© Beytulhikme Philosophy Circle
Beytulhikme Int J Phil 8 (2) 2018
Research Article: 455-469

Popper'ın Aksiyomatik Olasılık Kuramı ve Değer-Atama Problemi

Popper's Axiomatic Probability System and the Value-Assignment Problem

MEHMET HİLMİ DEMİR
Middle East Technical University

Received: 05.08.2018 | Accepted: 12.12.2018

Abstract: In the standard theory of probability, developed by Kolmogorov, the concept of conditional probability is defined with what is known as the ratio formula: the probability of A given B is the ratio between the probability of A and B and the probability of B, i.e. P(A|B)= (P(AB))/(P(B)). Clearly, this ratio is not defined when the probability of the condition, P(B), is 0. According to Popper, this problem, which is known as the zero-denominator problem, shows a serious conceptual shortcoming of the standard Kolmogorovian theory of probability. In order to overcome this shortcoming, Popper developed an alternative axiomatic theory of probability where conditional probability is taken as primitive. It should be noted that this axiomatic probability theory is different than and independent from Popper's philosophy of probability which is based on the propensity approach. Popper claims that his axiomatic theory is a better fit for the use of probability in the philosophy of science and statistics. Based on this claim, it is often stated that Popper's theory is conceptually superior to Kolmogorov's theory. The ultimate aim of this paper is to evaluate this claim by analyzing Popper's axiomatic theory within the context of the zero-denominator problem.

Keywords: Conditional probability, Popper, Kolmogorov, Hájek, Zero denominator problem.

© Demir, M. H. (2018). Popper'ın Aksiyomatik Olasılık Kuramı ve Değer-Atama Problemi. *Beytulhikme An International Journal of Philosophy*, 8 (2), 455-469.

✉ Mehmet Hilmi Demir
Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Felsefe Bölümü
06800, Ankara, Turkey | mhilmidemir@gmail.com

Introduction

Olasılık kuramlarının açıklamaya çalıştığı iki farklı tür olasılık fonksiyonu mevcuttur. Tek değişkenli olan ilk fonksiyon, tekil bir olayın başka hiçbir olaya bağlı olmayan olasılığına tekabül eder ve *koşulsuz olasılık* olarak adlandırılır. İkinci tür fonksiyon ise bir olayın başka bir olayın gerçekleşmesi durumunda alacağı olasılık değerini hesaplayan iki değişkenli *koşullu olasılık* fonksiyonudur. Bazı olasılık kuramları *koşulsuz olasılığı* temel-primitif olarak kabul eder ve *koşullu olasılığı* temel aldığı fonksiyon cinsinden ifade eder. Başka olasılık kuramları ise bunun tam tersi bir yöntem izler, yani *koşullu olasılığı* temel-primitif olarak alır ve *koşulsuz olasılığı* onun üzerinden açıklarlar. İlk gruptaki olasılık kuramlarına günümüzde artık kullanımı standartlaşmış Kolmogorov'un 1930'lu yıllarda geliştirdiği aksiyomatik sistem örnek verilebilir. İkinci grupta yer alan bir çok farklı kuram mevcuttur (Carnap 1971; Renyi 1955; Popper 1959; Von Wright 1960). Bu grupta standardlaşmış bir sistem olmamasına rağmen Popper'ın 1950'li yıllarda geliştirdiği ve *The Logic of Scientific Discovery* kitabının İngilizce baskısının eklerinde detaylandırdığı aksiyomatik sistem öne çıkmaktadır[1]. Popper tipi kuramlar, Kolmogorov sisteminde koşullu olasılık için verilen tanım bu kavrama dair olan felsefi beklentilerimizi tam olarak karşılamadığı için geliştirilmiştir. Kolmogorov'un kuramının *koşullu olasılığı* koşul olayının olasılığı sıfır olduğunda tanımsız bırakması temel bir eksiklik olarak değerlendirilmektedir. Literatürde sıfır-payda problemi (bkz. Hájek 2003) olarak bilinen bu eksiklik, özellikle Popper'a göre ciddi bir kavramsal zaaftır ve bu zaafı ortadan kaldırmanın tek yolu *koşullu olasılığı* temel-primitif alan bir aksiyomatik sistem oluşturmaktır (Popper 1959). Popper tipi diğer kuramlar da buna benzer düşünceler ile Kolmogorov'un sistemini eleştirmektedirler. Kısacası, literatürde Popper'ın olasılık konusundaki çalışmalarından bu yana yaygın olan kanı Kolmogorov'un kuramının aşağıda detaylı açıklanacak olan sıfır-payda probleminden muzdarip olduğu ve Popper tipi aksiyomatik kuramların böylesi bir probleme sahip olmadığı için Kolmogorov'un sistemine göre olasılık kavramına dair felsefi beklentilerimizi daha iyi karşıladığıdır. Bu makalenin ana

[1] Leblanc'ın da belirttiği gibi (1989, s. 175), Popper'un sisteminde kullandığı koşullu olasılık fonksiyonu diğer alternatiflere göre en az kısıta (constraint) sahip olan fonksiyondur, bu anlamda da daha kapsayıcıdır.

amacı Popper'ın aksiyomatik sistemini sıfır-payda problemi çerçevesinde incelemek ve gerçekten böylesi bir kavramsal üstünlüğe sahip olup olmadığını değerlendirmektir. Bu çerçevede varılan sonuç şudur: Popper'ın olasılık kuramı sıfır-payda problemini çözmektedir ancak en az sıfır-payda problemi kadar önemli ve değer-atama problemi olarak adlandırılacak bir başka probleme sahiptir.

