

$1/f^\alpha$ Gürültülerin Frekans Ölçekleme ile Üretimi

Generation of $1/f^\alpha$ Noise via Frequency Scaling

Mehmet Kerem Türkcan¹, Tayfun Akgül¹

¹Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü
İstanbul Teknik Üniversitesi
turkcan@itu.edu.tr, tayfunakgul@itu.edu.tr

Öz

Bu makalede, $1/f^\alpha$ gürültülerinin üretilmesi için yenilikçi bir yöntem önerilmektedir. $1/f$ gürültülerinin üretilmesinin, frekans-ölçekleme uzayındaki Dirac özilintili bir rassal sürecin ters dönüşümü üzerinden modellenbildiği gösterilmektedir. $1/f$ değişkeni $1/f^\alpha$ 'ya genelleştirilerek istenen için gürültü süreçlerinin oluşturulması sağlanmaktadır. Çeşitli α değerleri için üretilen örnek süreçlerin benzetim sonuçları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gürültü, $1/f$ gürültüsü, $1/f$ gürültü üretimi, ölçekleme-ile-değişmezlik, ölçek dönüşümü

Abstract

In this paper a novel method for $1/f^\alpha$ noise generation is proposed. Theoretical generation of $1/f$ noise is shown to be possible through the inverse transformation of a frequency scaling domain random process with Dirac delta autocorrelation. By substituting the $1/f$ variable with $1/f^\alpha$, generation of general noise is rendered possible. Finally, simulation results for different α values are presented.

Keywords: Noise, $1/f$ noise, $1/f$ noise generation, scale invariance, scale transform

1. Giriş

$1/f^\alpha$ gürültüsü, ilkin Johnson tarafından 1925 yılında gösterilmiş [1], sonrasında yarıiletken fiziği [1], [2], nöral aktivite [3], müzik [4], insanların zaman algısı [5], jeosinyaller [6], [7] ve ağ trafiği [8] gibi bir çok uygulamada ele alınmıştır. Bu tür gürültüleri modellemek amacıyla da kendini organize eden kritiklik [9], kesirli Brown hareketi [10], [11], tersinilebilir Markov zinciri [12] ve doğrusal olmayan stokastik diferansiyel denklemler [13] gibi bir çok yaklaşım önerilmiştir.

Bir $1/f^\alpha$ gürültüsü, güç spektral yoğunluğu $S_x(f)$,

$$S_x(f) \sim \frac{\sigma^2}{|f|^\alpha} \quad (1)$$

bağıntısıyla modellenen bir gürültüdür. Burada, α spektral üstel, σ^2 sabit değişinti değeri ve \sim istatistiksel denkliği ifade etmektedir [14]. Böyle bir sürecin özbenzeşimli (fraktal) yapısı gözönüne alındığında, özbenzeşimli süreçlerin ölçekleme

ile-değişmezlik özelliği sayesinde, süreç için ölçek-frekans uzayında bir üretim modeli fikri oluşturulabilir. Ölçek-frekans uzayından frekans uzayına geçiş $f > 0$ için

$$X(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(c) \frac{e^{j \ln(f^c)}}{\sqrt{f}} dc \quad (2)$$

ile gösterilebilen bir ters frekans-ölçek dönüşümü ile gerçekleştirilir [15]. Bu denklemde, c ölçeği, f de frekansı tanımlar. $X(c)$, bir zaman süreci $x(t)$ 'nin Fourier dönüşümü olan $X(f)$ 'in ölçek dönüşümüdür.

Bu makalede önerilen $1/f^\alpha$ üretim yöntemi, literatürdeki üretim yöntemlerinden farklıdır. $1/f$ gürültüleri frekans-ölçek uzayında Dirac delta özilintili rassal süreçler şeklinde modellenip $1/f^\alpha$ 'ya genelleştirme yoluyla üretim sağlandığı gösterilmektedir.

