



## KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE mKdV DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Seydi Battal Gazi KARAKOÇ\*

<sup>1</sup> Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Nevşehir, Türkiye

### ÖZET

Bu çalışmada, modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denkleminin sayısal çözümleri septik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Önerilen sayısal algoritmanın doğruluğu, tek soliton dalga, iki ve üç soliton dalganın girişimi gibi üç test probleminin uygulanması ile kontrol edilmiştir. Zamana bağlı Crank Nicolson yaklaşımına dayanan sayısal algoritmamız şartsız olarak kararlıdır. Yeni uygulanan yöntemin performansını kontrol etmek için,  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata normları ile  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  ve  $I_4$  değişmezlerinin değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürde bulunan diğer sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denklemi, Sonlu eleman yöntemi, Kollokasyon, Septik B-spline, Soliton

## NUMERICAL SOLUTIONS OF THE mKdV EQUATION VIA COLLOCATION FINITE ELEMENT METHOD

### ABSTRACT

In this paper, we have obtained numerical solutions of the modified Korteweg-de Vries (mKdV) equation by using septic B-spline collocation finite element method. The suggested numerical algorithm is controlled by applying three test problems including; single soliton wave, interaction of two and three soliton waves. Our numerical algorithm, attributed to a Crank Nicolson approximation in time, is unconditionally stable. To control the performance of the newly applied method, the error norms,  $L_2$ ,  $L_\infty$  and invariants  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  and  $I_4$  have been calculated. The obtained numerical results are compared with some of those available in the literature.

**Keywords:** Modified Korteweg-de Vries equation, finite element method, collocation, septic B-spline, Soliton

## 1. GİRİŞ

Bu makalede,

$$U_t + \varepsilon U^2 U_x + \mu U_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

şeklindeki mKdV denklemi,

$$\begin{aligned} U(a, t) = 0, U(b, t) = 0, \\ U_x(a, t) = 0, U_x(b, t) = 0, \\ U_{xx}(a, t) = 0, U_{xx}(b, t) = 0, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

homojen sınır şartları ve

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1.3)$$

\* Sorumlu Yazar: [sbgkarakoc@nevsehir.edu.tr](mailto:sbgkarakoc@nevsehir.edu.tr)

Geliş : 02.05.2018 Kabul: 05.09.2018

başlangıç şartı ile ele alınacaktır. Denklemdeki  $\varepsilon$  ve  $\mu$  pozitif parametreler;  $t$  zaman  $x$  ise konumsal koordinatı göstermektedir.

Sığ kanallardaki su dalgaları teorisini tanımlamak için kullanılan önemli matematiksel modellerden biri aşağıda verilen Korteweg-de Vries (KdV) denklemdir:

$$U_t + \varepsilon UU_x + \mu U_{xxx} = 0. \quad (1.4)$$

Denklemde görülen  $UU_x$  ve  $U_{xxx}$  terimleri sırasıyla lineer olmayan konveksiyon ve dağılıma karşılık gelmektedir. Bu tip su dalgaları artan zaman adımlarında ve başka bir soliton ile girişiminde genliğinde ve hızında hemen hemen hiçbir değişiklik olmayan dalgalar olup bu tip dalgalar soliton olarak adlandırılmaktadır. Sığ su dalgalarındaki uzun dalgaların dağılımı, kabarcık-sıvı karışımları, iyon akustik plazma dalgaları, akışkanlar mekaniği, lineer olmayan optikler ve enharmonik kristallerdeki dalga olayları gibi pekçok fiziksel olay ilk olarak Korteweg ve de Vries isimli iki bilim adamı tarafından tanıtılan KdV denklemi ile ifade edilebilir [1]. KdV denkleminin analitik çözümü ilk olarak Zabusky, Fornberg ve Whitham tarafından elde edilmiştir [2, 3]. Denklem sayısal çözümleri ise ilk defa Zabusky ve Kruskal tarafından sonlu fark yöntemi kullanılarak bulunmuştur [4]. KdV denkleminin çözümlerinin varlık ve tekliği Gardner ve çalışma arkadaşları tarafından gösterilmiştir [5]. Yine KdV denkleminin sayısal çözümleri farklı bilim adamları tarafından pseudospectral yöntem [3], sonlu fark yöntemi [6, 7], sonlu eleman yöntemi [8, 16], ısı dengesi integral yöntemi [17] ve cosine açılımına dayanan diferansiyel Quadrature yöntemi [18] gibi çeşitli yöntemler kullanılarak elde edilmiştir. mKdV denkleminin literatürde sınırlı sayıda sayısal çözümleri mevcuttur. Kaya [19], modifiye edilmiş yüksek mertebeden KdV denkleminin açık çözümlerini Adomian ayrışım yöntemi ile hesaplamıştır. mKdV denklemi sayısal olarak quadratik B-spline Galerkin sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak Biswas ve arkadaşları tarafından çözülmüştür [20]. Raslan ve Baghdady [21, 22], mKdV denkleminin hem fark çözümünün doğruluğunu ve kararlılığını hemde mKdV denklemi ile modellenen plajlar ve göllerin kıyıları boyunca görülen sığ su dalgalarının dinamiğini sayısal olarak incelemiştirler. mKdV denkleminin çoklu soliton çözümleri ile (3+1) boyutlu mKdV denkleminin çözümleri Wazwaz tarafından bulunmuştur [23, 24]. Ak ve çalışma arkadaşları mKdV denkleminin Lumped Petrov-Galerkin and Galerkin yöntemlerini uygulamışlardır [25, 26]. Bu çalışmada, mKdV denkleminin sayısal çözümleri septik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edildi. Yöntemin performansını ve etkinliğini göstermek için tek soliton dalga ile iki ve üç soliton dalganın etkileşimi incelendi. Yine sunulan yöntemin şartsız kararlı olduğu von-Neumann kararlılık analizi kullanılarak gösterildi.