Yazımıza başlamadan önce şu hususu belirtmekte fayda var: Popper'ın olasılık literatürüne en yaygın olarak bilinen katkısı olasılık felsefesine yönelik geliştirdiği eğilimci (propensity) yaklaşımıdır. Popper'ın eğilimci yaklaşımı diğer alternatifler olan mantıksal, frekansçı ve öznelci yaklaşımlara göre ciddi avantajlara sahiptir. Bu anlamda Popper'ın olasılık felsefesinin frekansçı bir yaklaşıma sahip olan Kolmogorov'a felsefi olarak üstün olduğu olduğu düşünülmektedir. Ancak, önemle belirtilmelidir ki, bu yazının konusu Popper'ın olasılık felsefesi yaklaşımı değildir. Olasılık felsefesine ek olarak, Popper aksiyomatik bir olasılık kuramı da geliştirmiştir[2]. Bu olasılık kuramı, kendisinin de belirttiği gibi, olasılık felsefesi yaklaşımlarından tümü ile ayrı ve bağımsızdır. Tam da bu özelliğinden dolayı Popper kendi kuramının "formel" bir kuram olduğunu iddia etmektedir. Bu yazıda ele alınan konu Popper'ın aksiyomatik olaslılık kuramıdır. İncelenecek olan soru ise Popper'ın bu aksiyomatik kuramının Kolmogorov'un sistemine göre mukayaseli bir üstünlüğü olup olmadığıdır. Ve bu sorunun incelenmesi, Popper'ın da belirttiği gibi, olasılık felsefesine getirilen farklı yaklaşımlardan bağımsızdır. Bu nedenle de eğilimci (propensity), mantıksal, frekansçı, öznel olasılık felsefesi yaklaşımları bu yazının kapsamı dışında tutulmuştur.

Yazı dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde Kolmogorov'un aksiyomatik sistemi ve sıfır-payda probleminin nasıl ortaya çıktığı ikinci bölümde ise Popper'ın aksiyomatik kuramı açıklanmaktadır. Üçüncü bölümde Popper'ın kuramına has bir sorun olan değer-atama problemi incelenirken dördüncü bölümde kısa bir sonuç değerlendirmesi yapılmaktadır.

[2] Popper bu kuramı ilk olarak 1955 yılında *British Journal of Philosophy of Science* dergisinde "Two Autonomous Axiom System for the Calculus of Probabilities" ismili makalesinde yayınlamış ve sonrasında 1959 tarihli *The Logic of Scientific Discovery* kitabının eklerinde detaylandırmıştır.

1. Kolmogorov'un Olasılık Kuramı ve Sıfır-Payda Problemi

Kolmogorov'un olasılık kuramı küme teorisi kullanılarak beş aksiyom temelinde inşa edilmiştir. Kolmogorov'un 1933 tarihinde yazdığı ve 1950 yılında ilk İngilizce baskısı yapılan *Foundations of The Theory of Probability* isimli eserinde listelediği aksiyomlar şunlardır[3].

E kümesi bütün basit olayların bir kümesi olsun. M kümesi ise bu E kümesinin alt kümelerinin bir kümesi olsun.

Aksiyom 1:	M kümesi kesişim, birleşim ve fark işlemlerinin tanımlı olduğu bir cisimdir.
Aksiyom 2:	E, M kümesinin bir elemanıdır.
Aksiyom 3:	M'nin elemanı olan her A kümesi için pozitif bir reel sayı atanır ve bu atanan sayıya A olayının olasılığı, $P(A)$, denir.
Aksiyom 4:	$P(E) = 1$
Aksiyom 5:	A ve B'nin hiçbir ortak elemanları yok ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Kolmogorov 1933/1956 s. 2)

Bu beş aksiyomdan açıkça görüldüğü gibi Kolmogorov'un sistemi koşulsuz olasılık olarak adlandırdığımız tekil bir olayın olma olasılığını, $P(A)$, temel almaktadır. Bu temelde koşullu olasılığı ise şöyle tanımlamaktadır[4].

$P(A) > 0$ olduğu durumlarda $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ oranı B olayının A olayının olma şartına göre koşullu olasılığı olarak tanımlanır (a.g.e., s. 6).

