare değerine göre Clayton Kapula ailesi, Nikkei ile Nasdaq arasındaki bağımlılığı daha iyi modellemiştir.

Çizelge 9. Nikkei & Ftse borsa indeksleri arasındaki bağımlılığı modelleyen kapula ailesinin seçimi

Kendall & Spearman	Kapula Ailesi	θ	Hesaplanan Ki kare	Ho kabul/red
0,101	Clayton	0,22	108,33	Ho red
	Frank	0,92	96,98	Ho red
0,171	Gumbel Hougaard	1,11	95,26	Ho red
	Plackett	1,87	95,96	Ho red

Çizelge 9’da özetlendiği gibi Nikkei ile Ftse borsa indekslerine ait Kendall’ın τ ’su 0,101, Spearman’ın ρ ’su da 0,171 olarak tahmin edilmiştir. Hesaplanan Ki-Kare değerlerine göre incelenen hiçbir kapula ailesi Nikkei ile Ftse arasındaki bağımlılığı modelleyememiştir.

Çizelge 10. Sp500 & Ftse borsa indeksleri arasındaki bağımlılığı modelleyen kapula ailesinin seçimi

Kendall & Spearman	Kapula Ailesi	θ	Hesaplanan Ki kare	Ho kabul/red
0,421	Clayton	1,45	48,46	Ho red
	Frank	4,46	23,81	Ho red
0,588	Gumbel Hougaard	1,73	13,64	Ho kabul
	Plackett	7,86	24,37	Ho red

Çizelge 10’da özetlendiği gibi Sp500 ile Ftse borsa indekslerine ait Kendall’ın τ ’su 0,421, Spearman’ın ρ ’su da 0,588 olarak tahmin edilmiştir. Hesaplanan en küçük Ki-Kare değerlerine göre Gumbel Hougaard kapula ailesi Sp500 ile Ftse arasındaki bağımlılığı daha iyi modellemiştir.

Çizelge 11. Nasdaq & Sp500 borsa indeksleri arasındaki bağımlılığı modelleyen kapula ailesinin seçimi

Kendall & Spearman	Kapula Ailesi	θ	Hesaplanan Ki kare	Ho kabul/red
0,712	Clayton	4,94	20,09	Ho red
	Frank	11,99	1,29	Ho kabul
0,881	Gumbel Hougaard	3,47	1,11	Ho kabul
	Plackett	52	2,10	Ho kabul

Çizelge 11’de özetlendiği gibi Nasdaq ile Sp500 borsa indekslerine ait Kendall’ın τ ’su 0,712, Spearman’ın ρ ’su da 0,881 olarak tahmin edilmiştir. Hesaplanan en küçük Ki-Kare değerlerine göre Gumbel Hougaard kapula ailesi Sp500 ile Ftse arasındaki bağımlılığı daha iyi modellemiştir.

Çizelge 12. Nasdaq & Ftse borsa indeksleri arasındaki bağımlılığı modelleyen kapula ailesinin seçimi

Kendall & Spearman	Kapula Ailesi	θ	Hesaplanan Ki kare	Ho kabul/red
0,200	Clayton	0,50	83,02	Ho red
	Frank	1,87	67,66	Ho red
0,289	Gumbel Hougaard	1,25	70,80	Ho red
	Plackett	2,44	61,82	Ho red

Çizelge 12’de özetlendiği gibi Nasdaq ile Ftse borsa indekslerine ait Kendall’ın τ ’su 0,200, Spearman’ın ρ ’su da 0,289 olarak tahmin edilmiştir. Hesaplanan Ki-Kare değerlerine göre incelenen hiçbir kapula ailesi Nasdaq ile Ftse arasındaki bağımlılığı modelleyememiştir.

Çizelge 13. Nikkei & Sp500 borsa indeksleri arasındaki bağımlılığı modelleyen kapula ailesinin seçimi

Kendall & Spearman	Kapula Ailesi	θ	Hesaplanan Ki kare	Ho kabul/red
0,506	Clayton	2,05	34,39	Ho red
	Frank	5,85	22,41	Ho red
0,703	Gumbel Hougaard	2,02	30,78	Ho red
	Plackett	12,14	25,85	Ho red

Çizelge 13’de özetlendiği gibi Nikkei ile Sp500 borsa indekslerine ait Kendall’ın τ ’su 0,506, Spearman’ın ρ ’su da 0,703 olarak tahmin edilmiştir. Hesaplanan Ki-Kare değerlerine göre incelenen hiçbir kapula ailesi Nikkei ile Sp500 arasındaki bağımlılığı modelleyememiştir.

4. Sonuçlar

Dünyada en çok işlem hacmine sahip FTSE-100, S&P-500, Nasdaq, Nikkei-225 gibi borsa indeksleri arasındaki bağımlılığı kapula ile araştırdık. Piyasa özelliklerine göre şekillenen bağımlılık yapıları da farklı kapula formlarının kullanılmasını gerektirmektedir. Analiz sonuçlarına göre Nikkei ile Ftse; Nasdaq ile Ftse; Nikkei ile S&P-500 arasındaki bağımlılık incelenen kapula ailelerine göre modellenemedi. Bu yüzden bu borsa indeksleri arasındaki bağımlılık için diğer kapula ailelerini kullanmak gerekir.