## 2. SEPTİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Problemin çözüm bölgesi olan  $a \leq x \leq b$  aralığının düzgün bir parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olsun.  $h = \frac{b-a}{N} = x_{m+1} - x_m$  olmak üzere  $x_m$  düğüm noktalarında  $\Phi_m(x)$  ( $m = -3(1)N + 3$ ) septik B-spline fonksiyonlar

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} a^7, & [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ a^7 - 8b^7, & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ a^7 - 8b^7 + 28c^7, & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ a^7 - 8b^7 + 28c^7 - 56d^7, & [x_{m-1}, x_m] \\ e^7 - 8f^7 + 28g^7 - 56h^7, & [x_m, x_{m+1}] \\ e^7 - 8f^7 + 28g^7, & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ e^7 - 8f^7, & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ e^7, & [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklinde olup burada  $a = (x - x_{m-4})^7$ ,  $b = (x - x_{m-3})^7$ ,  $c = (x - x_{m-2})^7$ ,  $d = (x - x_{m-1})^7$ ,  $e = (x_{m+4} - x)^7$ ,  $f = (x_{m+3} - x)^7$ ,  $g = (x_{m+2} - x)^7$ ,  $h = (x_{m+1} - x)^7$ .

$\{\emptyset_{-3}(x), \emptyset_{-2}(x), \dots, \emptyset_{N+2}(x), \emptyset_{N+3}(x)\}$  kümesi problemin çözüm bölgesi olan  $[a, b]$  aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Problemin tam çözümü olan  $U(x, t)$  fonksiyonuna karşılık gelen  $U_N(x, t)$  yaklaşık çözümü aşağıdaki gibi verilebilir:

$$U_N(x, t) = \sum_{i=-3}^{N+3} \emptyset_i(x) \delta_i(t). \quad (2.2)$$

Bu ifadede  $\emptyset_i(x)$  ler septik B-spline fonksiyonlar ve  $\delta_i(t)$  ler sınır şartları yardımıyla elde edilecek olan zamana bağlı parametrelerdir. (2.1) ile verilen septik B-spline fonksiyonlar ve (2.2) ile ifade edilen yaklaşım fonksiyonu kullanılırsa  $x_m$  düğüm noktasında  $U$  nun kendisinin ve  $x$  e göre birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri

$$\begin{aligned} U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3}, \\ U'_m &= \frac{7}{h}(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U''_m &= \frac{42}{h^2}(\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \\ U'''_m &= \frac{210}{h^3}(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklinde elde edilir ve burada  $'$ ,  $''$ ,  $'''$  sembolleri sırasıyla  $x$  e göre birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri göstermektedir. (2.1) ve (2.3) yaklaşımları (1.1) ile verilen denklemden kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &\dot{\delta}_{m-3} + 120\dot{\delta}_{m-2} + 1191\dot{\delta}_{m-1} + 2416\dot{\delta}_m + 1191\dot{\delta}_{m+1} + 120\dot{\delta}_{m+2} + \dot{\delta}_{m+3} \\ &\quad + 7\frac{Z_m}{h} \varepsilon(-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) + \\ &\quad \frac{210}{h^3} \mu(-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminde

$$Z_m = (\delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3})^2 \text{ dir.}$$

(2.4) ile verilen denklem sisteminde  $\delta_i$  ve zamana bağlı parametreler olan  $\dot{\delta}_i$  lerin yerine sırasıyla aşağıdaki Crank-Nicolson ve sonlu fark yaklaşımı kullanılırsa

$$\delta_i = \frac{\delta^n + \delta^{n+1}}{2}, \quad \dot{\delta}_i = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}$$

$\delta_i^n$  ve  $\delta_i^{n+1}$  parametreleri arasında  $i = m - 3, m - 1, \dots, m + 1, m + 3$  olmak üzere

$$\begin{aligned} a_1 \delta_{m-3}^{n+1} + b_1 \delta_{m-2}^{n+1} + c_1 \delta_{m-1}^{n+1} + d_1 \delta_m^{n+1} + e_1 \delta_{m+1}^{n+1} + f_1 \delta_{m+2}^n + g_1 \delta_{m+3}^n &= g_1 \delta_{m-3}^n + \\ f_1 \delta_{m-2}^n + e_1 \delta_{m-1}^n + d_1 \delta_m^n + c_1 \delta_{m+1}^n + b_1 \delta_{m+2}^n + a_1 \delta_{m+3}^n & \quad m = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklindeki bağıntılar elde edilir ve bu bağıntılarda

