İKİ SEVİYELİ KESİKLİ STOKASTİK TAŞIMA PROBLEMİ

Hande GÜNAY AKDEMİR[1], Fatma TİRYAKİ[2]

Özet

Bu çalışmada, müşteri taleplerinin stokastik, özellikle kesikli rassal değişkenler olduğu durumda optimal taşıma planını belirleyen hiyerarşik yapıdaki iki seviyeli bir kesikli stokastik taşıma problemi göz önüne alınmıştır. Önerilen modelde, bir merkezden yönetilmeyen bir firmada lider ve takipçinin iki ayrı grup fabrikayı yönettiği ve iki ayrı grup müşteri bölgesine sahip olduğu kabul edilmiştir. İlk önce hareket eden oyuncu, yani lider müşterilere göndereceği mal miktarlarını belirler, ardından takipçi kendi göndereceği miktarlara rasyonel bir şekilde karar verir. Müşteri bölgelerinde elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetleri söz konusudur. Liderin (takipçinin) amacı ilgili toplam taşıma maliyetleri ile kendi müşteri bölgelerindeki toplam beklenen elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetlerini minimize etmektir. Önerilen model, Karush-Kuhn-Tucker optimallik şartları kullanılarak tek seviyeli lineer olmayan programlama problemine dönüştürülmüştür, daha sonra, ortaklı olmayan çözümleri elde etmek için Dal-Sınır algoritması uygulanmıştır. Modeli açıklayabilmek için küçük bir sayısal örnek de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki seviyeli programlama; Taşıma problemi; Stokastik programlama; Stokastik taşıma problemi; Kesikli dağılımlı talep.

BILEVEL DISCRETE STOCHASTIC TRANSPORTATION PROBLEM

Abstract

In this paper, we consider a bilevel discrete stochastic transportation problem which is a two level hierarchical program to determine optimal transportation plan assuming that customers' demands are stochastic, in particular, discretely distributed random variables. In our model, we suppose that the leader and the follower operate two separate group of plants and own two separate group of customer zones in a decentralized firm. The leader, who moves first, determines quantities shipped to customers, and then, the follower decides his own quantities rationally. There are holding and shortage costs at customer zones. The leader's (the follower's) objective is to minimize the sum of corresponding total transportation costs and total expected holding cost and shortage cost in his customer zones. Our proposed model is transformed into a single level nonlinear programming by using Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions, and then, it is applied a branch and bound algorithm to obtain noncooperative solutions. A small numerical example is also given to illustrate our model.

Keywords: Bilevel programming; Transportation problem; Stochastic programming; Stochastic transportation problem; Discretely distributed demand.

[1] Öğr. Gör., Kırklareli Üniversitesi, handegunay@kirklareli.edu.tr
[2] Prof. Dr., Yıldız Teknik Üniversitesi, ftiryaki@yildiz.edu.tr

1. Giriş

Belirsizlik içeren gerçek hayattaki optimizasyon problemlerinde, model parametrelerini doğru bir şekilde belirlemek oldukça zordur. Stokastik programlama bu tür, belirsizlik altında karar verme problemlerinin çözümü ile ilgilenir. Belirsizliğin varlığını göz önüne almak için problem parametreleri rassal veya stokastik değişkenler olarak düşünülür. Belirsizliğin etkisini korumak üzere genellikle orijinal stokastik programlama problemi, lineer olmayan deterministik eşdeğerine dönüştürülür. Bu dönüşümü yapabilmek için olasılıksal programlama ya da iki aşamalı telafi edici stokastik programlama kullanılır. Daha sonra, lineer olmayan programlama problemleri için standart çözüm yöntemleri kullanılır (Werner, 2005). Tahmin edilemeyen ya da belirsiz problem parametrelerini kestirmek için belirsizliğin her kaynağı bir olasılık dağılımı ile gösterilmelidir.

Tedarik zinciri yönetiminin amacı; tedarikçileri, üreticileri, depoları, perakendecileri, taşımacıları ve müşterileri aynı anda koordine etmektir. Tedarik zinciri yönetimi ile ilgili problemler de üretim ve dağıtım gibi aşamalarda rassal veya belirsiz parametreler içerir. Talep ve fiyat gibi parametreler sürekli değiştiği için aksini kabul etmek zaten gerçekçi değildir. Taşıma, tedarik zinciri yönetiminin önemli bir parçasıdır. Tedarik zinciri yönetiminin birçok aşamasında, sonlu sayıda kaynak ve varış yeri içeren şebeke yapısındaki geleneksel taşıma problemi ile karşılaşılır. Mallar taşınırken toplam taşıma maliyetlerinin minimum olması istenir.