2. Ters Ölçek Dönüşümü ile $1/f$ Gürültü Üretimi

Özilinti fonksiyonu $R(c_1, c_2) = \sigma^2 \delta(c_1 - c_2)$ (sabit bir σ^2 için) ve ters ölçek dönüşümü $X(f)$ ile simgelenen bir rassal süreç $X(c)$ 'nin güç spektral yoğunluğu, $\Omega < \infty$ olacak şekilde, $[-\Omega, \Omega]$ destekli bir frekans uzayı sinyali $X_\Omega(f)$ düşünülerek

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} E[X_\Omega(f) X_\Omega^*(f)] \\ &= \frac{1}{2\pi f} \frac{1}{2\Omega} \iint \sigma^2 \delta(c_1 - c_2) e^{j \ln(f^{c_1 - c_2})} dc_1 dc_2 \\ &= \frac{\sigma^2 / 2\pi}{f} \end{aligned} \quad (3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $E[\cdot]$ beklenen değeri göstermektedir. Bu güç spektral yoğunluğu terimi, (1)'de verilen tanıma uygundur. (2) nolu denklemdeki f 'nin yerine f^α konulmasıyla

$$X_\alpha(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(c) \frac{f^{\alpha jc}}{f^{\alpha/2}} dc \quad (4)$$

ifadesi elde edilir; ve bu ifade, $1/f^\alpha$ süreçlerinin üretilmesinde kullanılabilir. Beklendiği üzere ve [1]'de de açıklandığı gibi, böyle bir dönüşüm f^α yerine f üzerinde çalışan bir

gibi, böyle bir dönüşüm f^α yerine f üzerinde çalışan bir ölçek dönüşümüne eş düşmektedir. (4) numaralı denklem için, (3)'teki işlemler tekrarlanırsa,

$$S_{X_\alpha}(f) = \frac{\sigma^2/2\pi}{f^\alpha} \quad (5)$$

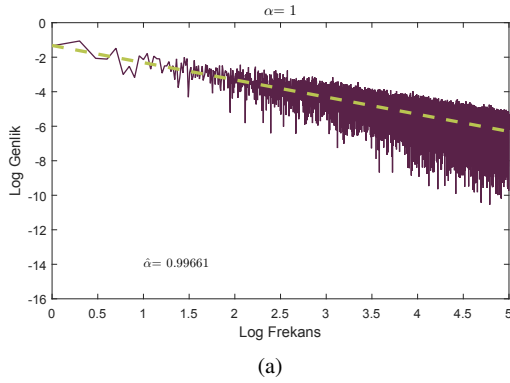
şeklinde bir güç yasası sürecine karşılık düşen spektral güç yoğunluğu elde edilebilir.

3. Benzetim Sonuçları

Benzetim için, yukarıda ifade edilen güç yasasını sağlayan süreçlerin hesaplanması ayrı zamanda gerçekleştirilir. Şöyle ki, (2) nolu denklemde f , e^p ile değiştirilirse

$$X(e^p) = \frac{e^{-p/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(c)e^{jcp} dc \quad (6)$$

ifadesi elde edilir. Açık ki, denklemin sağ tarafındaki integral ters Fourier dönüşümüdür. Bu ters frekans-ölçek dönüşümünün hesaplanması, ayrı zamanda bir ters Fourier dönüşümü alınmasına denk olacaktır. p noktaları eş aralıklıysa, e^p noktaları üstel dağılımlı olacaktır. Eğer frekans uzayının da eş aralıklı olması isteniyorsa, aradeğerlemeye ve yeniden eş örnekleme ihtiyacı vardır. e^p noktaları arasındaki en büyük fark, p büyüdükçe artacağından, istenen eş örnekleme periyotunun bu farkı geçmemesini sağlamak, uygun bir örnekleme için gereklidir [16].



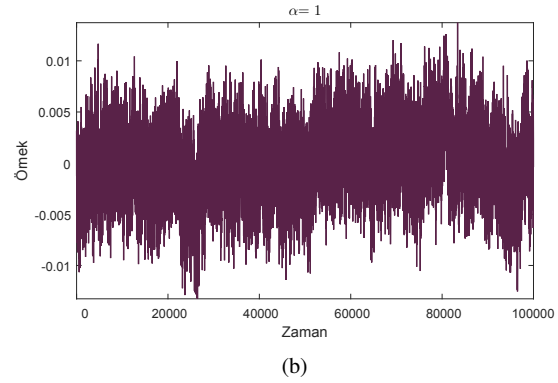
$1/f^\alpha$ süreçlerinin, seçilen bir α değeri için zaman uzayındaki benzetimlerini elde edebilmek için, sıfır ortalamalı, birim değışintili, Dirac delta özilintiye sahip bir Gauss gürültü süreci ile başlanabilir. Ardından, geri dönüşüm kullanılarak $X(f)$ elde edilebilir ve ters Fourier dönüşümü ile de bu süreçlere karşılık düşen zaman sinyali $x(t)$ elde edilir. Üretilen süreçlerin α değerinin seçilen değerlere yakınlığı (fikir vermesi bakımından) kestirmek için (3) denkleminin iki tarafının logaritması alınarak, bağıntının doğrusallaştırılması ve çıktılarının doğrusal bir eğriye uydurulması yeterlidir. Burada, $\hat{\alpha}$ kestirim değeri, s_i ve y_i , sırayla frekansın ve güç yoğunluğunun i indisli değerlerine, n de toplam indis sayısına karşılık gelecek şekilde, en küçük kareler yöntemiyle