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - EZ_m - M, & e_1 &= 1191 + 245EZ_m - 19M, \\ b_1 &= 120 - 56EZ_m - 8M, & f_1 &= 120 + 56EZ_m + 8M, \\ c_1 &= 1191 - 245EZ_m + 19M, & g_1 &= 1 + EZ_m + M, \end{aligned}$$



$$a_{25} = 1 + EZ_1 + M,$$

$$a_{32} = \frac{96145}{81} - \frac{19519}{81}EZ_2 + \frac{1865}{81}M,$$

$$a_{34} = \frac{96470}{81} + \frac{19846}{81}EZ_2 - \frac{1538}{81}M,$$

$$a_{36} = 1 + EZ_2 + M,$$

$$a_{m,m-2} = 120 - 56EZ_m - 8M,$$

$$a_{m,m} = 2416,$$

$$a_{m,m+2} = 120 + 56EZ_m + 8M,$$

$$a_{n-1,n-4} = 1 - EZ_{n-2} - M,$$

$$a_{n-1,n-2} = \frac{96470}{81} - \frac{19846}{81}EZ_{n-2} + \frac{1538}{81}M,$$

$$a_{n-1,n} = \frac{96145}{81} + \frac{19519}{81}EZ_{n-2} - \frac{1865}{81}M,$$

$$a_{n,n-3} = 1 - EZ_{n-1} - M,$$

$$a_{n,n-1} = \frac{90356}{324} - \frac{22376}{324}EZ_{n-1} + \frac{1696}{324}M,$$

$$a_{n,n+1} = \frac{53851}{324} + \frac{1289}{324}EZ_{n-1} - \frac{2047}{324}M,$$

$$a_{n+1,n-1} = -\frac{10368}{81}M,$$

$$a_{n+1,n+1} = -\frac{20736}{81}M, \quad b_{11} = -\frac{20736}{81}M,$$

$$b_{13} = -\frac{10368}{81}M,$$

$$b_{21} = \frac{53851}{81} + \frac{1289}{81}EZ_1 - \frac{2047}{81}M,$$

$$b_{23} = \frac{90356}{81} - \frac{22376}{81}EZ_1 + \frac{1696}{81}M,$$

$$b_{25} = 1 - EZ_1 - M,$$

$$b_{32} = \frac{96145}{81} + \frac{19519}{81}EZ_2 - \frac{1865}{81}M,$$

$$a_{31} = \frac{9344}{81} - \frac{4160}{81}EZ_2 - \frac{272}{81}M$$

$$a_{33} = \frac{195640}{81} + \frac{56}{81}EZ_2 + \frac{56}{81}M,$$

$$a_{35} = 120 + 56EZ_2 + 8M,$$

$$a_{m,m-3} = 1 - EZ_m - M,$$

$$a_{m,m-1} = 1191 - 245EZ_m + 19M,$$

$$a_{m,m+1} = 1191 + 245EZ_m - 19M,$$

$$a_{m,m+3} = 1 + EZ_m + M,$$

$$a_{n-1,n-3} = 120 - 56EZ_{n-2} - 8M,$$

$$a_{n-1,n-1} = \frac{195640}{81} - \frac{56}{81}EZ_{n-2} - \frac{56}{81}M,$$

$$a_{n-1,n+1} = \frac{9344}{81} + \frac{4160}{81}EZ_{n-2} + \frac{272}{81}M,$$

$$a_{n,n-2} = \frac{38449}{324} - \frac{18319}{324}EZ_{n-1} - \frac{2575}{324}M,$$

$$a_{n,n} = \frac{638309}{324} - \frac{61019}{324}EZ_{n-1} + \frac{1573}{324}M,$$

