ESKİŞEHİR TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ
B- TEORİK BİLİMLER

Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology B- Theoretical Sciences

2018, 6(2), pp. 124 - 128, DOI: 10.20290/aubtdb.394691

SIP VE SSP MODÜL AİLELERİ ÜZERİNE

Fatih KARABACAK *

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Eğitim Fakültesi, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye

ÖZET

Eğer bir *M* *R*-modülünün herhangi iki dik toplananının kesişimi *M* de bir dik toplanan ise bu *M* *R*-modülüne *SIP* (Summand Intersection Property) 'ye sahiptir, denir. Benzer bir şekilde, eğer bir *M* *R*-modülünün herhangi iki dik toplananının toplamı *M* de bir dik toplanan ise bu *M* *R*-modülüne *SSP* (Summand Sum Property) 'ye sahiptir, denir. Bu çalışmada, modüllerin bazı koşullar altında her iki özelliği de sağlandığını göstereceğiz.

Anahtar Kelimeler: Dik toplanan, SIP-modüller, SSP-modüller

ON SIP AND SSP MODULES

ABSTRACT

M has the *summand intersection property* (*SIP*), if the intersection of every two direct summands in *M* is a direct summand in *M*, and a module M has the *summand sum property* (*SSP*), if the sum of every two direct summand in *M* is a direct summand in *M*. In this note, we show that modules have these properties under some condition.

Keywords: Direct summand, SIP-modules, SSP-modules

1. GİRİŞ

Bu çalışma boyunca, tüm halkalar değişmeli, birimlidir ve modüller birimsel sağ modüldür. R bir halka ve M bir modül olmak üzere N altmodül M yi, $N \leq M$ ifadesi ile gösterilecektir. Aşağıda, çalışmada geçen bazı kavramlar verilecektir. Bu kavramlara ilişkin detaylı bilgiler ve tanımlanmamış ifadeler için okuyucuya [1] "Rings and Categories of Modules" kitabı önerilir.

Tanım 1.1. Bir M R-modülünün L ve N alt modülleri için $N + L = M$ ve $L \cap N = 0$ koşulları sağlanıyorsa N ye M nin bir *dik toplananı* (direct summand) denir ve $N \leq_d M$ ile gösterilir. Bu durumda L de bir dik toplanandır.

Tanım 1.2. K, M R-modülünün bir alt modülü olsun. M R-modülünün sıfırdan farklı her L alt modülleri için $K \cap L \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa K ya *büyük* (essential) alt modülü denir ve $K \leq_e M$ ile gösterilir.

Tanım 1.3. K, M R-modülünün bir alt modülü olsun. $N + L = M$ olması $L = M$ olmasını gerektiriyorsa N ye *küçük* (small) alt modülü denir ve $N \ll M$ ile gösterilir.

Fuchs, [2] "Infinite Abelian Groups" kitabında "Abelian gruplarda, iki dik toplananın kesişimin tekrar bir dik toplanan olmasının karakterizasyonu" problem 9 da sormuştur. Kaplansky [3] ise bir PID halkası üzerindeki serbest modüllerin bu özelliği sağladığını göstermiştir. Wilson [4] çalışmasında Kaplansky ve Fuchs'un çalışmalarından yol çıkarak, SIP ye sahip modül ailelerini 1986 yılında tanımlamıştır.

*Sorumlu Yazar: fatihkarabacak@anadolu.edu.tr
Geliş: 14.02.2018 Kabul:09.05.2018

Tanım 1.4. Eğer bir M R-modülünün herhangi iki dik toplananının kesişimi M de bir dik toplanan ise bu M R-modülüne *SIP* (Summand Intersection Property) 'ye sahiptir. R bir halka olmak üzere R_R modülü SIP ye sahip ise R halkası SIP ye sahiptir denir. Yani; R nin her e, f idempotent elemanları için $eR \cap fR = gR$ olacak şekilde R nin bir g idempotent elemanı vardır.

SIP modül tanımından yola çıkarak Garcia 1989 da [5] SIP modülün duali olan SSP modülleri tanımlamıştır.