Bu tanıma göre koşullu olasılık, koşul olayının olasılığının 0 olduğu durumlarda tanımsızdır ve üzerine herhangi bir kavramsal değerlendirme yapılamaz. Ancak koşullu olasılık kavramı düşünüldüğünde koşul olayının olasılığının değerinden bağımsız olarak doğru kabul ettiğimiz bazı doğrular vardır. Örneğin, $P(A|A)$'nın değerinin A olayının kendi olasılığından

3 Anlaşılırlık amacı ile Kolmogorov'un orijinal ifade ve notasyonlarında içeriğe etki etmeyecek ufak tefek değişiklikler yapılmıştır. Ayrıca İngilizce metinden çeviri makalenin yazarı tarafından yapılmıştır. Bu durum bütün Kolmogorov alıntıları için geçerlidir.

4 Kolmogorov'un bu 'tanımının' aslında bir tanım olmadığı sadece bir değer hesaplama formülü veya analiz olduğu literatürde birçok kez belirtilmiştir (Bkz. Lowe 1996, Lowe 2008, Hájek 2003, Fitelson and Hájek 2017).

bağımsız olarak $\mathbf{1}$ olması gerekir. Çünkü $P(A|A)$, $\boldsymbol{A}$ olayının gerçekleşmesi durumunda $\boldsymbol{A}$ olayının olma olasılığını temsil etmektedir. Ve bu değerin $\mathbf{1}$, yani kesinlik mertebesinde olması gerekliliği mantıksal bir doğrudur. Aynı şekilde $\boldsymbol{A}$ olayının olasılık değerinden bağımsız olarak $P(Değil - A|A) = 0$ olmalıdır. Kolmogorov'un tanımının koşullu olasılığın bu uç değerlerindeki beklentilerimizi karşılayamaması sıfır-payda problemi olarak adlandırılmakta ve ciddi bir kavramsal zaaf olarak değerlendirilmektedir[5].

İlk bakışta sıfır-payda problemi pek ciddi bir etkisi olmayan, ihmal edilebilir teknik bir problem olarak görülebilir. Çünkü olasılığı sıfır olan olaylara koşullama ne günlük yaşamda ne de olasılık kuramının ampirik uygulamalarında rastlanabilecek bir durum değildir. Bu doğrudur ve bu yüzden de olasılık kuramının kullanıcıları, ki buna matematikçiler de dahildir, Kolmogorov sistemini kullanmakta hiç bir sorun görmemektedirler. Ancak kavramsal açıdan sıfır-payda problemi ciddi bir problemdir. Çünkü olasılığı sıfır olan olaylar sadece **imkânsız olaylar** ile sınırlı değildir. Olası ve olasılığı sıfır olan olaylar teorik düzeyde de olsa mevcuttur. Buna bir örnek olarak sonsuz kez atılan bir paranın hep yazı gelme olayı gösterilebilir[6]. Kolmogorov bu durumu şöyle ifade etmektedir.

> Aksiyomlarımıza göre, imkânsız bir olayın (boş küme ile temsil edilen bir olay) olasılığı $\mathbf{0}$ olacaktır, yani$P(\emptyset) = 0$, ancak bunun tersi doğru değildir: $P(A) = 0$ olması $\boldsymbol{A}$ olayının imkânsız bir olay olduğu anlamına gelmemektedir. $P(A) = 0$olduğunda $\boldsymbol{A}$ olayı hakkında söyleyebileceğimiz tek şey $\boldsymbol{A}$ olayının pratik olarak imkânsız olduğudur. Bu kati surette yeterince uzun bir test serisinde $\boldsymbol{A}$ olayının gerçekleşmeyeceği anlamına gelmez. (Kolmogorov 1933/1956 s.5)

Bu alıntıdan da açıkça görüldüğü gibi teorik olarak imkânlı bazı olayların olasılığı $\mathbf{0}$ olacaktır. Ve bu tür olaylar koşuluna bağlı olarak başka olayların olasılığı üzerine en azından teorik düzlemde akıl yürütmenin gerekli olduğu durumlar olacaktır. Ancak sıfır-payda probleminden dolayı,

[5] Bu tür değerlendirmelerin yer aldığı literatür oldukça geniştir. Popper 1959 ve Hájek 2003 bu konuda verilebilecek iki temel örnektir.

[6] Bu tür olayların kavramsal önemi için bkz. Hájek 2010.

Kolmogorov'un sistemi bu tür akıl yürütmelere olanak tanımamaktadır[7]. Popper'a göre bu çok önemli bir eksikliktir ve bu eksikliğin yol açacağı problemler sadece olasılık kuramları ile sınırlı kalmayacak, bilim felsefesi ve istatistik gibi alanları da etkileyecektir. Popper bu etkileri 1955 yılında *British Journal for the Philosophy of Science*'da yayınlanan ve daha sonra *The Logic of Scientific Discovery*'nin 1959 baskısına 4. Ek olarak konulan "The Formal Theory of Probability" isimli makalesinde gayet detaylı bir biçimde incelemektedir. Popper'ın bu incelemesinin anlaşılması açısından aşağıdaki görece uzun alıntı faydalı olacaktır. Bu alıntı ve sonrasında ağırlıklı olarak Popper'ın kuramından bahsedileceği için Popper'ın notasyonu kullanılacaktır. Popper'ın notasyonunda Kolmogorov'unkinden farkı olarak olasılık birimleri için büyük harf yerine küçük harf kullanılmakta ve koşullu olasılık $p(b,a)$ olarak gösterilmektedir. Popper, Kolmogorov tipi kuramlar hakkında şunları söylemektedir:

> [Kolmogorov tipi kuramların] dizgeleri mantıksal açıdan çok zayıftır. (en azından benimkilerle karşılaştırıldığında). Bu dizgelerde $p(a,b)=r$'nin anlamlı bir formül iken aynı öğeleri içermesine rağmen, $p(b,a)=r$'nin anlamlı olmadığı; yani formülün kurallara uygun olarak tanımlanmadığı ve hiçbir şekilde tanımlanamayacağı durumlar olacaktır; çünkü $p(a)=0$'dır. Bu tür bir dizge yalnızca zayıf olmakla kalmayıp, aynı zamanda dikkate değer amaçlar için de *yeterli değildir*; örneğin koşulsuz olasılıkları sıfır olan önermelerde, doğru biçimlerde kullanılamaz; oysa bu kullanım çok önemlidir: Örneğin evrensel yasaların olasılıkları, bizim de burada geçici olarak kabul etmek istediğimiz gibi, sıfırdır. $\boldsymbol{s}$'nin $\boldsymbol{t}$'den türetildiği evrensel iki kuramı, $\boldsymbol{s}$ ve $\boldsymbol{t}$'yi ele aldığımızda, $p(s,t)=1$ olduğunu ileri süreriz. Ama $p(t)=0$ olduğundan, olasılık kuramının alışılmış dizgelerinde bunu ileri süremeyiz. Benzer nedenlerden dolayı, $\boldsymbol{e}$'nin, $\boldsymbol{t}$ kuramını destekleyen bir delil olduğunu ifade eden $p(e,t)$ olasılığı tanımlanamaz olarak kalır. Oysa bu anlatım çok önemlidir

[7] Olasılığı sıfır olan olaylara koşullama temelinde akıl yürütmenin gerekli olduğu farklı alanlara bir örnek olarak Oyun Teorisi verilebilir. Önemli bir oyun teorisyeni olan Hammond (1999) bu konuda şunu söylemektedir: "Oyun teorisinde sıklıkla bir oyuncunun en rasyonel/en iyi seçenekten saptığında ne olacağını tartışmak gerekir. Ancak oyun teorisinin varsayımlarına göre olanaksız olan bu durumun olasılığı sıfırdır. Bu nedenle, oyun teorisi kuramcıları sıklıkla koşul olayının olasılığının sıfır olduğu koşullu olasılıkları kullanmak durumunda kalmaktadırlar."

(Burada kastedilen, Fisher'in "likelihood"u; yani gerçeğin saptanması sonucunda, t kuramının göreli "olabilirliği" ya da "inandırıcılığıdır".)

Popper, bilim felsefesi ve istatistik alanlarından örneklerle belirttiği problemleri ortadan kaldırmak için koşullu olasılığı temel aldığı alternatif bir olasılık kuramı geliştirmiş ve bu kuramın Kolmogorov 'un kuramına göre ciddi teorik avantajlara sahip olduğunu iddia etmiştir. Popper'ın bu iddiası ve kuramının detayları bir sonraki bölümde incelenecek ve değerlendirmeye tabi tutulacaktır.

2. Popper'ın Aksiyomatik Olasılık Kuramı

Popper, Kolmogorov tipi olasılık kuramlarını geleneksel-simterik olmayan kuramlar olarak adlandırmaktadır. Kolmogorov tipi kuramlar simetrik değildir, çünkü yukarıda da belirtildiği gibi $p(a,b)$'nin tanımlı olmasına karşın $p(b,a)$'nın tanımlı olmadığı durumlar mevcuttur. Bunu önemli bir olumsuzluk olarak değerlendiren Popper simetrik bir olasılık kuramı oluşturmaktadır. Popper bu kuramında koşullu olasılığı temel-primitif olarak aldığından dolayı koşullu olasılık için ayrı bir tanım verilmesi gerekmemiş ve bu sayede de sıfır-payda problemi engellenmiştir. Yani, Popper'ın kuramında $p(a,b)$'nin tanımlı olduğu her yerde $p(b,a)$'da tanımlıdır. Bu da Popper'ın kuramının simetrik bir kuram olmasını sağlamaktadır[8].

Popper'ın olasılık kuramında 6 aksiyom mevcuttur. Bu aksiyomlar, Popper'ın kullandığı notasyon bilgileri ve aksiyomların dayandığı temel postulalar ile birlikte şunlardır.