İki seviyeli programlama, iç içe geçmiş iki optimizasyon probleminden oluşan hiyerarşik yapıdaki bir sistemdir. Burada iki karar verici, ortaklı ya da ortaksız olarak bireysel amaç fonksiyonlarını optimize etmeye çalışırlar. İki seviyeli programlama, taşıma şebekeleri, yönetim, ekonomik planlama, mühendislik, kimya, çevre, optimal kontrol gibi aralarında hiyerarşik ilişki olan iki karar verici sınıfı içeren birçok alana başarıyla uygulanmaktadır (Dempe, 2002).

Bu çalışmada, iki seviyeli yapıdaki, talep belirsizliği içeren taşıma planlaması tipli bir problem göz önüne alınmıştır.

Literatürde, Patriksson ve Wynter (1999) denge kısıtlı matematik programlamanın stokastik uzantısını tanımlamıştır. Bu problem bir tür hiyerarşik yapıdaki belirsizlik altında karar verme problemi olarak görülebilir. Ryu ve diğerleri (2004) belirsizlik altında iki seviyeli karar verme problemini vermişlerdir. Burada, birinci seviye bir tedarik zincirinde dağıtımı yönetir, ikinci seviye ise üretimden sorumludur. Yazarlar, parametrik programlama tekniğine dayalı bir çözüm yöntemi önermişlerdir. Roghanian ve diğerleri (2007) aynı problemi tartışmışlardır, ancak yazarlar şans kısıtlı programlama tekniği ile belirsizliğin üstesinden gelmişlerdir. Şans kısıtlı programlamada, kısıtlar en az belirli bir olasılıkla sağlanmalıdır. Werner'in (2005) iletişim sektörüne uyguladığı iki seviyeli stokastik programlama modelinde belirsizlik, oyuncuların davranışından kaynaklanır. Kato ve diğerleri (2006) bazı parametreleri rassal değişkenler olan, iki seviyeli üretim planlama problemini göz önüne almışlar ve probleme etkileşimli bulanık programlama yöntemini uygulamışlardır. Katagiri ve diğerleri (2007) beklenen değer optimizasyonu ve varyans minimizasyonu modellerini oluşturarak ortaksız yapıdaki hiyerarşik karar probleminlerini göz önüne almışlardır. Kalashnikov ve diğerleri (2010) doğalgaz tedarik zincirinde iki seviyeli çok aşamalı stokastik optimizasyon modelini önermişlerdir. Bu modelde, doğalgaz yükleme şirketi lider, doğalgaz hattı yönetim şirketi takipçi olarak düşünülmüştür.

Bu çalışma şu şekilde düzenlenmiştir: bir sonraki bölümde temel kavramlarla ilgili ön bilgiler sunulmuştur. Bölüm 3'te iki seviyeli kesikli stokastik taşıma problemi tanımlanmış ve formülasyonu, daha sonra KKT şartları elde edilmiştir. Bölüm 4'te çözümün uygulanışını açıklamak için basit sayısal bir örnek ve çözümü verilmiştir. Son olarak, Bölüm 5'de sonuçlar özetlenmiştir.

2. Ön Bilgiler

2.1 İki Seviyeli Programlama

İki seviyeli programlamada karar değişkenleri kümesi, ayrık $\mathbf{x_1}$ ve $\mathbf{x_2}$ vektörlerine ayrılmıştır. İlk seviyedeki karar verici (lider), $\mathbf{x_1}$ vektörünü yönetirken, ikinci seviyedeki karar verici $\mathbf{x_2}$ vektörünü yönetir. Öncelikle liderin karar verdiği, takipçinin ise kararını alırken, liderin stratejisini göz önüne alarak liderin kararına tepki verdiği kabul edilir.

İki seviyeli problem aşağıdaki gibi modellenir: birinci seviye karar değişkenleri $\mathbf{x_1} \in \mathbb{R}^p$, ikinci seviye karar değişkenleri $\mathbf{x_2} \in \mathbb{R}^r$, birinci seviye amaç fonksiyonu $F:\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, ikinci seviye amaç fonksiyonu $f:\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$, birinci seviye kısıtları $G:\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{s'}$ ve ikinci seviye kısıtları $g:\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^s$ olmak üzere,

$$\begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{x_1}} F(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) \\ G(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) \le 0 \\ \begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x_2}} f(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) \\ g(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) \le 0 \end{cases} \end{array} \tag{1}$$

İki seviyeli programlama problemleri için birçok yöntem önerilmiştir. Mevcut metotlar, Colson ve diğerleri (2005a)'nde özetlenmiştir. Ortaklı olmayan iki seviyeli çözümler için önerilen modele Dal-Sınır algoritması (Bard ve Moore, 1990) uygulanmıştır. Öncelikle, hiyerarşik yapı standart matematik programlama problemine dönüştürülmüştür. Bunun için, ikinci seviye problemin yerine onun KKT şartları alınmıştır. Bu işlem orijinal problemi lineer olmayan tamamlayıcı kısıtlara sahip tek seviyeli programlama problemine indirger (Colson ve diğerleri, 2005b). İki seviyeli programlama probleminin tek seviyeli eşdeğer problemi aşağıda verilmiştir: Lagrange çarpanları vektörü $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^s$ olmak üzere,