Tanım 1.5. Eğer bir M R-modülünün herhangi iki dik toplananının toplamı M de bir dik toplanan sahip ise bu M R-modülüne *SSP* (Summand Sum Property) 'ye sahiptir. R bir halka olmak üzere R_R modülü SSP ye sahip ise R halkası SSP ye sahiptir denir. Yani; R nin her e, f idempotent elemanları için $eR + fR = gR$ olacak şekilde R nin bir g idempotent elemanı vardır.

2. SIP VE SSP MODÜLLER

Açıkça yarı basit ve ayrıştırılamaz modüller SIP ye ve aynı zamanda SSP ye sahip modüllerdir. Bu kısımda ilk olarak SIP ve SSP ye sahip modül aileleri ile ilgili Wilson ve Garcia tarafından verilen denk koşullar ispatsız olarak verilecektir. Bu teoremler yardımıyla SIP ve SSP özelliklerinin birbirlerinin gerektirmedikleri gösterilecektir. Bu kısımda ayrıca, SIP ve SSP özelliklerinin hangi koşullar altında birbirlerinin gerektirdiği verilecek ve son olarak her iki özelliğin birlikte sağlandığını gösteren bazı teorem ve sonuçları vereceğiz.

Teorem 2.1. M bir R-modül olsun.
(i) M, SIP ye sahiptir ancak ve ancak her $S, T \leq_d M$ ve $\pi: M \to S$ kanonik projeksiyonu için $Ker\, \pi|_T \leq_d M$dir.
(i) M, SIP ye sahiptir ancak ve ancak her $M = S \oplus T$ ve $\alpha: S \to T$ kanonik projeksiyonu için $Ker\alpha \leq_d S$ dir.

Teorem 2.2. M bir R-modül olsun.
(i) M, SSP ye sahiptir ancak ve ancak her $S, T \leq_d M$ ve $\pi: M \to S$ kanonik projeksiyonu için $Im\, \pi|_T \leq_d M$dir.
(i) M, SIP ye sahiptir ancak ve ancak her $M = S \oplus T$ ve $\alpha: S \to T$ kanonik projeksiyonu için $Im\alpha \leq_d S$ dir.

Örnek 2.3. $M_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}}$ olsun. $\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ dönüşümü $\alpha(x) = \bar{x}$ ile tanımlansın. $Ker\alpha = 2\mathbb{Z}$ olup $\mathbb{Z}$ nin bir dik toplananı değildir. Teorem 2.1.ii. den $M_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}}$ SIP ye sahip modül değildir ama $M_{\mathbb{Z}}$ SSP ye sahiptir.

Örnek 2.4. $M_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ olsun. $\alpha: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ dönüşümü $\alpha(x) = 2x$ ile tanımlansın. $\mathrm{Im}\, \alpha = 2\mathbb{Z}$ olup $\mathbb{Z}$ nin bir dik toplananı değildir. Teorem 2.2.ii. den $M_{\mathbb{Z}}$ SSP ye sahip modül değildir. Ama $\mathbb{Z}$, temel ideal bölgesi ve M serbest $\mathbb{Z}$- modül olduğundan $M_{\mathbb{Z}}$ SIP ye sahiptir.

Açıkça $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ile $(\mathbb{Z}_{\mathbf{2}})_{\mathbb{Z}}$ modülleri SIP sahip modüllerdir. Örnek 2.3. bize, SIP ye sahip iki modülün dik toplamlarının SIP ye sahip olması gerekmediğini göstermektedir. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülü ayrıştırılamaz modül olduğundan SSP ye sahiptir. Örnek 2.4. bize, SSP ye sahip iki modülün dik toplamlarının SSP ye sahip olması gerekmediğini göstermektedir. SIP ye sahip modüllerin dik toplananlarının da SIP oldukları [4] ten bilinmektedir. Benzer ilişki SSP ye sahip modüller için de [5] te verilmiştir.

Aşağıdaki örnek bize hem SIP hem de SSP ye sahip olmayan modüllerin varlığını göstermektedir.

