

# İç Silindiri Eksenel Doğrultuda Sonsuza Uzayan Dış İletkeni ise Yarı Sonsuz Eşeksenli Dairesel Dalga Kılavuzundan TEM Modunun Işması

## TEM Wave Radiation from a Semi-infinite Coaxial Waveguide with an Infinitely Extended Inner Cylinder

İsmail H. Tayyar<sup>1</sup>, Alinur Büyükaksoy<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü  
tayyar@gyte.edu.tr

<sup>2</sup>Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Okan Üniversitesi  
alinur.buyukaksoy@okan.edu.tr

### Özet

Bu çalışmada yarı sonsuz dış silindirin sonsuz ince ve mükemmel iletken, eksenel doğrultuda sonsuza uzanan iç silindirin de iki parçalı, yani bir yarısının mükemmel iletken diğer yarısının ise impedans sınır koşulu ile modellendiği durumda TEM modunun dalga kılavuzunun ağızından ışınımı Wiener-Hopf tekniği kullanılarak incelenmiştir. Dalga kılavuzunun iç ve dış silindirlerinin yarı çapları ile empedansın saçılan alana etkileri grafik olarak incelenmiştir.

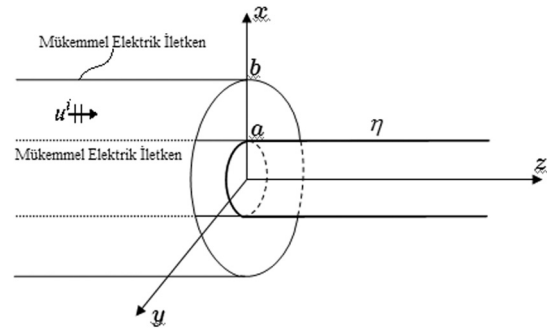
### Abstract

An open ended coaxial waveguide formed by a perfectly conducting semi infinite outer cylinder and a center cylinder extending to infinity in the forward direction whose left part is perfectly conducting while the right part is characterized by a constant surface impedance is considered in the case of TEM wave excitation. By using the Fourier transform technique, the related boundary value problem is formulated as a modified Wiener-Hopf equation. The solution involve three set of infinitely many unknown expansion coefficients satisfying three infinite system of algebraic equations. The approximate solution is obtained numerically and some graphics are displayed for different values of the geometrical and physical parameters of the radiating system.

### 1. Giriş

Bu çalışmada iç silindiri eksenel doğrultuda sonsuza uzayan dış iletkeni ise yarı sonsuz bir eşeksenli dairesel dalga kılavuzunda yayılan TEM modunun ışması incelenecektir. Böyle bir yapı uzun monopul anten ve ilerleyen dalga antenleri için iyi bir model oluşturduğundan bu güne kadar bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir [1-3]. Sistemin TEM moduyla uyarıldığı durum ise değişik özel haller için ele alınmıştır [4-6]. Bu çalışmanın amacı ise yarı sonsuz dış silindirin sonsuz ince ve mükemmel iletken, eksenel doğrultuda sonsuza uzanan iç silindirin de iki parçalı, yani bir yarısının mükemmel iletken diğer yarısının ise impedans sınır koşulu ile modellendiği durumda dalga kılavuzu bölgesinde uyarılmış olan TEM modunun dalga kılavuzunun ağızından ışınımını incelemekten ibarettir (Şekil-1). Saçılan alan ve sınır koşulları üzerine Fourier dönüşümü uygulanmış ve sonra problem dönüşüm

bölgesinde bir Wiener-Hopf denklemine indirgenmiştir. Dalga kılavuzu içerisinde saçılan alan dalga kılavuzu modları cinsinden yazılmış ve süreklilik koşulları kullanılarak problemin çözümü üç tane sonsuz açılım sabit takımını içeren üç tane sonsuz lineer cebirsel denklem sistemine indirgenmiş ve yaklaşık çözüm sayısal yöntemlerle elde edilmiştir. Değişik fiziksel ve geometrik parametrelerin yayılım olayına etkisi grafiklerle verilmiştir.



Şekil-1. Problemin geometrisi

### 2. Problemin Formülasyonu

( $\rho, \varphi, z$ ) silindirik koordinatları göstermek üzere,  $\rho = a, \varphi \in (-\pi, \pi), z \in (-\infty, \infty)$  ile tanımlı iç silindiri eksenel doğrultuda sonsuza uzayan,  $\rho = b, \varphi \in (-\pi, \pi), z \in (-\infty, 0)$  ile belirli dış iletkeni ise yarı sonsuz bir eşeksenli dalga kılavuzunu göz önüne alalım. Dalga kılavuzunun dış iletkeninin sonsuz ince ve mükemmel iletken, iç silindirin ise  $z < 0$  yarısının mükemmel elektriksel iletken,  $z > 0$  yarısının ise  $Z = Z_0$  ile karakterize edilen bir empedans yüzeyi olduğunu varsayacağız. Burada,  $Z_0$  boşluğun karakteristik empedansını göstermektedir.