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\boldsymbol{\mu}} F(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) & \\ G(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) \le 0 & \\ g(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) \le 0 & \\ \nabla_{\mathbf{x_2}} f(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) + \mu^T \nabla_{\mathbf{x_2}} g(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = 0 & \\ \mu_i g_i(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = 0, & i=1,\ldots,s \\ \mu_i \ge 0, & i=1,\ldots,s \end{array} \tag{2}$$

KKT optimallik şartları ikinci seviye problem için gerek şartlardır. Eğer, ikinci seviye problem, herhangi bir sabit $\mathbf{x_1}$ için, $\mathbf{x_2}$'ye göre konveks optimizasyon problemi ise bu şartlar aynı zamanda yeter şartlardır (Dempe, 2003). Böylece, ikinci seviye problemi için herhangi bir yerel minimum, aynı zamanda global minimum olacaktır. Ancak, lineer olmayan tamamlayıcı

$$\mu_i g_i(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = 0, \quad i=1,\ldots,s$$

kısıtlarını içermesi dolayısıyla, eşdeğer tek seviyeli problemin çözümü zordur.

Dal-Sınır algoritmasında, öncelikle tamamlayıcı kısıtlar problemden çıkartılır ve rahatlatılmış program elde edilir. Rahatlatılmış problemin en az bir tamamlayıcı kısıtı sağlamadığı varsayılırsa

$$\mu_i = 0 \text{ ve } g_i(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = 0$$

kısıtları ayrı ayrı eklenerek iki alt probleme dallanılır. Burada i,

$$\left|\mu_i g_i(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2})\right|$$

en büyük olacak şekilde seçilir. Tüm tamamlayıcı kısıtlar sağlanana kadar ya da uygun olmayan bir çözüm elde edilene kadar dallanma işlemine devam edilir. Tüm tamamlayıcı kısıtları sağlayan uygun çözüm, aday çözüm olarak etiketlenir (Colson ve diğerleri, 2005a; Bard ve Moore, 1990).

2.2 Kesikli Stokastik Taşıma Problemi

Belirli bir mal için müşteri talepleri kesin olarak bilinmiyorsa, tedarik noktalarından talep noktalarına taşınan optimal mal miktarını belirleme problemine stokastik taşıma problemi (STP) denir (Williams; 1963; Szwarc, 1964; Holmberg, 1984; Holmberg ve Tuy, 1999; Daneva ve diğerleri, 2010). Müşteri talepleri, eğer bilinen kesikli dağılımlara sahip ise STP, kesikli STP adını alır. Kesikli STP modeli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\left(h_j E(y_j - d_j)^+ + s_j E(d_j - y_j)^+\right)\\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j, \quad j = 1,2,\ldots,n\\
&x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned} \tag{3}$$

Tablo 1: Adlandırma

Parametreler
m fabrika sayısı
n müşteri sayısı
b_i i fabrikasının kapasitesi ($i = 1,\ldots,m$)
c_{ij} i fabrikasından j müşterisine birim taşıma maliyeti $(j = 1,\ldots,n)$
s_j j müşterisinin karşılanmayan talebinin her bir birimine karşılık ceza maliyeti
h_j j müşterisinin talebinden fazla gönderilen her bir birimine karşılık ceza maliyeti
d_j j müşterisinin stokastik talebi
k_j j müşterisinin kesikli talep sayısı
d_{jk} j müşterisinin kesikli talebi $(k = 1,\ldots,k_j)$
p_{jk} j müşterisinin talebinin d_{jk} olma olasılığı
Karar Değişkenleri
x_{ij} i fabrikasından j müşterisine gönderilen mal miktarı
y_j j müşterisine gönderilen toplam mal miktarı
η_{jk}^- j müşterisinin kesikli d_{jk} talebinin üzerinde gönderilen miktar
η_{jk}^+ j müşterisinin kesikli d_{jk} talebinin altında gönderilen miktar
$u_i, v_{jk}, \omega_{ij}, \mu_{jk}^-, \mu_{jk}^+$ Lagrange çarpanları
Fonksiyonlar
$E(t)$ t rassal değişkeninin beklenen değeri
$P(.)$ olasılık fonksiyonu
L Lagrange fonksiyonu

3. Problem Tanımı

İki seviyeli kesikli stokastik taşıma problemini tanımlamadan önce, yapılan kabuller bir sonraki bölümde verilmiştir. Bu kabullerden yola çıkılarak modellenen problem ise bir sonraki bölümde verilmiştir.