$$\hat{\alpha} = - \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n s_i^2 - \sum_{i=1}^n s_i \sum_{i=1}^n s_i y_i}{n \sum_{i=1}^n s_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n s_i \right)^2} \quad (7)$$

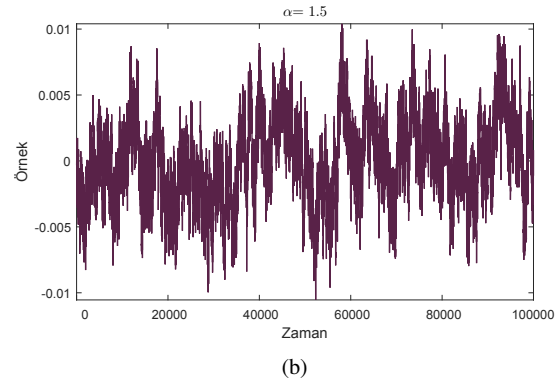
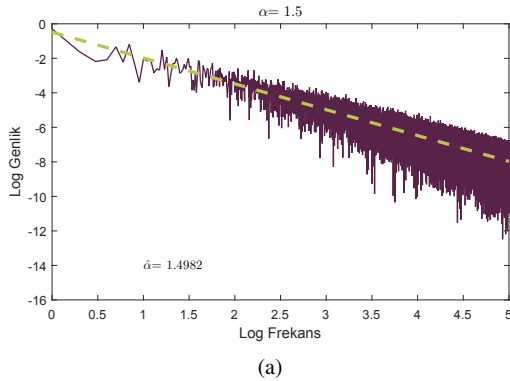
eşitliği kullanılarak hesaplanabilir.

Benzetimlerin tümünde, zaman uzayı süreci için 10^5 örnek alınıp hem frekans hem de zaman süreçleri, birim enerji ve sıfır ortalamaya sahip olacak şekilde ölçeklenmiştir.

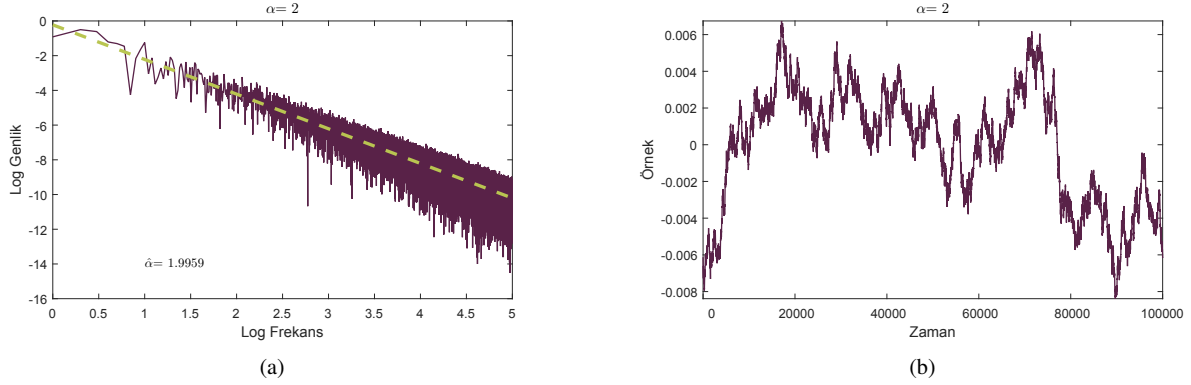
α değeri 1'e karşılık düşen $1/f^\alpha$ gürültülere pembe gürültü denir [17]. Şekil 1(a)'da, $\alpha = 1$ alınarak, (6) kullanılarak üretilmiş (kestirim $\hat{\alpha}$ 'sı 0.99661 bulunan) bir pembe gürültü sürecinin log-log spektrum grafiği gösterilmiş ve Şekil 1(b)'de zaman uzayında oluşturulan pembe gürültü süreci verilmiştir.