$\omega$  açısal frekansı göstermek üzere, zamana bağlılığın  $e^{-i\omega t}$  çarpanı ile ifade edildiği monokromatik halde

$$H_\phi^i = u^i = \frac{\exp(ikz)}{\rho}, \quad (1)$$

ile verilmiş bulunan TEM modlu elektromagnetik dalganın kılavuz içerisinde  $+z$  yönünde yayıldığını düşünüyoruz. Burada

$k$  boşluğun dalga sayısını göstermektedir. Bazı matematik işlemleri anlamlı kılabilmek için ortamın çok küçük de olsa bir iletkenliğinin olduğunu, yani  $k$ 'nin çok küçük bir sanal kısma sahip olduğunu düşüneceğiz. Kayıpsız duruma ilişkin sonuçlar ise analiz sonunda  $\text{Im}(k) \rightarrow 0$  yapılarak elde edilebilir.

Problemin simetrisinden dolayı bütün alan bileşenleri

$$H_\phi = u(\rho, z)$$

cinsinden

$$E_\rho = \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} u(\rho, z)$$

$$E_z = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u(\rho, z))$$

biçiminde ifade edilebilir.

Analizin kolaylığı açısından toplam alanı  $u^T(\rho, z)$  aşağıdaki gibi ifade etmek uygun olacaktır:

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1(\rho, z) & \rho > b & z \in (-\infty, \infty) \\ u_2(\rho, z) & \rho \in (a, b) & z > 0 \\ u^i(\rho, z) + u_3(\rho, z) & \rho \in (a, b) & z < 0 \end{cases} \quad (2)$$

(2) denkleminde  $u^i(\rho, z)$  ve  $u_n(\rho, z)$  alanları aşağıda verilen Helmholtz denkleminin sağlar:

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) u_n(\rho, z) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \quad (3)$$

$\rho > b$  bölgesinde  $u_1(\rho, z)$  saçılan alanı için (3) denkleminin  $z \in (-\infty, \infty)$  aralığında Fourier dönüşümünü alırsak

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + (k^2 - \alpha^2) \right] F(\rho, \alpha) = 0. \quad (4a)$$

elde ederiz. Burada

$$F(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz. \quad (4b)$$

ile tanımlı  $F(\rho, \alpha)$  fonksiyonu  $u_1(\rho, z)$  nin Fourier dönüşümü,  $\alpha$  ise kompleks Fourier dönüşüm değişkenidir.

$\rho \rightarrow \infty$  daki radyasyon koşulunu da gözönüne alarak (4a) homojen diferansiyel denklemini çözersek,

$$F^-(\rho, \alpha) + F^+(\rho, \alpha) = A(\alpha) H_1^{(1)}[K(\alpha)\rho] \quad (5a)$$

bulunur. Burada,  $K(\alpha)$ ,  $\alpha = k$  dan  $\alpha = k + i\infty$  ya ve  $\alpha = -k$  dan  $\alpha = -k - i\infty$  ya kadar kesilmiş kompleks  $\alpha$ -düzleminde tanımlı karekök fonksiyonu

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (5b)$$

olup,  $K(0) = k$  dir.  $F^+(\rho, \alpha)$  ve  $F^-(\rho, \alpha)$  ise sırasıyla  $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$  (üst yarım- düzlem) ve  $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$  (alt yarım-düzlem) bölgelerinde  $\alpha$  nın analitik fonksiyonları olup aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$F^\pm(\rho, \alpha) = \pm \int_0^{\pm\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (5c)$$

(5a) denklemindeki  $A(\alpha)$  spektral katsayı olup aşağıdaki sınır ve süreklilik koşulları kullanılarak belirlenecektir.

$$u_1(b, z) + b \frac{\partial u_1(b, z)}{\partial \rho} = 0, \quad z < 0, \quad (6a)$$

$$u_3(b, z) + b \frac{\partial u_3(b, z)}{\partial \rho} = 0, \quad z < 0, \quad (6b)$$

$$u_3(a, z) + a \frac{\partial u_3(a, z)}{\partial \rho} = 0, \quad z < 0, \quad (6c)$$

$$(1 + ik\eta) u_2(a, z) + a \frac{\partial u_2(a, z)}{\partial \rho} = 0, \quad z > 0, \quad (6d)$$

$$u_2(b, z) = u_1(b, z), \quad z > 0, \quad (6e)$$

$$\frac{\partial u_2(b, z)}{\partial \rho} = \frac{\partial u_1(b, z)}{\partial \rho}, \quad z > 0, \quad (6f)$$

$$u^i(\rho, 0) + u_3(\rho, 0) = u_2(\rho, 0), \quad \rho \in (a, b), \quad (6g)$$

$$\frac{\partial u^i(\rho, 0)}{\partial z} + \frac{\partial u_3(\rho, 0)}{\partial z} = \frac{\partial u_2(\rho, 0)}{\partial z}, \quad \rho \in (a, b). \quad (6h)$$

(3) ve (6a-h) denklemleri ile verilen karma sınır değer probleminin çözümünü tek olarak elde etmek için aşağıdaki ayrıt ve radyasyon kuşullarının da göz önünde bulundurulması gerekir:

$$u^T(b, z) = \mathcal{O}(|z|^{1/2}), \quad |z| \rightarrow 0 \quad (7a)$$

$$u_1(\rho, z) = \mathcal{O}\left(\frac{e^{ik|\rho|}}{\rho}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty \quad (7b)$$