$$a_{n+1,n-2} = -\frac{324}{81}M,$$

$$a_{n+1,n} = -\frac{36612}{81}M,$$

$$b_{12} = -\frac{36612}{81}M,$$

$$b_{14} = -\frac{324}{81}M,$$

$$b_{22} = \frac{638309}{324} - \frac{61019}{324}EZ_1 + \frac{1573}{324}M,$$

$$b_{24} = \frac{38449}{324} - \frac{18319}{324}EZ_1 - \frac{2575}{324}M,$$

$$b_{31} = \frac{9344}{81} + \frac{4160}{81}EZ_2 + \frac{272}{81}M$$

$$b_{33} = \frac{195640}{81} - \frac{56}{81}EZ_2 - \frac{56}{81}M,$$

$$\begin{aligned}
 b_{34} &= \frac{96470}{81} - \frac{19846}{81}EZ_2 + \frac{1538}{81}M, & b_{35} &= 120 - 56EZ_2 - 8M, \\
 b_{36} &= 1 - EZ_2 - M, & b_{m,m-3} &= 1 + EZ_m + M, \\
 b_{m,m-2} &= 120 + 56EZ_m + 8M, & b_{m,m-1} &= 1191 + 245EZ_m - 19M, \\
 b_{m,m} &= 2416, & b_{m,m+1} &= 1191 - 245EZ_m + 19M, \\
 b_{m,m+2} &= 120 - 56EZ_m - 8M, & b_{m,m+3} &= 1 - EZ_m - M, \\
 b_{n-1,n-4} &= 1 + EZ_{n-2} + M, & b_{n-1,n-3} &= 120 + 56EZ_{n-2} + 8M, \\
 b_{n-1,n-2} &= \frac{96470}{81} + \frac{19846}{81}EZ_{n-2} - \frac{1538}{81}M, & b_{n-1,n-1} &= \frac{195640}{81} + \frac{56}{81}EZ_{n-2} + \frac{56}{81}M, \\
 b_{n-1,n} &= \frac{96145}{81} - \frac{19519}{81}EZ_{n-2} + \frac{1865}{81}M, & b_{n-1,n+1} &= \frac{9344}{81} - \frac{4160}{81}EZ_{n-2} - \frac{272}{81}M, \\
 b_{n,n-3} &= 1 + EZ_{n-1} + M, & b_{n,n-2} &= \frac{38449}{324} + \frac{18319}{324}EZ_{n-1} + \frac{2575}{324}M, \\
 b_{n,n-1} &= \frac{90356}{324} + \frac{22376}{324}EZ_{n-1} - \frac{1696}{324}M, & b_{n,n} &= \frac{638309}{324} + \frac{61019}{324}EZ_{n-1} - \frac{1573}{324}M, \\
 b_{n,n+1} &= \frac{53851}{324} - \frac{1289}{324}EZ_{n-1} + \frac{2047}{324}M, & b_{n+1,n-2} &= \frac{324}{81}M, \\
 b_{n+1,n-1} &= \frac{10368}{81}M, & b_{n+1,n} &= \frac{36612}{81}M, & b_{n+1,n+1} &= \frac{20736}{81}M.
 \end{aligned}$$

Elde edilen bu cebirsel denklem sistemi Thomas algoritması ile kolayca çözülebilir. Lineer olmayan  $Z_m$  terimi için her bir zaman adımında

$$\delta^{n*} = \delta^n + \frac{(\delta^n - \delta^{n-1})}{2}$$

şeklindeki iç iterasyon iki veya üç defa uygulanır.  $\delta^n$  parametrelerinin hesaplanabilmesi için  $\delta^0$  başlangıç vektörünün bilinmesi gerekir.  $\delta^0$  başlangıç vektörünün elde edilebilmesi için (1.1) denklemi ile verilen aşağıdaki başlangıç ve türevli sınır şartları kullanılmıştır:

$$\begin{aligned}
 U_N(x, 0) &= U(x_m, 0), m = 0, 1, 2, \dots, N \\
 (U_N)_x(a, 0) &= 0, & (U_N)_x(b, 0) &= 0, \\
 (U_N)_{xx}(a, 0) &= 0, & (U_N)_{xx}(b, 0) &= 0, \\
 (U_N)_{xxx}(a, 0) &= 0, & (U_N)_{xxx}(b, 0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

### 3. KARARLILIK ANALİZİ

Algoritmamızın kararlılık analizi von-Neumann yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Bunun için mKdV denklemindeki  $U^2 U_x$  teriminde bulunan  $U^2$  terimi lokal olarak sabit alınmıştır.  $k$  mod numarası,  $h$  eleman genişliği ve  $i$  birim imajiner sayı olmak üzere algoritmanın kararlılığını göstermek için  $\delta_m^n = \xi^n e^{imkh}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) Fourier ifadesi (2.5) denkleminde yazılırsa büyüme faktörü olan  $\xi$

$$\xi = \frac{A+iB}{A-iB} \quad (3.1)$$

formunda elde edilir ki burada

$$A = 2 \cos(3kh) + 240 \cos(2kh) + 2382 \cos(kh) + 2416,$$

$$B = 2(EZ_m + M) \sin(3kh) + 2(56EZ_m + 8M) \sin(2kh) + 2(245EZ_m - 19M) \sin(kh) \text{ dir.}$$

(3.1) ifadesinin modülü 1 olarak bulunur bu ise bize algoritmamızın şartsız kararlı olduğunu gösterir.

### 4. TEST PROBLEMLERİ

Bu bölümde mKdV denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılan yöntemin, performansını ve etkinliğini göstermek için tam çözümü bilinen tek soliton dalganın hareketi ile etkileşim süresince tam çözümleri bilinmeyen iki ve üç soliton dalganın karşılıklı etkileşimleri ele alınacaktır. (1.1)-(1.3) ile verilen başlangıç sınır değer problemi

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, t) dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(x, t) dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} [U^4(x, t) - \frac{6\mu}{\varepsilon} U_x^2(x, t)] dx,$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} [U^6(x, t) - \frac{30\mu}{\varepsilon} U^2(x, t) U_x^2(x, t) + \frac{18\mu^2}{\varepsilon^2} U_{xx}^2(x, t)] dx,$$

şeklinde ifade edilen dört adet değişmeze sabittir. Sayısal çözüm ile tam çözümü karşılaştırabilmek için

$$L_2 = \|U_{tam} - U_N\|_2 \cong \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U_{tam} - U_N\|_\infty \cong \max_j |U_j^{tam} - (U_N)_j|$$

eşitlikleri ile tanımlanan hata normları kullanılacaktır.