3.1. Kabuller

(i) Fabrikaların kümesi, ayrık L_1 ve L_2 kümelerinin birleşimidir. Burada, L_1 lider tarafından yönetilen fabrikaların kümesi iken, L_2 takipçi tarafından yönetilen fabrikaların kümesidir (Sonia ve diğerleri, 2008).

(ii) Müşteri talepleri belli olmadan hem lider hem de takipçi karar vermelidir. Önce lider, ardından takipçi müşterilere yollayacağı miktarları belirler. Varış yerlerinde elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetleri söz konusudur. Elde bulundurma maliyeti, müşteriye gönderilen mal miktarı, gerçek müşteri talebinden fazla olduğunda üstlenilen ceza olarak görülebilir. Benzer şekilde, elde bulundurmama maliyeti, müşteriye gönderilen mal miktarı, gerçek müşteri talebinden az olduğunda üstlenilen ceza olarak görülebilir. Elde bulundurmama maliyeti yapılan ilave yüklemelerin maliyeti olarak düşünülebilir.

(iii) Müşterilerin kümesi, ayrık M_1 ve M_2 kümelerinin birleşimidir. Burada, M_1 liderin sorumlu olduğu, yani toplam elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetlerini üstlendiği varış yerlerinin kümesidir. Benzer şekilde, M_2 takipçinin sorumlu olduğu, yani bu varış yerlerindeki toplam elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetlerini üstlendiği varış yerlerinin kümesidir.

(iv) Lider, $i \in L_1$ olacak şekildeki x_{ij} değişkenlerini, takipçi ise $i \in L_2$ olacak şekildeki x_{ij} değişkenlerini kontrol eder.

(v) Müşteri talepleri bilinen kesikli dağılımlara sahip rassal değişkenlerdir.

$k = 1, \ldots, k_j$, $p_{jk} \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{k_j} p_{jk} = 1$ olmak üzere, j müşterisinin talebinin d_{jk} olma olasılığı p_{jk} 'dır. Ayrıca, j müşterisinin talebinin beklenen değeri:

$$E[d_j] = \sum_{k=1}^{k_j} p_{jk} d_{jk} \tag{4}$$

ile hesaplanır.

(vi) Birinci seviyenin amacı, liderin toplam taşıma maliyetleri ile liderin toplam ceza maliyetinin beklenen değerinin toplamının minimize edilmesidir. İkinci seviyenin amacı ise, benzer şekilde, takipçinin toplam taşıma maliyetleri ile takipçinin toplam ceza maliyetinin beklenen değerinin toplamının minimize edilmesidir.

3.2. Problemin Formülasyonu

(i)-(vi) kabulleri altında iki seviyeli kesikli stokastik taşıma problemi modeli aşağıdaki gibi verilebilir:

$$(P1)\min_{\mathbf{x_1}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in L_1} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in M_1}\left(h_j E(y_j - d_j)^+ + s_j E(d_j - y_j)^+\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i, \qquad i \in L_1$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i \in L_1, j = 1,\dots,n$$

$$(P2)\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{x_2}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in L_2} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in M_2}\left(h_j E(y_j - d_j)^+ + s_j E(d_j - y_j)^+\right) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i, \quad i \in L_2 \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j, \quad j = 1,\dots,n \\ x_{ij} \ge 0 \qquad i \in L_2, j = 1,\dots,n \end{cases} \tag{5}$$

(5) ile verilen (P1) ve (P2) problemlerinin amaç fonksiyonlarını daha açık bir şekilde yazabilmek üzere,

$$\left.\begin{array}{l} y_j - \eta_{jk}^{-} + \eta_{jk}^{+} = d_{jk} \\ \eta_{jk}^{-}\eta_{jk}^{+} = 0 \\ \eta_{jk}^{-}, \eta_{jk}^{+} \ge 0 \end{array}\right\} \qquad j = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,k_j \tag{6}$$

kısıtları ikinci seviye probleme eklenmiştir. Bu durumda, (5) ile verilen iki seviyeli problemin eşdeğeri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$(P1)\min \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in L_1} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in M_1}\left(h_j \sum_{k=1}^{k_j}\left(P(d_j \ge d_{jk})\eta_{jk}^{-}\right) + s_j \sum_{k=1}^{k_j}\left(P(d_j \le d_{jk})\eta_{jk}^{+}\right)\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i, \qquad i \in L_1$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i \in L_1, j = 1,\dots,n$$

$$\eta_{jk}^{-}\eta_{jk}^{+} = 0,$$

$$\eta_{jk}^{-}, \eta_{jk}^{+} \ge 0, \qquad j \in M_1, k = 1,\dots,k_j$$

(P2)