Şimdi saçılan alan  $u_2(\rho, z)$  nin Helmholtz denklemini sağladığı  $\rho \in (a, b)$  ve  $z > 0$  bölgesini ele alalım. Bu bölgede (3) denkleminin  $z \in (0, \infty)$  aralığında Fourier dönüşümünü alırsak

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) - \frac{1}{\rho^2} \right) G^+(\rho, \alpha) = f(\rho) - i\alpha g(\rho) \quad (8a)$$

denklemini elde edilir. Buradaki  $G^+(\rho, \alpha)$   $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$  üst yarım-düzlemde  $\alpha$ 'nın analitik fonksiyonu olup aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$G^+(\rho, \alpha) = \int_0^{\infty} u_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz. \quad (8b)$$

(8a) denkleminde  $f(\rho)$  ve  $g(\rho)$

$$f(\rho) = \frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, 0), \quad g(\rho) = u_2(\rho, 0) \quad (8c)$$

olarak tanımlanmıştır. Sağ yanlı (8a) denkleminin çözümü Green fonksiyonu yöntemi ve (6d) denklemini ile verilen sınır koşulu yardımıyla

$$G^+(\rho, \alpha) = \frac{1}{M(\alpha)} \left[ \frac{J(\alpha)Y_1[K(\alpha)\rho] - Y(\alpha)J_1[K(\alpha)\rho]}{b} P^+(K) + \int_a^b [f(t) - i\alpha g(t)] Q(t, \rho, \alpha) dt \right] \quad (9a)$$

olarak bulunur. Burada

$$Q(t, \rho, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \frac{K(\alpha)[J(\alpha)Y_1[K(\alpha)\rho] - Y(\alpha)J_1[K(\alpha)\rho]]}{[J_0[K(\alpha)b]Y_1[K(\alpha)t] - J_1[K(\alpha)t]Y_0[K(\alpha)b]], t < \rho} \\ \frac{K(\alpha)[J(\alpha)Y_1[K(\alpha)t] - Y(\alpha)J_1[K(\alpha)t]]}{[J_0[K(\alpha)b]Y_1[K(\alpha)\rho] - J_1[K(\alpha)\rho]Y_0[K(\alpha)b]], t > \rho} \end{cases}, \quad (9b)$$

$$J(\alpha) = ik\eta J_1[K(\alpha)a] + K(\alpha)J_0[K(\alpha)a], \quad (9c)$$

$$Y(\alpha) = ik\eta Y_1[K(\alpha)a] + K(\alpha)Y_0[K(\alpha)a], \quad (9d)$$

$$M(\alpha) = K(\alpha)[J(\alpha)Y_0[K(\alpha)b] - Y(\alpha)J_0[K(\alpha)b]] \quad (9e)$$

ve

$$P^+(\alpha) = G^+(b, \alpha) + bG^+(b, \alpha) = F^+(b, \alpha) + bF^+(b, \alpha) \quad (9f)$$

konmuştur. (9a) eşitliğinin sol tarafı  $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$  üst yarı-düzlemde regüler olduğundan sağ tarafı da ilgili bölgede regüler olmalıdır. Fakat (9a) eşitliğinin sağ tarafının regürlüğü kompleks  $\alpha$ -düzleminin üst ( $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ ) yarılarında oluşan basit kutupların, yani  $\alpha = \alpha_m$  noktalarının varlığı sebebiyle bozulabilir. Bu kutuplar (9e) denkleminde tanımlanan  $M(\alpha)$  fonksiyonunun basit sıfırlarını oluşturmaktadırlar ve

$$M(\alpha_m) = 0, \quad \Im m(\alpha_m) > \Im m(k), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

ile ifade edilirler. Bu kutuplar rezidülerinin sıfır olmasını zorlamak suretiyle kaldırılabilirler:

$$P^+(\alpha_m) = -\frac{\pi}{2} K_m b [f_m - i\alpha_m g_m] \Delta_m, \quad (11a)$$

Burada

$$\begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_m} \int_a^b \begin{bmatrix} f(\rho) \\ g(\rho) \end{bmatrix} [J_0(K_m b)Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho)Y_0(K_m b)] \rho d\rho, \quad (11b)$$

$$\Delta_m = \frac{b^2}{2} \left( \frac{2}{\pi K_m b} \right)^2 - \frac{a^2}{2} \left[ 1 + \frac{ik\eta}{K_m^2 a} (2 + ik\eta a) \right] \tilde{L}_1^2, \quad (11c)$$

ve

$$\tilde{L}_1 = J_0(K_m b)Y_1(K_m a) - J_1(K_m a)Y_0(K_m b) \quad (11d)$$

dır. Şimdi Wiener-Hopf denklemini elde etmek için (6a) sınır koşulunun Fourier dönüşümünü alırsak

$$F^-(b, \alpha) + bF^-(b, \alpha) = 0 \quad (12a)$$

elde ederiz. Burada  $(\bullet)$ ,  $\rho$  ya göre alınan türevi göstermektedir. (5a) denkleminde (12a) sınır koşulu uygulandığında

$$A(\alpha) = \frac{P^+(\alpha)}{bK(\alpha)H_0^{(1)}[K(\alpha)b]} \quad (12b)$$

bulunur. Burada  $P^+(\alpha)$  (9f) ile tanımlanmıştır. (12b) ifadesini (5a) denkleminde yerine