Örnek 2.5. $M_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4)_{\mathbb{Z}}$ olsun. $\alpha: \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ dönüşümü $\alpha(x) = \overline{2x}$ ile tanımlansın. Bu durumda Ker$\alpha = \mathrm{Im}\,\alpha = 2\mathbb{Z}_4$ olup $\mathbb{Z}_4$ nin bir dik toplananı değildir. Teorem 2.2.i. ve Teorem 2.2.ii. den . $M_{\mathbb{Z}}$ ne SIP ne de SSP ye sahip bir modüldür.

Örnek 2.3. ve Örnek 2.4. bizlere bu iki özelliğin birbirlerini gerektirmediğini göstermiştir. Alkan ve Harmancı [6] da (C_3) ve (D_3) koşulları altında gerektirmelerin sağlandığını göstermiştir. Bu gerektirmeler Teorem 2.5. te ispatsız olarak verilecektir. Önce bu koşulların neler olduğunu tanımlayalım. Konunun sürekliliği açısından tüm (C_i) ve (D_i) (i=1, 2, 3) koşulları aşağıda verilmiştir. Aynı zamanda (C_1) özelliği *extending modül* veya *CS* (Complement is a Summand) modül olarak ta bilinmektedir. Burada (C_2) modüller (C_3) modülleri gerektirmededir. (C_1) ve (C_2) yi sağlayan bir modüle *sürekli* (continuous) modül, (C_1) ve (C_3) ü sağlayan bir modüle *yarı-sürekli* (quasi-continuous) modül denir. Bu modül aileleri hakkında daha geniş bilgi için okuyucuya [7] tavsiye edilir. Benzer şekilde (D_1) özelliği *yükselen* (lifting) modül olarak ta adlandırılmaktadır. Burada (D_2) modüller (D_3) modülleri gerektirmededir. (D_1) ve (D_2) yi sağlayan bir modüle *ayrık* (discrete) modül, (D_1) ve (D_3) ü sağlayan bir modüle *yarı-ayrık* (quasi-discrete) modül denir. Yükselen modüller hakkında daha geniş bilgi için okuyucuya [8] tavsiye edilir.

(C_1) M nin her alt modülü M nin bir dik toplanında büyüktür.
(C_2) M nin bir A alt modülü M nin bir dik toplananına izomorf ise A da bir dik toplanandır.
(C_3) M nin M_1 ve M_2 dik toplananları için $M_1 \cap M_2 = 0$ ise $M_1 \oplus M_2$ de M nin bir dik toplananıdır.

(D_1) M nin her A alt modülü için $M_1 \leq A$ ve $A \cap M_2 \ll M_2$olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ vardır.
(D_2) M nin bir A alt modülü için M/A, M nin bir dik toplananına izomorf ise A da bir dik toplanandır.
(D_3) M nin M_1 ve M_2 dik toplananları için $M = M_1 + M_2$ ise $M_1 \cap M_2$ de M nin bir dik toplananıdır.

Teorem 2.6. [6, Lemma 19] M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.
(i) M, (C_3) modül olsun. Eğer M SIP ye sahip ise M SSP ye sahiptir
(ii) M, (D_3) modül olsun. Eğer M SSP ye sahip ise M SIP ye sahiptir.

Azarpanah [9] çalışmasında $C(X)$ (sürekli fonksiyonlar) halkaları üzerinde SIP ve SSP koşularını araştırmıştır. $C(X)$ halkası SSP ye sahip ise SIP ye sahip olduğunu göstermiş ayrıca X kompakt ise bu iki özelliğin denk olduğunu göstermiştir. Bizde bu çalışmada bazı ön koşullar altında, hem SIP hem de SSP yi sağlayan modül aileleri ile ilgi bir teorem verilecektir.

Tanım 2.7. M bir R-modül olsun. M nin her bir L, *tamamıyla değişmez* (fully invariant) alt modülü için $L=AM$ olacak şekilde R nin bir A ideali varsa M, R-modülüne *tamamıyla değişmez çarpımsal* (fully invariant multiplication) modül denir.