#### 4.1. Tek Soliton Dalganın Hareketi

Bu problem için (1.1) denklemi,  $x \rightarrow \pm\infty$  iken  $U \rightarrow 0$  şeklindeki sınır şartları ve

$U(x, 0) = A \operatorname{sech}[k(x - x_0)]$  ile belirtilen başlangıç şartı göz önüne alınarak incelenecektir. Bu

eşitlikte soliton dalganın genliği  $A = \sqrt{\frac{6c}{\varepsilon}}$  ve genişliği ise  $k = \sqrt{\frac{c}{\mu}}$  dir.  $c$  ve  $x_0$  keyfi sabitler olmak üzere mKdV denkleminin tam çözümü

$$U(x, t) = A \operatorname{sech}[k(x - ct - x_0)] \quad (4.1.1)$$

olup değişmezlerin tam değerleri ise aşağıdaki gibi verilebilir [20];

$$I_1 = \pi \sqrt{\frac{6\mu}{\varepsilon}}, \quad I_2 = \frac{12\sqrt{\mu c}}{\varepsilon}, \quad I_3 = -\frac{64c^2}{\varepsilon^2} \sqrt{\frac{\mu}{c}}, \quad I_4 = -\frac{216c^2\mu}{5\varepsilon^3} \sqrt{\frac{c}{\mu}}.$$

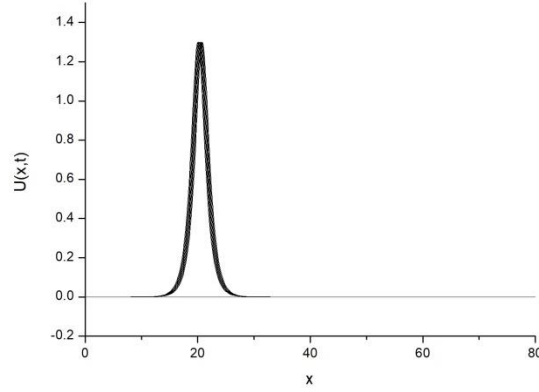
[20,21] referansları ile karşılaştırma yapabilmek için  $[0,80]$  aralığında  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $c = 0.845$  ve  $0.3$  parametreleri seçildi. Farklı zaman adımlarında hesaplanan  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata

normlarının değerleri ile  $I_1, I_2, I_3$  ve  $I_4$  değişmezlerinin değerleri Tablo 1’de verilmiştir. Yine Tablo 1’de elde edilen değerler için karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu tablodan elde edilen hata norm değerlerinin karşılaştırma yapılan diğer referanslara göre daha iyi olduğu ve yine değişmezler için elde edilen değerlerin ise programın çalışması süresince hemen hemen sabit kaldığı ve tablodaki referanslar ile oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. Değişmezlerin başlangıç değerlerine göre değişimleri  $c = 0.3$  için sırasıyla  $3 \times 10^{-5}, 0, 2.52 \times 10^{-5}, 1 \times 10^{-2}$  şeklinde bulunurken  $c = 0.845$  için  $1 \times 10^{-7}, 0, 0, 1 \times 10^{-6}$  şeklinde bulunmuştur.  $c = 0.845$  için tek soliton dalganın  $t = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$  zaman adımlarındaki hareketi Şekil 1’de gösterilmiştir. Bu şekilden, beklenildiği gibi, tek soliton dalganın genliğinde ve hızında artan zamanlarda neredeyse bir değişiklik olmadan sağa doğru hareket ettiği görülmektedir. Yine  $c = 0.845$  için  $t = 1$  zaman adımında hata dağılımının grafiği Şekil 2’de verilmiştir. Şekil 2’den sınır şartlarının doğru seçildiği ve mKdV denkleminde doğru bir şekilde uygulandığı anlaşılmaktadır.

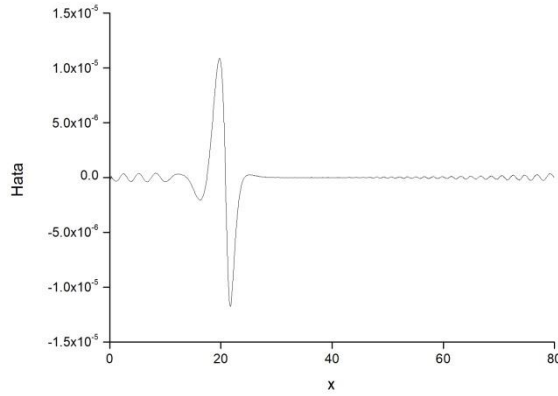
**Tablo 1.**  $0 \leq x \leq 80$  aralığında  $\varepsilon = 3, \mu = 1, h = 0.1, \Delta t = 0.01, c = 0.845$  ve  $c = 0.3$  parametreleri için tek soliton dalganın değişmezleri ve hata norm değerleri