[8] Popper yukarıda ismi belirtilen "The Formal Theory of Probability" isimli makalesinde geliştirdiği kuramının, geleneksel Kolmogorov tipi kuramlardan simetrik olmanın yanında formel ve otonom olma özellikleri ile de farklılaştığını belirtmektedir. Popper'a göre kendi kuramı formeldir çünkü herhangi belli bir olasılık felsefesi yaklaşımına dayanmamaktadır. Yani bütün olasılık yorumları ile uyumludur. Popper'ın kuramı otonomiye sahiptir çünkü kuramda olasılık fonksiyonlarına dair yapılan bütün çıkarımlar tümü ile olasılığa dair önermelerden yapılmakta ve bu anlamda da kendi kendine yeter özerk bir sistem olmaktadır. Popper'ın bu iddialarının da doğruluğu tartışmalıdır, ancak bu makalenin kapsamı bu tartışmaları içine alacak kadar geniş tutulmamıştır.

	Notasyon
S	Evren, yani kuramda kabul edilebilir olan elemanların listesi[9].
$a, b, c,..$	S'nin elemanları.
$p(a,b)$	a'nın b'ye şartlı olasılığı.
ab	a ve b.
$\bar{a}$	a'nın tümleyeni.
$b\bar{b}$	Boş küme, yani çelişik önermeye tekabül eden küme
$\overline{b\bar{b}}$	Evrenin tümü, yani totolojik önermeye tekabül eden küme. Metnin geri kalanında biz bunu $\boldsymbol{T}$ olarak ifade edeceğiz.
	Postulalar
Postula 1	S en çok sayılabilir sonsuz büyüklüğünde olabilir.
Postula 2	Eğer a ve b, S kümesinin elemanları ise $p(a,b)$reel bir sayıdır.
	Aksiyomlar
A1[10]	Varlık aksiyomu: $(\exists \boldsymbol{c})\ (\exists \boldsymbol{d})\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \neq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$
A2	Yer değiştirme aksiyomu: $((\boldsymbol{c})\ (\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})) \rightarrow \boldsymbol{p}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b})$
A3	Yansıma Aksiyomu: $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})$
B1	Monotoni Aksiyomu: $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{ab},\boldsymbol{c}) \leq \boldsymbol{p}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$
B2	Çarpım Aksiyomu: $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{ab},\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{bc})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$

[9] S kümesi, Kolmogorov'un sistemindeki olaylar kümesine denk gelmektedir. Popper kuramının genel uygulanabilirliğini korumak açısından özellikle olay kümesi veya önermeler kümesi dememektedir.

[10] Aksiyomların numaralandırmasında Popper'ın orijinal numaralandırmasına sadık kalınmıştır.

C	Tümleme Aksiyomu: $\boldsymbol{p(a,a) \neq p(b,a) \rightarrow p(a,a) = p(c,a) + p(\bar{c},a)}$

İlk aksiyom bütün olasılık değerlerinin birbirine eşit olmasını engellemekte ve olasılık değerlerinin varlığını garantilemektedir. İkinci aksiyom elemanların yer değiştirme yöntemini belirlerken, yansıma aksiyomu olarak adlandırılan üçüncü aksiyom $p(a,a)$değerinin $\mathbf{1}$ olduğunu kanıtlamakta kullanılmaktadır. **B1** aksiyomu ise monotoniye yani olasılık değerlerinin artışına dair düzenlemeyi yapmaktadır. **B2,** çarpım kuralı olarak bilinen kurala denk gelirken son aksiyom bir elemanın olasılığı ile tümleyeninin olasılığı arasındaki ilişkiyi formüle etmektedir.

Popper bu aksiyomlar temelinde geleneksel olasılık kuramlarında doğru olan bir çok teoremi 100 satırlık bir ispat ile kanıtlamaktadır[11]. Burada dikkat çekmek istediğimiz husus Popper'ın aksiyomlarında olasılık fonksiyonlarının alabileceği değerlere dair hiçbir alt sınır veya üst sınır varsaymamasıdır. Popper aksiyomlarını kullanarak olasılık değerlerinin en fazla 1 ve en az 0 olabileceğini ispatlamaktadır. Bunun ardından, olasılık kuramlarının eşkuvvet (idempotence), değişme, birleşme gibi bildik özellikleri kolaylıkla ispatlanmaktadır. Popper bu uzun ispatında, $p(a,\overline{b\bar{b}})$'nın Kolmogorov'un koşulsuz olasılığının yani $p(a)$'nın gerekli bütün özelliklerine sahip olduğunu da ispatlamaktadır[12]. Yani, tekil bir olayın olasılığı o olayın evrenin tümüne koşullu olasılığına eşittir: $p(a) = p(a,\overline{b\bar{b}})$.