koyarsak

$$F^-(\rho, \alpha) + F^+(\rho, \alpha) = \frac{P^+(\alpha)}{bK(\alpha)H_0^{(1)}[K(\alpha)b]} H_1^{(1)}[K(\alpha)\rho] \quad (12c)$$

yazılır. (12c) ifadesi (6e,f) denklemleri ile verilen süreklilik koşullarıyla birlikte düşünüldüğünde

$$\frac{1}{N(\alpha)M(\alpha)} P^+(\alpha) - \frac{F^-(b, \alpha)}{ik\eta} = -\frac{1}{M(\alpha)} \int_a^b [f(t) - iag(t)] [J(\alpha)Y_1(Kt) - Y(\alpha)J_1(Kt)] t dt \quad (13a)$$

elde edilir. Burada  $N(\alpha)$

$$N(\alpha) = \frac{H_0^1(Kb)}{H_1^1(Kb)M_0(\alpha) + H_0^1(Kb)M_1(\alpha)} \quad (13b)$$

ve

$$M_j(\alpha) = J(\alpha)Y_j(Kb) - Y(\alpha)J_j(Kb), \quad j = 0, 1 \quad (13c)$$

ile tanımlanmıştır. (11b) denkleminde görünen  $f(\rho)$  ve  $g(\rho)$  fonksiyonları Dini koşulunu sağlayan mutlak integrallenebilir fonksiyonlar olduklarından aşağıdaki gibi tam ortogonal fonksiyonlar kümesi cinsinden seriye açılabilirler[7]:

$$\begin{bmatrix} f(\rho) \\ g(\rho) \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} [J_0(K_m b)Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho)Y_0(K_m b)] \quad (14)$$

(14) ifadesini (13a) denkleminde yerine koyup ortaya çıkan integral hesaplandığında  $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$  bandında geçerli olan aşağıdaki Wiener-Hopf denklemini elde ederiz:

$$\frac{1}{N(\alpha)M(\alpha)} P^+(\alpha) - \frac{F^-(b, \alpha)}{ik\eta} = -b \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[f_m - i\alpha g_m] [J_m Y_1(K_m b) - Y_m J_1(K_m b)]}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \quad (15)$$

(15) ifadesinde  $Jm = J(am)$ ,  $Ym = Y(am)$  ve  $Km = K(am)$  olarak tanımlanmıştır.

### 3. Wiener-Hopf Denkleminin Çözümü

Bu aşamada amacımız (15) denkleminde  $P^+(\alpha)$  fonksiyonunu çözmektir. Bunun için atılacak ilk adım (9e) ve (13b)'de tanımlanan  $M(\alpha)$  ve  $N(\alpha)$  çekirdek fonksiyonlarının (+) ve (-) tipten iki fonksiyonun çarpımı şeklinde aşağıdaki gibi yazmaktır:

$$M(\alpha) = M^+(\alpha)M^-(\alpha) \quad (16a)$$

ve

$$N(\alpha) = N^+(\alpha)N^-(\alpha). \quad (16b)$$

Buradaki  $M^-(\alpha)$ ,  $N^-(\alpha)$  fonksiyonları  $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$  alt yarı-düzlemde,  $M^+(\alpha)$ ,  $N^+(\alpha)$  fonksiyonları da  $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$  üst yarı-düzlemde regüler ve sıfırları olmayan fonksiyonlardır.

$M^+(\alpha)$  ve  $N^+(\alpha)$  fonksiyonlarının açık ifadeleri [8] de açıklanan yöntem uyarınca:

$$M^+(\alpha) = \sqrt{M(0)} \exp \left\{ \frac{i\alpha(b-a)}{\pi} \left[ 1 - C - \ln \left( \frac{|\alpha|(b-a)}{\pi} \right) + i\frac{\pi}{2} \right] \right\} \times \prod_{m=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{\alpha}{\alpha_m} \right) \exp \left( \frac{i\alpha(b-a)}{m\pi} \right), \quad (17a)$$

$$N^+(\alpha) = \sqrt{N(\alpha)} \prod_{i=1}^L \left( \frac{\beta_i - \alpha}{\beta_i + \alpha} \right)^{1/2} \times \exp \left\{ \frac{i(b-a)\alpha}{\pi} \ln \left( \frac{2|\alpha|}{k} \right) \right\} \times \exp \left\{ \frac{K(\alpha)(b-a)}{\pi} \ln \left( \frac{\alpha + iK(\alpha)}{k} \right) + \frac{1}{2} i(b-a)K(\alpha) + q(\alpha) \right\}, \quad (17b)$$

$$q(\alpha) = \frac{1}{2} \mathcal{P} \int_0^{\infty} K w(w) \ln \left[ \frac{\sqrt{k^2 - w^2} + \alpha}{\sqrt{k^2 - w^2} - \alpha} \right] dw, \quad (17c)$$

$$K w(w) = \frac{(b-a)}{\pi} + \frac{1}{2\pi i} [Bw(w) + Bw(we^{i\pi})], \quad (17d)$$