$c = 0.3$	$t$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
$I_1$	Mevcut Yöntem	4.44282	4.44283	4.44283	4.44284	4.44285	4.44285
	[21]	4.44279	4.4426	4.4424	4.4422	4.4420	4.44192
$I_2$	Mevcut Yöntem	2.1908	2.1908	2.1908	2.1908	2.1908	2.1908
	[21]	2.1908	2.1906	2.1904	2.1902	2.1900	2.18994
$I_3$	Mevcut Yöntem	0.438172	0.438172	0.438171	0.438167	0.4381574	0.438146
	[21]	0.438274	0.43816	0.438047	0.43793	0.43782	0.437763
$I_4$	Mevcut Yöntem	0.080128	0.079921	0.080275	0.081686	0.085981	0.090580
	[21]	0.078836	0.078888	0.078863	0.078858	0.078923	0.079070
$L_2$	Mevcut Yöntem	3.80E-05	4.45E-05	5.16E-05	6.39E-05	8.80E-05	1.07E-04
	[21]	-	-	-	-	-	-
$L_\infty$	Mevcut Yöntem	3.44E-05	4.69E-05	6.22E-05	8.71E-05	1.51E-04	2.00E-04
	[21]	9.41E-05	2.06E-04	2.62E-04	2.94E-04	3.10E-04	3.10E-04
$c = 0.845$							
$I_1$	Mevcut Yöntem	4.442865	4.442865	4.442865	4.442865	4.442865	4.442865
	[20]	-	-	-	-	-	4.443000
$I_2$	Mevcut Yöntem	3.676941	3.676941	3.676941	3.676941	3.676941	3.676941
	[20]	-	-	-	-	-	3.677535
$I_3$	Mevcut Yöntem	2.071327	2.071327	2.071327	2.071327	2.071327	2.071327
	[20]	-	-	-	-	-	2.073575
$I_4$	Mevcut Yöntem	1.050155	1.050155	1.050155	1.050155	1.050155	1.050154
	[20]	-	-	-	-	-	1.047119
$L_2$	Mevcut Yöntem	2.38E-06	5.89E-06	9.51E-06	1.31E-05	1.66E-05	1.84E-05
	[20]	-	-	-	-	-	-
$L_\infty$	Mevcut Yöntem	1.76E-06	4.35E-06	6.64E-06	8.74E-06	1.07E-05	1.17E-05
	[20]	-	-	-	-	-	1.20E-03





Şekil 1. Tek soliton dalganın  $t = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$  zaman adımlarındaki hareketi



Şekil 2.  $c = 0.845$  için  $t = 1$  zaman adımında tek soliton dalganın hata grafiği.

#### 4.2. İki Soliton Dalganın Girişimi

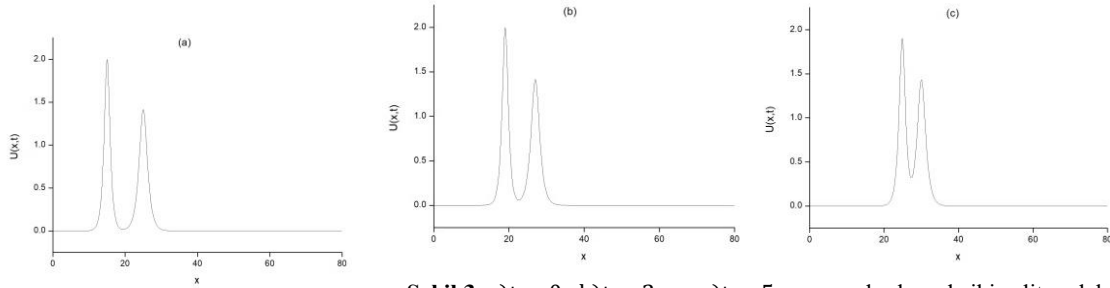
Şimdi iki soliton dalganın girişimi problemini  $U \rightarrow 0$  iken  $x \rightarrow \pm\infty$  sınır şartları ile uyumlu olarak

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^2 A_j \operatorname{sech}[k_j(x - x_j)], \quad A_j = \sqrt{\frac{6c_j}{\varepsilon}}, \quad k_j = \sqrt{\frac{c_j}{\mu}} \quad j = 1, 2 \quad (4.2.1)$$

şeklindeki başlangıç şartını ele alarak inceleyeceğiz. Bunun için  $0 \leq x \leq 80$  aralığında  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 1$ ,  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 25$  parametreleri seçildi. Değişmezlerin değerlerini elde etmek için sayısal algoritma  $t = 5$  zaman adımına kadar çalıştırıldı. [20,21] referanslarındaki değişmezlerin değerleri ile yöntemimizin denkleme uygulanması sonucu elde edilen değerler Tablo 2’de verilmiştir. Tablodan, mevcut yöntem ile elde edilen değişmezlerin değerlerinin verilen referanslarla uyumlu olduğu ve programın çalışması boyunca hemen hemen sabit kaldığı görülmektedir.  $t = 0$  ve  $t = 5$  zaman adımlarındaki değişmezlerin değerlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 3.2 \times 10^{-6}$ ,  $\Delta I_2 = 0$ ,  $\Delta I_3 = 3.18 \times 10^{-4}$ ,  $\Delta I_4 = 6.5 \times 10^{-2}$  olup bu ise yöntemimizin mKdV denkleminde oldukça başarılı bir şekilde uygulandığını göstermektedir.  $t = 0, 2$  ve  $5$  zaman adımlarındaki iki soliton dalganın girişimi Şekil 3’te resmedilmiştir. Elde edilen grafiklerin, referans [21] dekiler ile oldukça uyumlu oldukları görülmektedir.

**Tablo 2.**  $0 \leq x \leq 80$  aralığında  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 1$ ,  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 25$  parametreleri için iki soliton dalganın girişimi.