Bütün bunlar Popper'ın oluşturduğu teknik kuramın teknik açıdan ne kadar güçlü ve yeterli olduğunu göstermektedir. Bu anlamda, Popper'ın kuramının Kolmogorov'un kuramından herhangi bir geri kalır yanı görünmemektedir. Buna ek olarak, simetrik olması sebebi ile de sıfır-payda probleminden muzdarip olmadığı göz önüne alındığında Popper'ın kuramının Kolmogorov'un kuramına göre kavramsal açıdan daha avantajlı olduğu sonucuna varılabilir, ki literatürde bu tür iddialara sıklıkla rastlanmaktadır[13]. Ancak bu sonuç doğru değildir, çünkü Popper'ın kuramı her

[11] Bu ispat *The Logic of Scientific Discovery*'nin 1959 basımında 5. Ek olarak "Derivations in the Formal Theory of Probability" başlığı ile yer almaktadır.
[12] Bu bir önceki notta belirtilen ispatın 75. satırında gösterilmektedir.
[13] Buna görece güncel bir örnek olarak Briggs'in şu ifadeleri verilebilir: "Alternatif olarak kullanılabilecek strateji [koşullu olasılığı temel-primitif alan strateji] ifadenin gerektirdiği oran tanımsız olduğu durumlarda bile P(B|A)'nın tanımlı olmasına imkan vermektedir.

ne kadar sıfır-payda probleminden muzdarip olmasa da en az onun kadar önemli bir başka probleme neden olmaktadır. Değer-atama problemi olarak adlandıracağımız bu problem bir sonraki bölümde incelenecektir.

3. Değer-Atama Problemi

Belirtildiği gibi Popper'a göre simetrik olma özelliği olasılık kuramları için elzemdir. Çünkü olasılığı sıfır olan olaylara koşullama gerek doğa bilimlerinin teorilerinde gerekse de istatistiksel değerlendirmelerde önemli bir yer tutmaktadır. Yani $p(a,b)$ tanımlı olduğu sürece $p(b,a)$ da tanımlı olmalıdır. Popper'ın sistemi bu gerekliliği sağlamaktadır. Ancak sadece $p(b,a)$'nın tanımlı olması yeterli değildir; kullanılabilir olması açısından $p(b,a)$ belli bir spesifik değer de alabilmelidir. Aksi takdirde $p(b,a)$tanımlı ancak belli bir değere sahip olmadığı/olamadığı için herhangi bir değerlendirmede kullanılamayacak bir ifade olacaktır. $p(b,a)$'nın spesifik değeri belli bir anda biliniyor ya da bilinmiyor olabilir ancak $p(b,a)$'ya atanacak böylesi belirli bir değer olmalıdır. Bir başka deyişle, $p(b,a)$'nın değerinin en azında belirli koşullar altında hesaplanabiliyor olması gerekmektedir. Gelin görün ki, Popper'ın kuramı $p(b,a)$'ya koşulun olasılığının sıfır olduğu durumlarda belli bir değer **atayamamaktadır**. Koşulun olasılığının sıfır olduğu durumlarda, Popper'ın kuramına göre, $p(b,a)$ olasılığına $[0,1]$aralığından atanacak herhangi bir değer, yani olası bütün değerler Popper'ın kuramı ile uyumlu olmaktadır. Aşağıda vereceğimiz örnek bu iddiamızı açıklamaktadır.

Örnek: $\boldsymbol{a}$ olayı olasılığı $\mathbf{0}$ olan olası bir olay olsun. Bu $\boldsymbol{a}$, Popper'ın dediği gibi evrensel bir doğa yasası olabilir ya da Kolmgorov'un dediği gibi sonsuz kez atılan bir paranın hep yazı gelmesi durumu olabilir. $\boldsymbol{b}$ olayı ise olasılığı $\frac{1}{2}$ olan herhangi bir olay olsun. $\boldsymbol{b}$ olayının $\boldsymbol{a}$ olayına koşullu olasılığı nedir? Yani, $p(b,a)$'ya hangi değer atanmalıdır?

(Buna imkan verilmesi doğru görünmektedir çünkü adil bir paranın atıldığında tura gelmesi olasılığı paranın atılmasının olasılığının belirsiz olduğu durumlarda bile 1 / 2 olmalıdır.)" (2010, p.940). Fitelson ve Hajek'in "Declarations of Independence" isimli makalesi ise daha da güncel bir örnektir (2017).

Kolmogorov'un kuramında $p(a) = 0$ olduğundan, $p(b,a)$ tanımsızdır. Yani Kolmogorov tipi kuramlar örneğimizde sorulan soruya cevap verememektedir. Belirtildiği gibi Popper'ın kuramında $p(b,a)$ tanımlıdır ve bu ilk bakışta Komgorov tipi kuramlara göre kavramsal bir üstünlük gibi durmaktadır. Ancak $p(b,a)$'nın tanımlı olması örnekte sorulan soruyu cevaplamaya yetmez. $p(b,a)$ tanımlıdır ancak değeri nedir? Örnekte verilen bilgiler ve Popper'ın kuramı temelinde şu ispata ulaşmak mümkündür.