$$Bw(w) = \frac{bH_1^{(1)}(wb)}{H_0^{(1)}(wb)} + \frac{[H_1^{(1)}(wb) - H_0^{(1)}(wb)] \left[ \begin{matrix} T_{00}(w) & T_{01}(w) \\ T_{10}(w) & T_{11}(w) \end{matrix} \right] \left[ -\frac{ik\eta a}{w} + a \right]}{[H_1^{(1)}(wb) - H_0^{(1)}(wb)] \left[ \begin{matrix} T_{00}(w) & T_{01}(w) \\ T_{10}(w) & T_{11}(w) \end{matrix} \right] \left[ \frac{w}{ik\eta} \right]}, \quad (17e)$$

ve

$$T_{ij}(w) = Y_i(wb)J_j(wa) - Y_j(wa)J_i(wb), \quad i, j = 0, 1 \quad (17f)$$

olarak bulunur. (17a) denklemindeki  $C$  Euler sabiti olup değeri  $C = 0.57721\dots$  dir. (17b) denklemindeki  $\pm\beta_i$  ise  $N(\alpha)$  fonksiyonunun kökleridir. Ayrıca (17c) denkleminde  $\mathcal{P}$  harfi ile tekil integralin Cauchy esas değerinin gözönüne alındığı belirtilmiştir.  $M^{\pm}(\alpha)$  and  $N^{\pm}(\alpha)$  fonksiyonlarının  $|\alpha| \rightarrow \infty$  için geçerli asimptotik ifadelerinin aşağıdaki gibi olduğu kolayca gösterilebilir:

$$M^{\pm}(\alpha) = |\alpha|^{1/2} e^{(b-a)|\alpha|}, \quad N^{\pm}(\alpha) = e^{-(b-a)|\alpha|}. \quad (17g)$$

Bu aşamada (15) denklemini  $M^-(\alpha)N^-(\alpha)$  ile çarparsak

$$\frac{P^+(\alpha)}{N^+(\alpha)M^+(\alpha)} - M^-(\alpha)N^-(\alpha) \frac{F^-(b, \alpha)}{ik\eta} = -bM^-(\alpha)N^-(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[f_m - i\alpha g_m] [J_m Y_1(K_m b) - Y_m J_1(K_m b)]}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \quad (18)$$

elde edilir. (18) ifadesinin sol tarafındaki ilk iki terim kompleks  $\alpha$ -düzleminin sırasıyla üst ( $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ ) ve alt ( $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ ) yarılarında regüler fonksiyonlardır. Aynı denklemin

sağ tarafındaki terimin her iki yarım düzlemde de tekillikleri vardır. Bu durumda, önce sağ yandaki bu terime Wiener-Hopf ayrıştırması ve sonrasında (18) ifadesine Liouville teoreminin uygulanmasıyla

$$\frac{P^+(\alpha)}{N^+(\alpha)M^+(\alpha)} = b \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[f_m + i\alpha_m g_m][J_n Y_1(K_n b) - Y_n J_1(K_n b)] N^+(\alpha_m) M^+(\alpha_m)}{2\alpha_m (\alpha + \alpha_m)} \quad (19)$$

elde edilir.

#### 4. Açılım Katsayılarının Hesabı

$\rho \in (a, b)$ ,  $z < 0$  bölgesinde tanımlı olan  $u_3(\rho, z)$  fonksiyonunu dalga kılavuzu modları cinsinden

$$u_3(\rho, z) = c_0 \frac{e^{-ikz}}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [J_1(\xi_n \rho) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_1(\xi_n \rho)] e^{-i\xi_n z} \quad (20a)$$

olarak yazabiliriz. Burada  $\xi_n$ 'ler aşağıdaki denklemin kökleri olup,

$$J_0(\xi_n b) Y_0(\xi_n a) - J_0(\xi_n a) Y_0(\xi_n b) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20b)$$

$\beta_n$ 'ler ise dalga kılavuzu modlarına ilişkin yayılma sabitleridir,

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \xi_n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20c)$$

ve

$$\xi_0 = 0 \implies \beta_0 = k. \quad (20d)$$

(20a) denkleminin sağ yanındaki ilk terim kılavuz içerisinde gelen dalgaya ilişkin yansıyan alan ifadesidir. (6g,h) ile verilen süreklilik denklemleri (8c), (14) ve (20a) ile birlikte değerlendirildiğinde:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} g_m [J_0(K_m b) Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho) Y_0(K_m b)] \\ = \frac{1}{\rho} + \frac{c_0}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [J_1(\xi_n \rho) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_1(\xi_n \rho)] \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} f_m [J_0(K_m b) Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho) Y_0(K_m b)] \\ = \frac{ik}{\rho} - ik \frac{c_0}{\rho} - \sum_{n=1}^{\infty} i\beta_n c_n [J_1(\xi_n \rho) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_1(\xi_n \rho)] \end{aligned} \quad (21b)$$

elde edilir. (21a,b) denklemlerinin her iki yanını  $[J_0(K_\rho b) Y_1(K_\rho \rho) - J_1(K_\rho \rho) Y_0(K_\rho b)]$  ifadesi ile çarpılıp ilgili denklemler  $\rho$  ya göre  $\rho = a$  dan  $\rho = b$  ye integrali alırsa

$$\Delta_m g_m = (1 + c_0) I_m^{(1)} + I_m^{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\alpha_n^2 - \beta_n^2} I_n^{(3)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (22a)$$