Nikkei ile Nasdaq arasındaki bağımlılık Clayton kapula ailesi ile (Ki kare=0,8697; $\theta=5,02$), S&P-500 ile Ftse arasındaki bağımlılık Gumbel Hougaard ile (Ki kare=13,64; $\theta=1,73$), Nasdaq ile S&P-500 arasındaki bağımlılık Gumbel Hougaard Ki kare=1,11; $\theta=3,47$) kapula ailesi ile modellenenir.

Çalışmanın önemli bir sonucu ise Clayton ve Gumbel kapulaların asimetric bağımlılığı ifade etmesinden dolayı, Nikke ile Nasdaq, S&P-500 ile Ftse, Nasdaq ile S&P-500 arasındaki bağımlılığın asimetric bir yapıda olduğudur.

Çalışma sonunda birbirine coğrafi olarak yakın olan borsalar arasındaki bağımlılığın daha yüksek olduğunu gördük. Örneğin; NIKKEI (Japonya) indeksinin, NASDAQ (ABD) ve SP-500 (ABD) borsalarına daha fazla bağımlı ($\rho_{Nikkei,Nasdaq}=0,888$; $\rho_{Nikkei,SP500} = 0,703$) olduğu bulundu. Bu sonuç, NIKKEI’de bir sorun olduğunda, ABD’deki borsa indeksleri için ortak bir çarpışma olasılığının yüksek olacağını göstermektedir. Böylece portföy yöneticileri bu ortak hareketlere daha fazla dikkat etmelidir. Bu sonuç, yatırım stratejisi olarak portföy çeşitlendirmesini coğrafi olarak birbirine yakın borsalara yapmamamız gerektiğini ifade etmektedir.

Finansal piyasalarda asimetric etkenleri göz ardı etmek, alt kuyruk veya üst kuyruk riskinin daha az tahmin edilmesinden ötürü uygun olmayan bir portföy çeşitliliğine yol açacaktır. Bu nedenle, asimetric bağımlılığı yakalayan bir kapula modeli uluslararası portföy risk yönetimi için kullanılabilir. Bu çalışmadan elde edilen bulgular, yatırımcılar için küresel yatırım risk yönetiminde kullanılabilir. İlerideki çalışmalarda kapulalar, borsa indeksleri arasında daha gerçekçi bağımlılığı yakalamada ve bağımlı veriler ile çalışılmak istendiğinde, bağımlılığı yansıtan verileri üretmede kullanılabilir. Bu çalışma ikiden fazla (daha yüksek boyutlarda) borsa indeksi arasındaki bağımlılık ve asimetric bağımlılığı bulmak için genişletilebilir.

5. Kaynaklar

1. Abbara O & Zavallos M (2014). Assessing stock market dependence and contagion, *Quantitative Finance*, 14(9), 1627-1641
2. Ane T & Labidi C (2006). Spillover effects and conditional dependence. *International Review of Economics and Finance*, 15, 417-442
3. Bekaert G, Harvey C R & Ng A (2005). Market integration and contagion. *Journal of Business*, 78, 39-69
4. Borovkova S (2011). Risk management with tail copulas for emerging market portfolios. *International Journal of Economics and Finance Studies*,3(1), 48-61
5. Dudley E & Nimalendran M (2011). Margins and hedge fund contagion, *J. Finan. Quant. Anal.* 46,1227–1257
6. Forbes K J & Rigobon R (2002). No contagion, only interdependence: Measuring stock market co-movements. *Journal of Finance*, 57, 2223-2261
7. Frees E W, Valdez E A (1998). Understanding Relationships Using Copulas. *North American Actuarial Journal*, 2(1): 1-25
8. Joe H (2014). *Dependence Modeling with Copulas*, CRC Monographs on Statistics & Applied Probability
9. Jondeau É & Rockinger M (2006). The copula-GARCH model of conditional dependencies: an international stock market application, *J. Internat. Money, Finance* 25, 827–853
10. Kang B U, In F, Kim G & Kim Y S (2010). A longer look at the asymmetric dependence between hedge funds and the equity market, *J. Finan. Quant. Anal.* 45, 763–789
11. Longin F & Solnik B (2001). Extreme correlation of international equity market. *Journal of Finance*, 56, 649-676
12. Malevergne Y & Sornette D (2003). Testing the Gaussian Copula Hypothesis for Financial Assets Dependencies. *Quantitative Finance*, 14:231-250
13. Nelsen R B (2006). *An Introduction to Copulas*, Second Edition, Springer Series in Statistics, New York
14. Peng Y & Ng W L (2012). Analysing financial contagion and asymmetric market dependence with volatility indices via copulas. *Annals of Finance*, 8(1), 49-74
15. Poon S H, Rockinger M & Tawn J (2004). Extreme value dependence in financial markets: Diagnostics, models, and financial implications. *Review of Financial Studies*, 17, 581-610