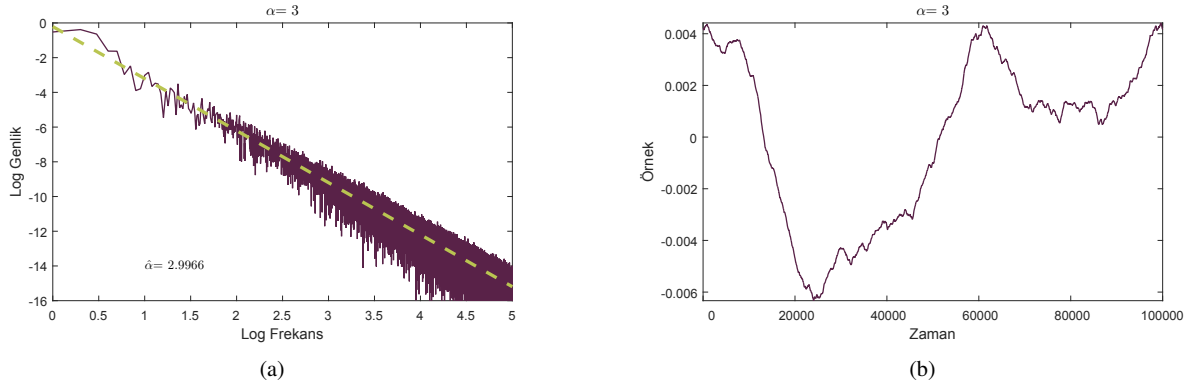
Şekil 1: (a) $\alpha = 1$ için üretilmiş bir pembe gürültü sürecinin log-log spektrum grafiği; (b) pembe gürültünün zamandaki değişimi.



Şekil 2: (a) $\alpha = 1.5$ için üretilmiş gürültü sürecinin log-log spektrum grafiği; (b) sürecin zamandaki değişimi.



Şekil 3: (a) $\alpha = 2$ için üretilen bir kahverengi gürültü sürecinin log-log spektrum grafiği; (b) kahverengi gürültü sürecinin zamandaki değişimi.



Şekil 4: (a) $\alpha = 3$ için üretilen bir siyah gürültü sürecinin log-log spektrum grafiği; (b) siyah gürültü sürecinin zamandaki gösterimi.

Şekil 2(a)'da, $\alpha = 1.5$ seçilmesiyle, (6) nolu denklemden üretilmiş (doğrusal kestirimle $\hat{\alpha}$ 'sı 1.4982 ölçülmüş) bir gürültü sürecinin log-log spektrumu verilmiş, zaman uzayında oluşturulan $1/f^{1.5}$ gürültüsünün süreci de Şekil 2(b)'de gösterilmiştir.

α değeri 2'ye karşılık düşen $1/f^\alpha$ gürültülere kahverengi gürültü denir [17]. (6) nolu bağıntı kullanılarak üretilmiş (kestirimi $\hat{\alpha} = 1.9959$ bulunan) bir kahverengi gürültü sürecinin log-log spektrumu Şekil 3(a)'da verilmiş, zaman uzayında üretilen kahverengi gürültü süreci Şekil 3(b)'de çizdirilmiştir. Son örnek, siyah gürültü diye adlandırılan [17], α değeri 2'den büyük bir $1/f^\alpha$ sürecine ilişkindir. Şekil 4(a)'da, $\alpha = 3$ seçilerek, (6) nolu bağıntı kullanılarak üretilmiş (kestirim değeri $\hat{\alpha} = 2.9966$ bulunan), bir siyah gürültü sürecinin log-log spektrumu gösterilmiştir. Bu sürecin zaman uzayındaki karşılığı Şekil 4(b)'de çizdirilmiştir.

4. Sonuç

Bu makalede ters ölçek dönüşümü kullanılarak $1/f$ gürültülerinin üretilmesi için yeni bir yöntem önerilmiş, üretim bağıntıları verilmiş, çeşitli spektral üstel değerler ($\alpha = 1, 1.5, 2, 3$) için benzetim örnekleri sunulmuştur. Farklı uygulamalarda ve/veya benzetim çalışmalarında kullanılabilen $1/f^\alpha$ gürültülerinin pratik bir şekilde bu yöntemle üretilebileceği gösterilmiştir.