$$\Delta_m f_m = ik(1 - c_0) I_m^{(1)} - I_m^{(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\beta_n c_n}{\alpha_n^2 - \beta_n^2} I_n^{(3)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (22b)$$

elde edilir. Burada  $\Delta_m$  (11c,d) ile,  $I_m^{(1)}$ ,  $I_m^{(2)}$  ve  $I_n^{(3)}$  ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$I_m^{(1)} = \int_a^b [J_0(K_m b) Y_1(K_m \rho) - J_1(K_m \rho) Y_0(K_m b)] d\rho, \quad (23a)$$

$$I_m^{(2)} = K_m a [J_0(K_m a) Y_0(K_m b) - J_0(K_m b) Y_0(K_m a)], \quad (23b)$$

$$I_n^{(3)} = J_1(\xi_n a) Y_0(\xi_n b) - J_0(\xi_n b) Y_1(\xi_n a). \quad (23c)$$

(19) denkleminde  $\alpha = \alpha_m$  koyar ve (11a) ile birlikte değerlendirirsek:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi K_m b}{2} [f_m - i\alpha_m g_m] \Delta_m \\ = N^+(\alpha_m) M^+(\alpha_m) b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[f_n + i\alpha_n g_n] N^+(\alpha_n) M^+(\alpha_n)}{2\alpha_n (\alpha_m + \alpha_n)} I_n^{(4)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (24a)$$

$$I_n^{(4)} = J_n Y_1(K_n b) - Y_n J_1(K_n b), \quad (24b)$$

elde ederiz. Burada  $J_n = J(\alpha_n)$  ve  $Y_n = Y(\alpha_n)$  olarak tanımlanmıştır. (22a,b) ve (24a) denklemleri  $f_m$ ,  $g_m$  ve  $c_n$  ( $m = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots$ ) bilinmeyen sabitlerini belirlemeye yarayan sonsuz lineer cebirsel denklemler sistemini verir. Bu sonsuz denklemler sistemi açılım serilerinin bir sayıda kesilmesiyle yaklaşık olarak çözülür.

#### 5. Saçılan Alanın Hesabı ve Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde  $\rho \in (a, b)$ ,  $z < 0$  bölgesinde dominant moda ilişkin yansıma katsayısı ve  $\rho > b$  bölgesindeki ışılan alan hesaplanarak kılavuz boyutları ve empedans gibi parametrelerin saçılan alana etkisi grafikler ile gösterilecektir. Öncelikle  $\rho > b$  bölgesinde  $F(\rho, \alpha)$  fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü alınarak ışılan alanı elde edilir. (12c) ifadesinden

$$u_1(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{P^+(\alpha) H_0^{(1)}[K(\alpha)\rho] e^{-i\alpha z} d\alpha}{bK(\alpha) H_0^{(1)}[K(\alpha)b]} \quad (25)$$

bulunur. Burada  $L \text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$  şeridinde uzanan ve reel  $\alpha$ -eksenine paralel olan bir doğrudur.  $H_p^{(1)}[K(\alpha)\rho]$  fonksiyonunun  $k\rho \rightarrow \infty$  için asimptotik ifadesi

$$H_p^{(1)}[K(\alpha)\rho] = \sqrt{\frac{2}{\pi K(\alpha)\rho}} e^{i(K(\alpha)\rho - p\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \quad (26)$$

kullanılarak (25) denklemini yeniden düzenlenir ve integral endik iniş çizgisi yöntemi ile hesaplanır

$$u_1(r, \theta) = H(\theta) \frac{e^{ikr}}{kr}, \quad kr \gg 1 \quad (27)$$

$$H(\theta) = -\frac{1}{\pi b \sin \theta} \frac{P^+(-k \cos \theta)}{H_0^{(1)}[kb \sin \theta]} \quad (28)$$

elde edilir. Burada  $r$  ve  $\theta$  küresel koordinatları göstermektedir.

Son olarak (20a) ile verilen  $u_3(\rho, z)$  fonksiyonu,  $\rho \in (a, b)$ ,  $z < 0$  bölgesinde saçılan alan ifadesini göstermektedir. Bu ifadenin ilk terimi kılavuz içerisinde yayılan dominant TEM moduna ilişkin yansıyan alan terimidir ve  $c_0$  katsayısı yansıyan alanın genliğini göstermektedir.

Aşağıdaki grafikler eşksenli dalga kılavuzunun iç ve dış iletkenin yarıçapları ve iç iletkenin dışa uzayan parçasının yüzey empedans değerinin yansıyan ve rasyasyon alanına etkilerini göstermektedir.

Şekil-2'de yansıyan alanın genliğinin,  $|c_0|$ , dalga sayısı ile değişim grafiği,  $b = 1.4$  ve  $\eta = 0.8i$  sabit alınıp  $a$ 'nın üç farklı değeri için verilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi belli bir frekanstan önce gelen dalganın tamamı geriye yansırken ( $|c_0| = 1$ ), kesim frekansını aştıktan sonra yansıma katsayısı hızla azalmaya başlamaktadır.  $a$ 'nın değeri arttıkça kesim frekans değerinin de arttığı görülmektedir.