$$
(\mathrm{P2})\begin{cases}
\min \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in L_2} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in M_2}\left(h_j \sum_{k=1}^{k_j}\left(P(d_j \ge d_{jk})\eta_{jk}^{-}\right) + s_j \sum_{k=1}^{k_j}\left(P(d_j \le d_{jk})\eta_{jk}^{+}\right)\right) \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i, & i\in L_2 \\
x_{ij} \ge 0 & j=1,\dots,n,\ i\in L_2 \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \eta_{jk}^{-} + \eta_{jk}^{+} = d_{jk}, & j=1,\dots,n, k=1,\dots,k_j \\
\eta_{jk}^{-}\eta_{jk}^{+} = 0, \\
\eta_{jk}^{-}, \eta_{jk}^{+} \ge 0, & j\in M_2,\ k=1,\dots,k_j
\end{cases} \quad (7)
$$

Teorem: η_{jk}^{-} ve η_{jk}^{+} değişkenleri aynı anda tabanda olamaz.

İspat: Aksini varsayalım, ikisi birden tabanda olsun, yani ikisi birden sıfırdan farklı olsun. Ancak $q^{-}, q^{+} \ge 0$, $q\eta = \max\{q^{-}(\eta_{jk}^{-} - \eta_{jk}^{+}),\ q^{+}(\eta_{jk}^{+} - \eta_{jk}^{-})\}$ olmak üzere,

$$q^{-}\eta_{jk}^{-} + q^{+}\eta_{jk}^{+} \ge q\eta$$

olması fonksiyonun minimum olmasıyla çelişir. Değişkenlerden birinin sıfır, diğerinin $\eta = \left|\eta_{jk}^{-} - \eta_{jk}^{+}\right|$ olması daha iyi bir fonksiyon değeri verir. Dolayısıyla kabul yanlıştır.

Sonuç: $\eta_{jk}^{-}\eta_{jk}^{+} = 0$ kısıtı gereksiz olur, atılabilir.

Buradan, $u_i, v_{jk}, \omega_{ij}, \mu_{jk}^{-}$ ve μ_{jk}^{+} Lagrange çarpanları olmak üzere, iki seviyeli programlama problemi için yarı pozitif definit Hessian matrise sahip kuadratik, dolayısıyla konveks Lagrange fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir:

$$
\begin{aligned}
L(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in L_2} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j\in M_2}\left(h_j \sum_{k=1}^{k_j}\left(P(d_j \ge d_{jk})\eta_{jk}^{-}\right) + s_j \sum_{k=1}^{k_j}\left(P(d_j \le d_{jk})\eta_{jk}^{+}\right)\right) + \sum_{i\in L_2} u_i\Big(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - b_i\Big) \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{k_j}\left(v_{jk}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \eta_{jk}^{-} + \eta_{jk}^{+} - d_{jk}\right)\right) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\in L_2}\omega_{ij}x_{ij} - \sum_{j\in M_2}\sum_{k=1}^{k_j}\left(\mu_{jk}^{-}\eta_{jk}^{-} + \mu_{jk}^{+}\eta_{jk}^{+}\right)
\end{aligned} \quad (8)
$$

İkinci seviye problemin KKT optimallik şartları aşağıdaki gibi verilebilir:

$$u_i, \omega_{ij} \ge 0, \qquad i\in L_2, j=1,\dots,n$$

$$\mu_{jk}^{-}, \mu_{jk}^{+} \ge 0, \qquad j\in M_2,\ k=1,\dots,k_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = c_{ij} + u_i + \sum_{k=1}^{k_j} v_{jk} - \omega_{ij} = 0, \qquad i\in L_2, j=1,\dots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_{jk}^{-}} = h_j P(d_j \geq d_{jk}) - v_{jk} - \mu_{jk}^{-} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_{jk}^{+}} = s_j P(d_j \leq d_{jk}) + v_{jk} - \mu_{jk}^{+} = 0, \quad j \in M_2,\ k = 1,\ldots,k_j$$

$$u_i(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - b_i) = 0, \qquad i \in L_2$$

$$\begin{array}{ll}
\omega_{ij} x_{ij} = 0, & i \in L_2, j = 1,\ldots,n \\
\mu_{jk}^{-} \eta_{jk}^{-} = 0, & j \in M_2,\ k = 1,\ldots,k_j \\
\mu_{jk}^{+} \eta_{jk}^{+} = 0, & j \in M_2,\ k = 1,\ldots,k_j \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq b_i, & i \in L_2 \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \eta_{jk}^{-} + \eta_{jk}^{+} = d_{jk}, & j = 1,\ldots,n, k = 1,\ldots,k_j \\
x_{ij} \geq 0 & j = 1,\ldots,n,\ i \in L_2 \\
\eta_{jk}^{-}, \eta_{jk}^{+} \geq 0 & j \in M_2,\ k = 1,\ldots,k_j
\end{array}$$