	Verili Öncüller	
Ö1	$\boldsymbol{a}$ olayının olasılığı $\mathbf{0}$: $p(a, b\overline{b}) = 0$. Okuma kolaylığı için $p(a, \boldsymbol{T}) = 0$ olarak kullanılacak.	
Ö2	$\boldsymbol{b}$ olayının olasılığı $\mathbf{1/2}$: $p(b, b\overline{b}) = \frac{1}{2}$. Okuma kolaylığı için $p(b, \boldsymbol{T}) = \frac{1}{2}$ olarak kullanılacak.	
	İspat	
	$\mathbf{1}. p(a,T) = 0$	**(Ö1)**
	$\mathbf{2}. p(b,T) = \frac{1}{2}$	**(Ö2)**
	$\mathbf{3}. p(ab,T) < p(a,T)$	**(B1'den: c** değişkeninin **T** ile özellemesi**)**
	$\mathbf{4}. p(ab,T) = 0$	**(1 ve 3)**
	$\mathbf{5}. p(ab,T) = p(b,aT)p(a,T)$	**(B2'den)**
	$\mathbf{6}. p(ab,T) = p(b,a)p(a,T)$	**(5 ve T = totoloji)**
	$\mathbf{7}. 0 = p(b,a)p(a,T)$	**(4 ve 6'dan)**
	$\mathbf{8}. 0 = p(b,a).0$	**(1 ve 7'den)**

$p(b,a)$ için $[0,1]$ aralığında vereceğimiz herhangi bir değer 8. satırdaki eşitliği sağlayacaktır. Yani, $p(b,a)$ tanımlı olmasına rağmen herhangi **belirli** bir değer alamamaktadır. Değer-atama problemi olarak adlandırdığımız bu problem[14], Popper'ın simetrik kuramının koşul olasılığının $\mathbf{0}$ olduğu durumlarda herhangi teorik veya pratik bir uygulamasının olamayacağını gösterir. Bir diğer deyişle, $p(b,a)$'nın Popper'ın sisteminde tanımlı olması, bu olasılığa herhangi bir değer atanamayacağı için, bir anlam ifade etmemektedir.

Vardığımız bu önemli sonuca ve temelinde yatan akıl yürütmeye şöyle bir itiraz getirilebilir: Burada gösterilen şey sadece $p(b,a)$'nın $p(a)$ ve $p(b)$'den hesaplanamayacağıdır. Ama vardığınız sonuç $p(b,a)$'nın hiçbir şekilde hesaplanamayacağıdır. $p(b,a)$'nın $p(a)$ ve $p(b)$'den hesaplanamıyor oluşu $p(b,a)$'nın hiçbir şekilde hesaplanamayacağı anlamına gelmez.

İlk bakışta anlamlı görünen bu itirazın biraz dikkatle incelendiğinde temelsiz olduğu görülecektir. Çünkü yukarıda belritilen örnek ve akıl yürütme $p(b,a)$'nın hesaplanabilmesi için kullanılabilecek olası bütün değerleri ihtiva etmektedir. Ve buna rağmen $p(b,a)$'ya belirli bir değer atanamamaktadır. Bu durumu daha açık hale getirmek için şu soruyu soralım: $p(b,a)$'yı, yani $\boldsymbol{b}$'nin $\boldsymbol{a}$'ya koşullu olasılığını hesaplamak için ne tür değerler kullanılabilir? Bu sorunun cevabı olarak verilebilecek bütün değerlerin listesi şudur:

1	$\boldsymbol{a}$ olayının olasılığı
2	$\boldsymbol{b}$ olayının olasılığı
3	$\boldsymbol{a}$ olayının değilinin olasılığı
4	$\boldsymbol{b}$ olayının değilinin olasılığı
5	$\boldsymbol{a}$ veya $\boldsymbol{b}$ olayının olasılığı
6	$\boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ olayının olasılığı
7	$\boldsymbol{değil} - \boldsymbol{a}$ veya $\boldsymbol{b}$ olayının olasılığı
8	$\boldsymbol{değil} - \boldsymbol{a}$ ve $\boldsymbol{b}$ olayının olasılığı
9	$\boldsymbol{değil} - \boldsymbol{b}$ veya $\boldsymbol{a}$ olayının olasılığı
10	$\boldsymbol{değil} - \boldsymbol{b}$ ve $\boldsymbol{a}$ olayının olasılığı

[14] Değer-atama problemini formel olarak kanıtlamanın bir diğer yolu da metinde verilen örnek gibi belli bir bağlamda $p(b,a)$'ya rastgele iki farklı değer verip, bu değer-atamalarının her birinin Popper kuramının aksiyomları ile tutarlı olduğunu göstermektir.

11	***değil* − *b*** veya ***değil* − *a*** olayının olasılığı
12	***değil* − *b*** ve ***değil* − *a*** olayının olasılığı

(1) ve (2) nolu değerler örnekte verilen değerlerdir. Listede yer alan diğer değerlerin hepsi de örnekte ihtiva edilmektedir. ***a*** olayının olasılığı **0** olduğu için (6), (10) değerleri **0** ve (5), (8) değerleri ***b*** olayının olasılığı olan ½'dir. Geri kalan değerlerin ne olduğu da $p(a)$ ve $p(b)$'den doğrudan basit toplama çıkarma işlemleri ile bulunabilecektir. Yani yukarıda kullandığımız örnek ve akıl yürütme $p(b,a)$'nın hesaplanabilmesi için kullanılabilecek olası bütün verileri kapsamaktadır. Eğer $p(b,a)$'nın değeri başka veriler kullanılarak hesaplanabilecek olsaydı yukarıda verdiğimiz örnekte de hesaplanabilirdi. Sözün özü, yukarıda vardığımız sonuca getirilen itiraz geçerli değildir.