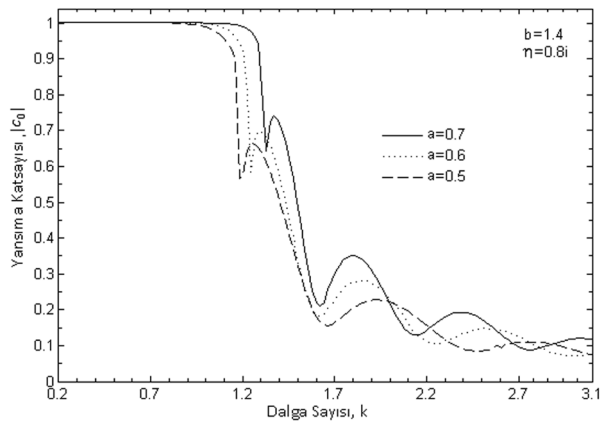
Şekil-3'te yansıyan alanın genliğinin,  $|c_0|$ , dalga sayısı ile değişim grafiği  $a = 0.7$  ve  $\eta = 0.8i$  sabit alınıp  $b$ 'nin üç farklı değeri için verilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi belli bir frekanstan önce gelen dalganın tamamı geriye yansırken ( $|c_0| = 1$ ), kesim frekansını aştıktan sonra yansıma katsayısı hızla azalmaya başlamaktadır.  $b$ 'nin değeri ile kesim frekansının değerinin ters orantılı olduğu görülmektedir.

Şekil-4'te ise üç farklı  $\eta$  (yüzey empedansı) değeri için yansıyan alanın genliğinin,  $|c_0|$ , dalga sayısı ile değişim grafiği verilmiştir. Hesaplamalarda  $b = 1.7$  ve  $a = 0.7$  sabit alınmıştır. Grafikten görüldüğü gibi belli bir frekanstan önce gelen dalga'nın tamamı geriye yansırken ( $|c_0| = 1$ ), kesim frekansını aştıktan sonra yansıma katsayısı hızla azalmaya başlamaktadır.  $\eta$ 'nin değeri arttıkça kesim frekans değerinin de arttığı görülmektedir.

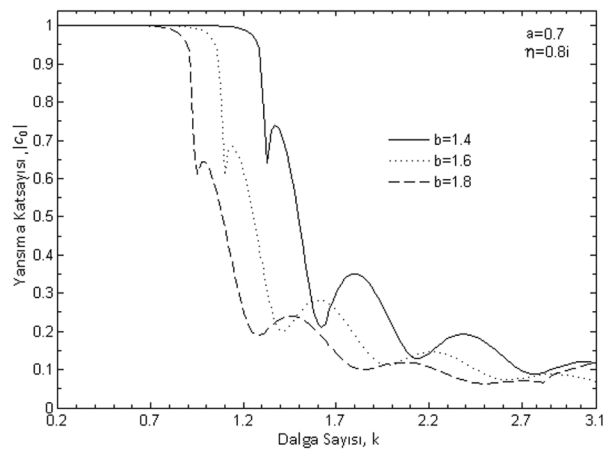
Şekil-5'te ışılan alanın (28) denklemi ile elde edilen asimptotik ifadesinin,  $20 \log |H(\theta)|$ , gözlem açısıyla değişimi üç farklı  $a$  (iç yarıçap) değeri için görülmektedir. Hesaplamalarda  $b = 1.4$ ,  $k = 2.0$  ve  $\eta = 1.0i$  sabit alınmıştır.  $a$ 'nın değeri arttıkça ışılan alanın genlik değerinin tüm gözlem açılarında azaldığı görülmüştür.

Şekil-6'da ise üç farklı  $b$  (dış yarıçap) değeri için ışılan alan genliğinin,  $20 \log |H(\theta)|$ , gözlem açısıyla değişim grafiği görülmektedir. Hesaplamalarda  $a = 0.7$ ,  $k = 2.0$  ve  $\eta = 1.0i$  sabit alınmıştır.  $b$ 'nin değeri arttıkça ışılan alanın değerinin gözlem açısı  $\theta \in (0^\circ - 60^\circ)$  bölgesinde artarken  $\theta \in (60^\circ - 180^\circ)$  aralığında azaldığı görülmüştür.

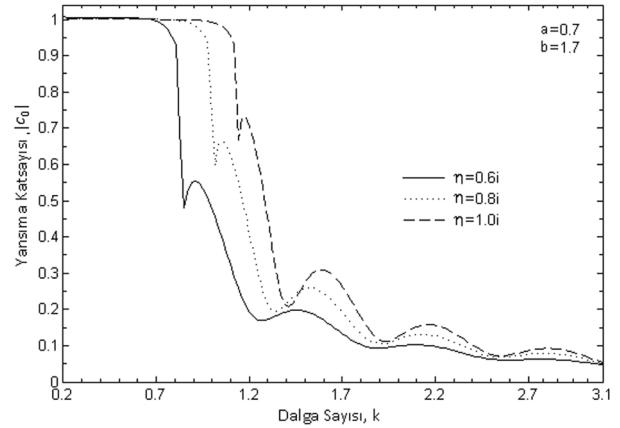
Şekil-7'de üç farklı  $\eta$  (yüzey empedansı) değeri için ışılan alan genliğinin,  $|H(\theta)|$ , gözlem açısıyla değişim grafiği kutupsal koordinat sisteminde verilmiştir. Hesaplamalarda  $a = 0.7$ ,  $b = 1.6$  ve  $k = 3.0$  sabit alınmıştır.  $\eta$ 'nin değeri arttıkça ışılan alanın maksimum olduğu açı değeri artarken genliğinin değerinin ise azaldığı gözlenmiştir.