Bu kısıtlardaki $\omega_{ij}, \mu_{jk}^{-}$ ve μ_{jk}^{+} değişkenleri elimine edilebilir, bu durumda eşdeğer tek seviyeli problem aşağıdaki şekilde hesaplanır (9):

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in L_1} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in M_1} \left(h_j \sum_{k=1}^{k_j} \left(P(d_j \geq d_{jk}) \eta_{jk}^{-} \right) + s_j \sum_{k=1}^{k_j} \left(P(d_j \leq d_{jk}) \eta_{jk}^{+} \right) \right)$$

$$\begin{array}{lll}
u_i \geq 0, & i \in L_2 & \\
c_{ij} + u_i + \sum_{k=1}^{k_j} v_{jk} \geq 0, & i \in L_2, j = 1,\ldots,n & \\
h_j P(d_j \geq d_{jk}) - v_{jk} \geq 0, & j \in M_2, k = 1,\ldots,k_j & \\
s_j P(d_j \leq d_{jk}) + v_{jk} \geq 0, & j \in M_2, k = 1,\ldots,k_j & \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq b_i, & i = 1,\ldots,m & \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \eta_{jk}^{-} + \eta_{jk}^{+} = d_{jk}, & j = 1,\ldots,n, k = 1,\ldots,k_j & \\
x_{ij}, \eta_{jk}^{-}, \eta_{jk}^{+} \geq 0 & i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,k_j &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
u_i(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - b_i) = 0, & i \in L_2 \\
x_{ij}(c_{ij} + u_i + \sum_{k=1}^{k_j} v_{jk}) = 0, & i \in L_2, j = 1,\ldots,n \\
\eta_{jk}^{-}(h_j P(d_j \geq d_{jk}) - v_{jk}) = 0, & j \in M_2, k = 1,\ldots,k_j \\
\eta_{jk}^{+}(s_j P(d_j \leq d_{jk}) + v_{jk}) = 0, & j \in M_2, k = 1,\ldots,k_j
\end{array}\right\} \text{Tamamlayıcıkısıtlar} \qquad (9)$$

4. Açıklayıcı Örnek

Bu örnek Bricker (2001)'den uyarlanmıştır. Her biri 10 birim mal tedarik edebilecek iki firmadan birincisi lider, ikincisi takipçidir. Her biri rassal talepli üç varış yeri için birim yükleme maliyetleri, birim elde bulundurma ve elde bulundurmama maliyetleri (Tablo 2)'de, kesikli taleplerin olasılık ağırlık fonksiyonları ise (Tablo 3)'de verilmiştir. Lider, ikinci ve üçüncü varış yerinden ve takipçi birinci varış yerinden sorumludur.

Tablo 2. Birim maliyetler

	Varış Yeri 1	Varış Yeri 2	Varış Yeri 3
Firma 1	3	5	6
Firma 2	2	4	7
h_j	3	3	6
s_j	12	14	16

Tablo 3. Olası talepler ve olasılıkları

	Varış Yeri 1			Varış Yeri 2		Varış Yeri 3			
Talep (d_{jk})	5	7	9	4	8	4	6	8	10
Olasılık (p_{jk})	0.25	0.50	0.25	0.50	0.50	0.1	0.4	0.4	0.1

İki seviyeli problem ve eşdeğeri olan tek seviyeli problem, sırasıyla (10) ve (11) ile verilmiştir:

$$\begin{aligned}
&\min\ 3x_{11}+5x_{12}+6x_{13}+3(\eta_{21}^{-}+0.5\eta_{22}^{-})+14(0.5\eta_{21}^{+}+\eta_{22}^{+})+6(\eta_{31}^{-}+0.9\eta_{32}^{-}+0.5\eta_{33}^{-}+0.1\eta_{34}^{-})\\
&+16(0.1\eta_{31}^{+}+0.5\eta_{32}^{+}+0.9\eta_{33}^{+}+\eta_{34}^{+})\\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 10\\
&x_{11},x_{12},x_{13},\eta_{21}^{-},\eta_{22}^{-},\eta_{21}^{+},\eta_{22}^{+},\eta_{31}^{-},\eta_{32}^{-},\eta_{33}^{-},\eta_{34}^{-},\eta_{31}^{+},\eta_{32}^{+},\eta_{33}^{+},\eta_{34}^{+}\ge 0\\
&\begin{cases}
\min 2x_{21}+4x_{22}+7x_{23}+3(\eta_{11}^{-}+0.75\eta_{12}^{-}+0.25\eta_{13}^{-})+12(0.25\eta_{11}^{+}+0.75\eta_{12}^{+}+\eta_{13}^{+})\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 10\\
x_{11}+x_{21}-\eta_{11}^{-}+\eta_{11}^{+}=5,\\
x_{11}+x_{21}-\eta_{12}^{-}+\eta_{12}^{+}=7,\\
x_{11}+x_{21}-\eta_{13}^{-}+\eta_{13}^{+}=9,\\
x_{12}+x_{22}-\eta_{21}^{-}+\eta_{21}^{+}=4,\\
x_{12}+x_{22}-\eta_{22}^{-}+\eta_{22}^{+}=8,\\
x_{13}+x_{23}-\eta_{31}^{-}+\eta_{31}^{+}=4,\\
x_{13}+x_{23}-\eta_{32}^{-}+\eta_{32}^{+}=6,\\
x_{13}+x_{23}-\eta_{33}^{-}+\eta_{33}^{+}=8,\\
x_{13}+x_{23}-\eta_{34}^{-}+\eta_{34}^{+}=10\\
x_{21},x_{22},x_{23},\eta_{11}^{-},\eta_{12}^{-},\eta_{13}^{-},\eta_{11}^{+},\eta_{12}^{+},\eta_{13}^{+}\ge 0
\end{cases}
\end{aligned} \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
&\min\ 3x_{11}+5x_{12}+6x_{13}+3\eta_{21}^{-}+1.5\eta_{22}^{-}+7\eta_{21}^{+}+14\eta_{22}^{+}+6\eta_{31}^{-}+5.4\eta_{32}^{-}+3\eta_{33}^{-}+0.6\eta_{34}^{-}\\
&+1.6\eta_{31}^{+}+8\eta_{32}^{+}+14.4\eta_{33}^{+}+16\eta_{34}^{+}\\
&x_{11}+x_{12}+x_{13}\le 10\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}\le 10\\
&x_{11}+x_{21}-\eta_{11}^{-}+\eta_{11}^{+}=5\\
&x_{11}+x_{21}-\eta_{12}^{-}+\eta_{12}^{+}=7\\
&x_{11}+x_{21}-\eta_{13}^{-}+\eta_{13}^{+}=9\\
&x_{12}+x_{22}-\eta_{21}^{-}+\eta_{21}^{+}=4\\
&x_{12}+x_{22}-\eta_{22}^{-}+\eta_{22}^{+}=8\\
&x_{13}+x_{23}-\eta_{31}^{-}+\eta_{31}^{+}=4\\
&x_{13}+x_{23}-\eta_{32}^{-}+\eta_{32}^{+}=6\\
&x_{13}+x_{23}-\eta_{33}^{-}+\eta_{33}^{+}=8\\
&x_{13}+x_{23}-\eta_{34}^{-}+\eta_{34}^{+}=10\\
&x_{ij},\eta_{jk}^{-},\eta_{jk}^{+},u_1\ge 0\\
&2+u_1+v_{11}+v_{12}+v_{13}\ge 0\\
&4+u_1+v_{21}+v_{22}\ge 0\\
&7+u_1+v_{31}+v_{32}+v_{33}+v_{34}\ge 0\\
&3-v_{11}\ge 0\\
&2.25-v_{12}\ge 0\\
&0.75-v_{13}\ge 0\\
&3+v_{11}\ge 0\\
&9+v_{12}\ge 0\\
&12+v_{13}\ge 0\\
&u_1(x_{21}+x_{22}+x_{23}-10)=0\\
&x_{21}(2+u_1+v_{11}+v_{12}+v_{13})=0\\
&x_{22}(4+u_1+v_{21}+v_{22})=0\\
&x_{23}(7+u_1+v_{31}+v_{32}+v_{33}+v_{34})=0\\
&\eta_{11}^{-}(3-v_{11})=0\\
&\eta_{12}^{-}(2.25-v_{12})=0\\
&\eta_{13}^{-}(0.75-v_{13})=0\\
&\eta_{11}^{+}(3+v_{11})=0\\
&\eta_{12}^{+}(9+v_{12})=0\\
&\eta_{13}^{+}(12+v_{13})=0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Problemin amaç fonksiyonunun optimal değeri $z^{*}=108.8$ olmak üzere, ortaksız çözümü aşağıda verilmiştir:

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{*} & x_{12}^{*} & x_{13}^{*} \\ x_{21}^{*} & x_{22}^{*} & x_{23}^{*} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_{11}^{-*} & \eta_{12}^{-*} & \eta_{13}^{-*} & \eta_{21}^{-*} & \eta_{22}^{-*} & \eta_{31}^{-*} & \eta_{32}^{-*} & \eta_{33}^{-*} & \eta_{34}^{-*} \\ \eta_{11}^{+*} & \eta_{12}^{+*} & \eta_{13}^{+*} & \eta_{21}^{+*} & \eta_{22}^{+*} & \eta_{31}^{+*} & \eta_{32}^{+*} & \eta_{33}^{+*} & \eta_{34}^{+*} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{11}^{*} & v_{12}^{*} & v_{13}^{*} & v_{21}^{*} & v_{22}^{*} \\ v_{31}^{*} & v_{32}^{*} & v_{33}^{*} & v_{34}^{*} & u_{1}^{*} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -9 & -12 & -26 & 0 \\ -29 & 0 & 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$$