Bir M, R-modülünün sağ sıfırlayıcısını $ann_r(M)$ ile göstereceğiz ve $ann_r(M) = \{a \in R: Ma = 0\}$ olduğunu hatırlayalım.

Teorem 2.8. R bir halka ve $R = ann_r(M_1) + ann_r(M_2)$ eşitliğini sağlasın. Eğer $M_R = (M_1 \oplus M_2)_R$modülü tamamıyla değişmez çarpımsal modül ise M hem SIP hem de SSP ye sahiptir.

Kanıt. $X_i = ann_R(M_i)$ $(i$ = 1, 2) ve $R = X_1 + X_2$ olsun. Ayrıca M R-modülü tamamıyla değişmez çarpımsal modül ve $f: M_1 \longrightarrow M_2$ herhangi bir R-homomorfizma olsun. Buradan,
$$\begin{aligned} f(M_1) &= f(X_1M_1 + X_2M_1) = f(X_1M_1) + f(X_2M_1) \\ &= f(0) + X_2 f(M_1) \subseteq X_2M_2 = 0 \end{aligned}$$
Buda bize gösterir ki $Hom(M_1, M_2) = 0$ dır. $Ker\ (0) = M_1$ ve buda M_1 in bir dik toplananıdır. Teorem 2.1. den M SIP ye sahiptir. $Im(0) = 0$ ve bu ise M_2 nin bir dik toplananıdır. Teorem 2.2 den M, SSP ye sahiptir.

Sonuç 2.9. R bir halka ve $R = ann_R(M_1) + ann_R(M_2)$ eşitliğini sağlasın. Eğer $M_R = (M_1 \oplus M_2)_R$modülü serbest (free) modül ise M hem SIP hem de SSP ye sahiptir.

Kanıt. [10, Sonuç 2.10] da her serbest modülün tamamıyla değişmez çarpımsal modül olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla Teorem 2.8. den istenilen sonuç elde edilir.

3. BAZI GENELLENMİŞ MODÜL AİLELERİ ÜZERİNE

C_1 modül ailesine aynı zamanda extending modül veya CS modül de dendiğini söylemiştik. Bu modül ailesinin çeşitli genellemeleri vardır. Bunlardan bir tanesi olan *Goldie extending* modüller, [11] deki çalışmada tanımlanmıştır. Goldie extending tanımı β bağıntısı üzerinde tanımlı olup, $X\beta Y$ dir ancak ve ancak $X \cap Y \leq_e X$ ve $X \cap Y \leq_e Y$ şeklindedir.

Tanım 3.1. *M* bir Goldie extending modüldür ancak ve ancak *M* nin her *X* alt modülü için $X\beta D$olacak şekilde *M* nin en az bir *D* dik toplananı vardır.

Goldie extending ifadesi kısaca $\mathcal{G}$-extending olarak gösterilir. $\mathcal{G}$-extending modüllerin her dik toplananı $\mathcal{G}$-extending olup olmadığı bilinmemektedir. Eğer her dik toplananı da $\mathcal{G}$-extending ise bu durumda, kısaca G^+-extending olarak gösterilmektedir. [11] de hangi koşul altında, bir modülün" $\mathcal{G}$-extending dir ancak ve ancak G^+-extending dir" ifadesinin doğru olduğu açık bir soru olarak bırakılmıştır.

Önerme 3.2. (11, Önerme 3.19.) M, bir $\mathcal{G}$-extending modül olsun. Eğer M, SIP veya C_2 koşulunu sağlarsa M, G^+-extending dir.

Sonuç 3.3. M, bir $\mathcal{G}$-extending modül ve D_3 koşulunu sağlasın. Eğer M, SSP ye sahip ise M, G^+-extending dir.

Kanıt. Teorem 2.6.ii. ve Önerme 3.2. den kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 3.4. M, bir $\mathcal{G}$-extending modül ve $R = ann_R(M_1) + ann_R(M_2)$ eşitliğini sağlayan bir halka olsun. Eğer $M_R = (M_1 \oplus M_2)_R$modülü tamamıyla değişmez çarpımsal modül ise M, G^+-extending dir.