	$t$	1	2	3	4	5
$I_1$	Mevcut Yöntem	8.885741	8.885749	8.8857255	8.885698	8.885745
	[20]	8.886014	-	-	-	8.886776
	[21]	8.63906	8.46653	8.36797	8.24351	8.15655
$I_2$	Mevcut Yöntem	9.659344	9.659344	9.659344	9.659344	9.659344
	[20]	9.659527	-	-	-	9.663714
	[21]	9.03663	8.65149	8.38153	8.17557	8.00870
$I_3$	Mevcut Yöntem	10.219215	10.219209	10.219191	10.219145	10.218897
	[20]	10.239870	-	-	-	10.249000
	[21]	7.94016	6.80785	6.02332	5.46112	5.18743
$I_4$	Mevcut Yöntem	10.671830	10.671230	10.671230	10.671590	10.736830
	[20]	10.599820	-	-	-	10.549520
	[21]	-	-	-	-	-



**Şekil 3.** a)  $t = 0$ , b)  $t = 2$  ve c)  $t = 5$  zaman adımlarında iki soliton dalganın girişimi.

### 4.3. Üç Soliton Dalganın Girişimi

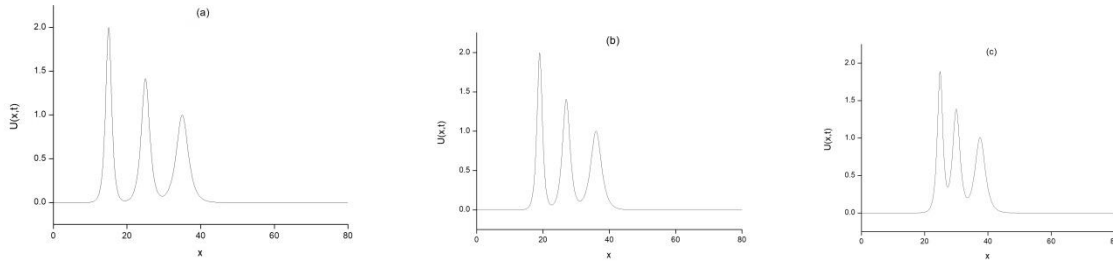
Son olarak üç soliton dalganın girişimi hareketi,  $U \rightarrow 0$  iken  $x \rightarrow \pm\infty$  sınır şartlarına uygun olarak

$$U(x, 0) = \sum_{j=1}^3 A_j \operatorname{sech}[k_j(x - x_j)] \quad A_j = \sqrt{\frac{6c_j}{\varepsilon}} \quad , \quad k_j = \sqrt{\frac{c_j}{\mu}} \quad j = 1,2,3$$

şeklinde belirtilen başlangıç şartı düşünülerek incelenecektir. Bunun için  $0 \leq x \leq 80$  aralığında  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0.5$ ,  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 25$ ,  $x_3 = 35$  parametreleri alındı. Bilgisayar programı  $t = 5$  zaman adımına kadar çalıştırıldı. Üç soliton dalganın girişimi hareketi için, değişmezlerin elde edilen değerleri ve [20,21] referansları ile karşılaştırılması Tablo 3'te gösterildi. Tablodan programın çalışması süresince değişmezlerin değerlerinin hemen hemen sabit kaldığı ve verilen referanslar ile uyumlu olduğu görülebilir.  $t = 0$  ve  $t = 5$  zaman adımlarındaki değişmezlerin değerlerindeki mutlak değişim sırasıyla  $\Delta I_1 = 3.2 \times 10^{-6}$ ,  $\Delta I_2 = 0$ ,  $\Delta I_3 = 3.18 \times 10^{-4}$ ,  $\Delta I_4 = 6.5 \times 10^{-2}$  elde edilmiş olup bu ise yöntemimizin mKdV denklemini için uygun bir yöntem olduğunu göstermektedir. Şekil 4'te  $t = 0, 2$  ve  $5$  zaman adımlarındaki üç soliton dalganın girişimi çizilmiştir. Elde edilen grafiklerin, referans [21] dekiler ile oldukça uyumlu oldukları görülmektedir.

**Tablo 3.**  $0 \leq x \leq 80$  aralığında  $\varepsilon = 3$ ,  $\mu = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0.5$ ,  $x_1 = 15$ ,  $x_2 = 25$ ,  $x_3 = 35$  parametreleri için üç soliton dalganın girişimi.

	$t$	1	2	3	4	5
$I_1$	Mevcut Yöntem	13.3286819	13.3286776	13.3285760	13.3287887	13.3284165
	[20]	13.329060	-	-	-	13.330630
	[21]	13.07780	12.90114	12.80053	12.67308	12.57683
$I_2$	Mevcut Yöntem	12.5199427	12.5199427	12.5199427	12.5199427	12.5199428
	[20]	12.520280	-	-	-	12.526260
	[21]	11.85946	11.46870	11.19353	10.98244	10.80949
$I_3$	Mevcut Yöntem	11.2284357	11.2284276	11.2284060	11.2283558	11.2280847
	[20]	11.249790	-	-	-	11.261270
	[21]	8.88135	7.74215	6.95347	6.38317	6.10943
$I_4$	Mevcut Yöntem	11.0219000	11.0231900	11.0393100	11.0397100	11.1304700
	[20]	10.948370	-	-	-	10.885150
	[21]	-	-	-	-	-



**Şekil 4.** a)  $t = 0$ , b)  $t = 2$  ve c)  $t = 5$  zaman adımlarında üç soliton dalganın girişimi.

## 5. SONUÇ

Bu makalede, septik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi kullanılarak mKdV denkleminin soliton çözümleri elde edildi. Yöntemin kararlılık analizi yapıldı ve yöntemin şartsız kararlı olduğu gösterildi. İncelenen üç test probleminde yöntemin etkinliği ve yeterliliğini göstermek için  $L_2$ ,  $L_\infty$  hata norm değerleri ile  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  ve  $I_4$  değişmezlerinin değerleri hesaplandı. Elde edilen değerler grafikler ve tablolar halinde verildi. Tablolara bakıldığında elde edilen hata norm değerlerinin oldukça küçük ve değişmezlerin değerlerinin ise korunduğu kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla yöntemimizin mKdV gibi denklemler için uygun bir yöntem olduğu söylenebilir.