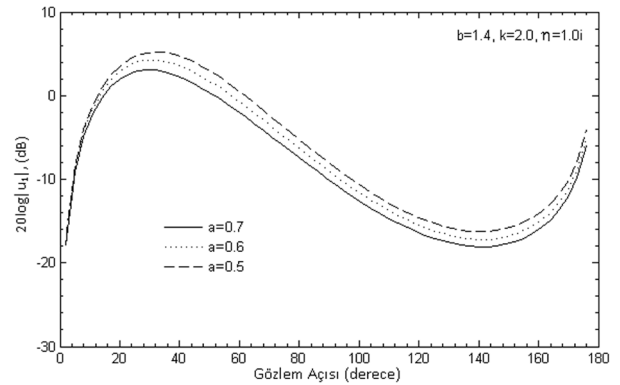
Şekil-2. İç iletkenin yarıçapının ( $a$ ), yansıma katsayısı  $|c_0|$ 'a etkisi



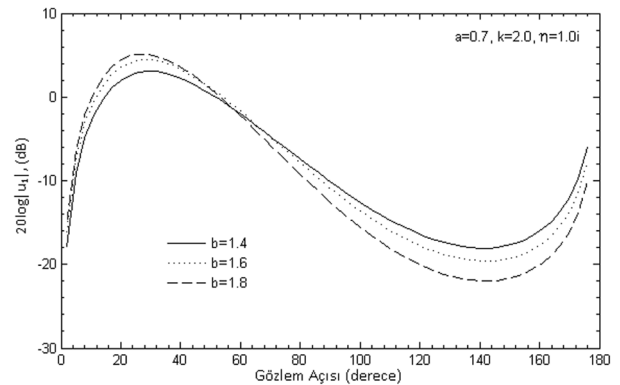
Şekil-3. Dış iletkenin yarıçapının ( $b$ ), yansıma katsayısı  $|c_0|$ 'a etkisi



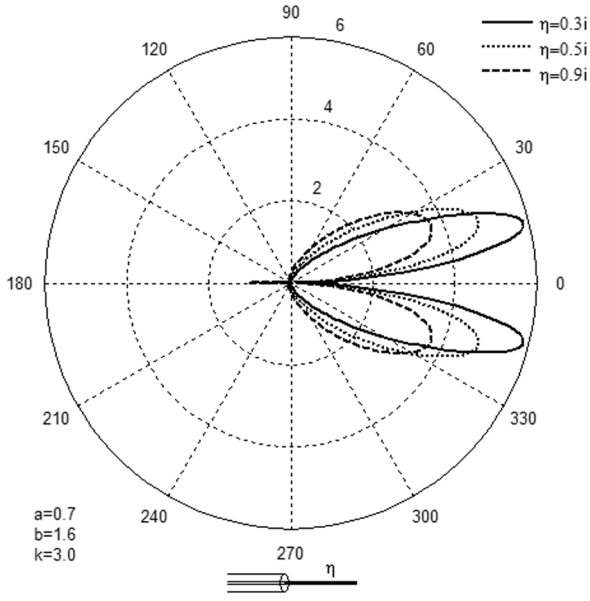
Şekil-4. Empedansın ( $\eta$ ), yansıma katsayısı  $|c_0|$ 'a etkisi



Şekil-5. İç iletkenin yarıçapının ( $a$ ), Radyasyon alanına etkisi



Şekil 6. Dış iletkenin yarıçapının ( $b$ ), Radyasyon alanına etkisi



Şekil 7. Empedansın ( $\eta$ ), Radyasyon alana etkisi.

## 6. Kaynaklar

- [1] Marcuvitz, N.: 'Waveguide Handbook' Sect. 4.15, New York, McGraw-Hill, 1951,
- [2] Papadopoulos, V.M.: 'Wave propagation in a coaxial system', Q. Appl. Math., 17, pp. 423-436, 1960
- [3] Wu, T.T.: 'Input admittance of infinitely long dipole antennas driven from coaxial lines', J. Math. Phys. 3, pp. 1298-1301, 1962
- [4] Andersen, J.B.: 'Metallic and Dielectric Antennas' Chap.2. Polyteknisk Forlag, Lyngby, Denmark, 1970
- [5] Bird, T.S.: 'TE<sub>11</sub> mode excitation of flanged circular coaxial waveguides with an extended centre conductor', IEEE Trans. Antennas and Propagat., AP 35, pp.1358 - 1366, 1987
- [6] Bird, T.S.: 'Exact solution of open-ended coaxial waveguide with centre conductor of infinite extent and applications', IEE Proceedings, Vol. 134, Pt. H, No. 5, 1987
- [7] Sneddon, I. H., 'The Use of Integral Transforms', Mc Graw Hill, New York, 1972
- [8] Mittra, R., and S.W. Lee, 'Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves', McMillan, New York, 1971