Kanıt. Teorem 2.8. ve Önerme 3.2. den kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 3.5. M, bir $\mathcal{G}$-extending modül, $R = ann_R(M_1) + ann_R(M_2)$ eşitliğini sağlayan bir halka ve M_1, M_2; *R*-modüllerini olsun. Eğer $M_R = (M_1 \oplus M_2)_R$modülü serbest modül ise M, G^+-extending dir.

Kanıt. Sonuç 2.9. ve Önerme 3.2. den kolaylıkla elde edilir.

Takıl Mutlu, [12] çalışmasında hem ADS modül hem de SIP ye sahip modülleri kısaca *SA-modül* olarak tanımladı. ADS modüllerin tanımı Fuchs [2], tarafından yapılmıştır. [13, Teorem 2.7.] de ADS modüllerin (C_3) koşulunu gerektirdiği gösterilmiştir.

Sonuç 3.6. M, bir $\mathcal{G}$-extending modül olsun. Eğer M, SA-modül ise M, G^+-extending dir.

Kanıt. [12, Tanım 2.5.] ve Önerme 3.2. den kolaylıkla elde edilir.

M bir R-modül olsun. M nin herhangi iki dik toplananının kesişimleri bir dik toplananda büyük ise bu modül ailesine *SIP-extending* modüller denir [14]. Açıkça bu aile hem SIP hem de extending modüllerin bir genellemesidir.

Önerme 3.7. M R-modül ve M nin her dik toplananı M deki büyük alt modüllerinin kapanışında tek olsun. M, bir $\mathcal{G}$-extending modül ve SIP-extending modül ise M, G^{+}-extending modüldür.

Kanıt. M R-modül ve M nin her dik toplananı M deki büyük alt modüllerinin kapanışında tek; M, bir $\mathcal{G}$-extending ve SIP-extending modül olsun. M de bir K dik toplananı alalım. $B \leq K$ olsun. [11, Önerme 1.5.] ten M nin bir L dik toplananı için $A \leq_e B$ ve $A \leq_e L$ olacak şekilde bir $A \leq M$ vardır. Buradan, $A \leq_e K \cap L$ dir. Kabulden $A \leq_e K \cap L \leq_e N$ olacak şekilde en az bir $N \leq_d K$ vardır. Dolayısıyla; K, $\mathcal{G}$-extending modüldür. Yani; M, G^{+}-extending dir.

KAYNAKÇA

[1] Anderson FW, Fuller KR. Rings and Categories of Modules. New York, USA: Springer-Verlag, 1974.

[2] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Academic Press, New York, USA: 1970

[3] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. Michigan, USA: University of Michigan, 1969.

[4] Wilson GV. Modules with the summand intersection property. Comm. Algebra 1986; 14: 21-38.

[5] Garcia JL. Properties of direct summands of modules. Comm. Algebra 1989; 17(1): 73-92.

[6] Alkan M, Harmancı A. On summand sum and summand intersection property of modules. Turk J. Math 2002; 26: 131-147.

[7] Dung NV, Huyn DV, Smith PF, Wisbauer R. Extending Modules. London, UK: Longman, 1990.

[8] Clark J, Lomp C, Vanaja N, Wisbauer R. Lifting Modules. Berlin, Germany: Birkhauser Verlag, 2006.

[9] Azarpanah F. Sum and intersection of summand ideals in C(X). Comm. Algebra 1999; 27: 5548-5560.

[10] Smith PF. Fully invariant multiplication modules. Palest. J. Math 2015; 4(1):462-470.

[11] Akalan E, Birkenmeier GF, Tercan A. Goldie extending modules. Comm. Algebra 2009; 37: 663-683.

[12] Takıl Mutlu F. On ADS-modules with the SIP. Bull. Iranian Soc. 2015; 41:1355-1363.

[13] Quyn TC, Koşan MT. On ADSmodules and rings. Comm. Algebra. 2014; 42: 3541-3551.

[14] Karabacak F, Tercan A. On modules and matrix rings with SIP-extending. TaiwaneseJ. Math. 2007; 11(4): 1037-1044 .