5. Sonuçlar

Bu çalışmada, iki seviyeli kesikli stokastik taşıma problemi önerilmiştir. Bu problem, stokastik taşıma probleminin iki seviyeli versiyonudur. İkinci seviyenin amaç fonksiyonunun lineer olması ve uygun çözümler bölgesinin lineer kısıtlarla belirlenmesi dolayısıyla ikinci seviye problem, konveks programlama problemidir. İkinci seviye probleminin konveksliği, iki seviyeli problemi KKT şartlarından faydalanarak yeniden formüle etmemize imkân sağlar. Eşdeğer problemin tamamlayıcı kısıtlarıyla baş edebilmek için Dal-Sınır algoritması kullanılmıştır. Alt problemler, lineer programlama problemlerini çözen herhangi bir paket program ile çözülebilir. Bu algoritma problemimiz için oldukça etkin bir çözüm yolu olmuştur.

Kaynakça

Bard, J. F., ve Moore, J.T. (1990). A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing, 11(2),* 281–292.

Bricker D. L. (2001). Cf. *Stochastic Programming*, by Haneveld, W. K. K. and van der Vlerk, M. H., Dept. of Econometrics & OR, University of Groningen, Netherlands. http://css.engineering.uiowa.edu/~dbricker/Stacks_pdf8/SLPw_Simple_R.PDF adresinden 13 Kasım 2011 tarihinde alınmıştır.

Colson, B., Marcotte, P., ve Savard, G. (2005a). Bilevel programming: A survey. *A quarterly Journal of Operation Research, 3(2),* 87-107.

Colson, B., Marcotte, P., ve Savard, G. (2005b). A Trust-Region Method for Nonlinear Bilevel Programming: Algorithm and Computational Experience. *Computational Optimization and Applications, 30(3),* 211-227.

Daneva, M., Larsson, T., Patriksson, M., ve diğerleri (2010). A comparison of feasible direction methods for the stochastic transportation problem. *Computational Optimization and Applications, 46(3),* 451-466.

Dempe, S. (2002). Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dempe, S. (2003). Bilevel programming A survey. *Technical Report TU 2003-11, Bergakademie Freiberg*.

Holmberg, K. (1984). Separable programming applied to the stochastic transportation problem. *Research Report LiTH-MAT-R-1984-15, Department of Mathematics, Linkoping Institute of Technology, Sweden*.

Holmberg, K., ve Tuy, H. (1999). A production-transportation problem with stochastic demand and concave production costs. *Mathematical Programming, 85,* 157–179.

Kalashnikov, V.V., Pérez-Valdés, G.A., Tomasgard, A., ve diğerleri (2010). Natural Gas Cash-Out Problem: Bilevel Stochastic Optimization Approach, *European Journal of Operational Research, 206(1),* 18-33.

Katagiri, H., Ichiro, N., Sakawa, M., ve diğerleri (2007). Stackelberg solutions to stochastic two-level linear programming problems. *Proceedings of the 2007 IEEE Symposium on Computational Intelligence in Multicriteria Decision Making (MCMD'07), Hawaii,* 240-244.

Kato, K., Katagiri, H., Sakawa, M., ve diğerleri (2006). Interactive fuzzy programming based on a probability maximization model for two-level stochastic linear programming problems. *Electronics and Communications in Japan (Part III: Fundamental Electronic Science, 89(2),* 33-42.

Patriksson, M. ve Wynter, L. (1999). Stochastic mathematical programs with equilibrium constraints. *Operations Research Letters, 25,* 159-167.

Roghanian, E., Sadjadi, S.J., ve Aryanezhad, M.B. (2007). A probabilistic bi-level linear multi-objective programming problem to supply chain planning. *Applied Mathematics and Computation, 188(1),* 786-800.

Ryu, J.H., Dua, V., ve Pistikopoulos E.N. (2004). A bilevel programming framework for enterprise-wide process networks under uncertainty. *Comput. Chem. Eng, 28,* 1121-1129.

Sonia, Khandelwal A. ve Puri, M.C. (2008). Bilevel time minimizing transportation problem. *Discrete Optim., 5(4),* 714-723.

Szwarc, W. (1964). The Transportation Problem with Stochastic Demand. *Management Science, 11,* 35-50.

Werner, A. S. (2005). Bilevel stochastic programming problems: analysis and application to telecommunications. *PhD Thesis, Norwegian University of Science and Technology, Faculty of Social Sciences and Technology Management, Trondheim, Norway.*

Williams, A. C. (1963). A Stochastic transportation problem, *Operations Research, 11(5),* 759-770.