## REFERANSLAR

- [1] Korteweg DJ and G de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary wave. Philosophical Magazine 1895; 39: 422-443.
- [2] Zabusky NJ. A synergetic approach to problem of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, in: W. Ames (Ed.). Proc. Symp. Nonlinear Partial Dif. Equations, Academic Press 1967; 223-258.
- [3] Fornberg B and Whitham GB. A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena. Philos. Trans. Roy. Soc 1978; 289: 373-404.

- [4] Zabusky NJ and Kruskal MD. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett* 1965; 15 (6): 240-243.
- [5] Gardner CS, Green JM, Kruskal MD and Miura RM. Method for solving Korteweg- de Vries equation. *Phys. Rev* 1967; 19: 1095.
- [6] Goda K. On instability of some finite difference schemes for Korteweg- de Vries Equation. *J.Phys. Soc. Japan* 1975; 39: 229-236.
- [7] Vliengenthart AC. On finite difference methods for the Korteweg-de Vries equation. *J. Eng. Math* 1971; 5: 137-155.
- [8] Soliman AA. Collocation solution of the Korteweg-de Vries equation using septic splines. *Int. J. Comput. Math* 2004; 81: 325-331.
- [9] Irk D, Dağ I and Saka B. A small time solutions for the Korteweg-de Vries equation using spline approximation. *Appl. Math. Comput* 2006; 173 (2): 834-846.
- [10] Canıvar A, Sarı M and Dağ I. A Taylor-Galerkin finite element method for the KdV equation using cubic B-splines. *Physica B* 2010; 405: 3376-3383.
- [11] Korkmaz A. Numerical algorithms for solutions of Korteweg-de Vries Equation. *Numer. Meth. Part. D E* 2010; 26(6): 1504-1521.
- [12] Ersoy O and Dağ I. Cubic B-Spline Algorithm for Korteweg-de Vries Equation. *Advances in Numerical Analysis* 2015; 2015: 1-8.
- [13] Aksan EN and Ozdes A. Numerical solution of Korteweg-de Vries equation by Galerkin B-spline finite element method. *Applied Mathematics and Computation* 2006; 175: 1256-1265.
- [14] Irk D. Quintic B-spline Galerkin method for the KdV equation, *Anadolu University Journal of Science and Technology B- Theoretical Sciences* 2017; 5(2): 111-119.
- [15] O Ersoy and Dağ I. The Exponential Cubic B-Spline Algorithm for Korteweg- de Vries Equation. *Advances in Numerical Analysis* 2015; 2015: 8 pages.
- [16] Dağ I and Dereli Y. Numerical solutions of KdV equation using radial basis functions. *Applied Mathematical Modelling* 2008; 32(4): 535–546.
- [17] Kutluay S, Bahadır AR and Ozdes A. A small time solutions for the Korteweg-de Vries equation, *Appl. Math. Comput* 2000; 107: 203-210.
- [18] Saka B. Cosine expansion-based differential quadrature method for numerical solution of the KdV equation. *Chaos Soliton Fractal* 2009; 40: 2181-2190.
- [19] Kaya D. An application for the higher order modified KdV equation by decomposition Method. *Commun. in Nonlinear Science and Num. Simul* 2005; 10: 693-702.
- [20] Biswas A and Raslan KR. Numerical simulation of the modified Korteweg-deVries Equation, *Physics of Wave Phenomena* 2011; 19(2): 142-147.

- [21] Raslan KR and Baghdady HA. A finite difference scheme for the modified Korteweg-de Vries equation. *General Mathematics Notes* 2015; 27(1): 101-113.
- [22] Raslan KR and Baghdady H A. New algorithm for solving the modified Korteweg-de Vries (mKdV) equation, *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences* 2014; 18(1): 59-64.
- [23] Wazwaz AM. A variety of (3+1)-dimensional mKdV equations derived by using the mKdV recursion operator. *Computers and Fluids* 2014; 93(10): 41-45.
- [24] Wazwaz AM. New (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations with mKdV equation constituting its main part: multiple soliton solutions, *Chaos, Solitons and Fractals* 2015; 76: 93-97.
- [25] Ak T, Karakoc SBG and Biswas A. Application of Petrov-Galerkin finite element method to shallow water waves model: Modified Korteweg-de Vries equation. *Scientia Iranica B* 2017; 24(3): 1148-1159.
- [26] Ak T, Karakoc SBG and Biswas A. New Approach for Numerical Solution of Modified Korteweg-de Vries Equation. *Iran J Sci Technol Trans Sci* 2017; 41: 1109-1121.
- [27] Prenter PM. *Splines and Variational Methods*, Wiley 1975.
- [28] Miura RM, Gardner CS and Kruskal MD. Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion. *J. Math. Phys* 1968; 9(8): 1204.
- [29] Miura RM. The Korteweg-de Vries equation: a survey of results. *SIAM Rev* 1976; 18(3): 412-459.