Sonuç

Popper'ın koşullu olasılığı temel-primitif alarak geliştirdiği olasılık kuramı, Kolmogorov'un kuramının muzdarip olduğu sıfır-payda problemini çözmektedir. Yani Popper'ın sisteminde $p(b,a)$ olasılık değeri $p(a)$ değerinin sıfır olduğu durumlarda bile tanımlıdır. Popper'a göre bu çok önemli bir kavramsal avantajdır. Ancak bu makalede gösterildiği gibi Popper'ın aksiyomatik kuramı sıfır-payda problemini çözerken en az sıfır-payda problemi kadar önemli bir başka problemi doğurmaktadır: Değer-atama problemi. $p(b,a)$ koşul olayının olasılığı sıfır olduğunda tanımlıdır ancak belirlenebilir bir değere sahip değildir.

Kaynaklar

Briggs, R. (2010). The Metaphysics of Chance. *Philosophy Compass,* 5 (11), 938–952.

Carnap, R. (1971). A Basic System of Inductive Logic, Part I. *Studies in Inductive Logic and Probability*. (Ed. R. Carnap & R. C. Jeffrey). California: University of California Press, 33-165.

Fitelson, B. & Hájek, A. (2017). Declarations of Independence. *Synthese*, 194, 3979-3995.

Hájek, A. (2003). What Conditional Probability Could Not Be' *Synthese*, 137, 273-323.

Hájek, A. (2010). A Plea for the Improbable. AAP presidential address.

Hammond, P. J. (1999). Non-Archimedean Subjective Probabilities in Decision Theory and Games. *Mathematical Social Sciences,* 38 (2), 139-156

Kolmogorov, A. N. (1933/1956) *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung, Ergebnisse Der Mathematik.* Trans. *Foundations of the Theory of Probability*. New York: Chelsea Publishing Company.

Lowe, E. J. (1996). Conditional Probability and Conditional Beliefs. *Mind*, 105, 603–15.

Popper, K. (1955). Two Autonomous Axiom System for the Calculus of Probabilities. *British Journal for the Philosophy of Science*, 21, 51-57.

Popper, K. (1959). *The Logic of Scientific Discovery*, London & New York: Basic Books.

Leblanc, H. (1989). The Autonomy of Probability Theory (Notes on Kolmogorov, Rényi, and Popper). *British Journal for the Philosophy of Science*, 40 (2), 167-181

Lowe, E. J. (2008). What is 'Conditional Probability'? *Analysis*, 299, 218-223.

Renyi, A. (1970). *Foundations of Probability.* San Francisco: Holden-Day.

Salmon, W. (1966). *The Foundations of Scientific Inference*. Pittsburgh: University of Pittsburgh Press.

Von Wright, G. (1960). *A Treatise on Induction and Probability.* New Jersey: Littlefield, Adams & Co.

Öz: Kolmogorov tarafindan geliştirilen standard olasılık kuramında, A olayının B olayına koşullu olasılığı, P(A|B)= P(AB))/(P(B)) oranı ile tanımlanmaktadır. Bu oran, paydanın yani koşul olayının olasılığının sıfır olduğu durumlarda tanımsızdır. Literatürde sıfır-payda problemi olarak adlandırılan bu problem, Karl Popper'a göre ciddi bir kavramsal zaafiyettir. Bu problemi çözmek için, Popper koşullu olasılığı temel alan alternatif bir aksiyomatik olasılık kuramı geliştirmiştir. Önemle belirtilmelidir ki, bu aksiyomatik kuram, Popper'ın yaygın olarak bilinen eğilimci (propensity) olasılık yaklaşımından tümü ile ayrı ve bağımsız bir kuramdır. Popper geliştirdiği aksiyomatik kuramın sıfır-payda problemini çözdüğü için bilim felsefesi ve istatistik gibi alanlarındaki olasılık uygulamalarına daha uygun olduğunu iddia etmiştir. Bu iddia temelinde, Popper'ın aksiyomatik kuramının standard Kolmogorov kuramına göre ciddi bir kavramsal üstünlüğe

sahip olduğu literatürde sıklıkla dile getirilmektedir. Bu makalede, Popper'ın aksiyomatik kuramı sıfır-payda problemi çerçevesinde incelenmekte ve gerçekten böylesi bir kavramsal üstünlüğe sahip olup olmadığı değerlendirilmektedir.
Anahtar Kelimeler: Koşullu olasılık, Popper, Kolmogorov, Hájek, sıfır-payda problemi.