5. Kaynaklar

- [1] J. B. Johnson, "The schottky effect in low frequency circuits," *Physical Review*, 26, 1, p. 71, 1925.
- [2] H. Wong, "Low-frequency noise study in electron devices: review and update," *Microelectronics Reliability*, 43, 4, pp. 585–599, 2003.
- [3] P. Allegrini, D. Menicucci, R. Bedini, L. Fronzoni, A. Gemignani, P. Grigolini, B. J. West, ve P. Paradisi, "Spontaneous brain activity as a source of ideal $1/f$ noise," *Physical Review E*, 80, 6, 2009.
- [4] R. F. Voss ve J. Clarke, "1/f noise in music and speech," *Nature*, 258, pp. 317–318, 1975.
- [5] D. Gilden, T. Thornton, M. Mallon et al., "1/f noise in human cognition," *Science*, pp. 1837–1837, 1995.
- [6] A. Mao, C. G. Harrison, ve T. H. Dixon, "Noise in GPS coordinate time series," *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 104, B2, pp. 2797–2816, 1999.
- [7] S. Baykut, T. Akgu 1, ve S. Ergintav, "Estimation of spectral exponent parameter of $1/f$ process in additive white background noise," *EURASIP Journal on advances in signal processing*, 2007, 15, 2007.

- [8] T. Akgül, S. Baykut, M. Erol Kantarcı, ve S. F. Oktug, "Periodicity-based anomalies in self-similar network traffic flow measurements," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 60, 4, pp. 1358–1366, 2011.
- [9] P. Bak, C. Tang, ve K. Wiesenfeld, "Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise," *Physical Review Letters*, 59, 4, pp. 381–384, 1987.
- [10] B. B. Mandelbrot ve J. W. Van Ness, "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications," *SIAM review*, 10, 4, pp. 422–437, 1968.
- [11] P. Flandrin, "Wavelet analysis and synthesis of fractional Brownian motion," *IEEE Transactions on Information Theory*, 38, 2, pp. 910–917, 1992.
- [12] S. Erland ve P. E. Greenwood, "Constructing $1/\omega^\alpha$ noise from reversible Markov chains," *Physical Review E*, 76, 3, 2007.
- [13] B. Kaulakys, J. Ruseckas, V. Gontis, ve M. Alaburda, "Nonlinear stochastic models of $1/f$ noise and power-law distributions," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 365, 1, pp. 217–221, 2006.
- [14] G. W. Wornell ve C. F. Gaumond, "Signal processing with fractals: a wavelet based approach," *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105, 1, 1999.
- [15] L. Cohen, "The scale representation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41, 12, pp. 3275–3292, 1993.
- [16] A. De Sena ve D. Rocchesso, "A fast Mellin and scale transform," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2007.
- [17] M. R. Schroeder, *Fractals, chaos, power laws: Minutes from an infinite paradise*. Courier Corporation, 2012.



Mehmet Kerem Türkcan

1992 yılında İstanbul'da doğmuştur. 2011 yılından beri İstanbul Teknik Üniversitesi'nin Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nde lisans öğrenimini sürdürmektedir.



Tayfun Akgül

Lisans ve yüksek lisans derecelerini, sırasıyla 1985 ve 1988 yıllarında İTÜ Elektronik ve Haberleşme Bölümü'nde tamamladı. Doktorasını 1994 yılında Pittsburgh Üniversitesi, Elektrik Mühendisliği Bölümü'nde bitirdi. 1986-1988 arası TÜBİTAK Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü'nde, Eylül 1988'den itibaren Çukurova Üniversitesi'nde çalışmaya başladı. 1989-1994 arasında Pittsburgh Üniversitesi'nde doktora çalışması yaptı. 1996'da Çukurova Üniversitesi'nde Doçent oldu. 1997-1999 tarihleri arasında Drexel Üniversitesi'nde bulundu. 1999-2002 arasında TÜBİTAK-MAM'da Başuzman Araştırmacı unvanıyla çalıştı. Temmuz 2002'de İTÜ'ye Profesör ünvanıyla atandı. Halen İTÜ Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nde görev yapmaktadır. *International Journal of Information and Communication Engineering* ve *Elektrik Mühendisleri (EMO) Dergisi* ile *EMO Bilimsel Dergi*'nin yayın kurulları üyesidir. IEEE'nin çeşitli kurullarında görev yaptı. Sinyal ve görüntü işleme alanında (yakın zamanda özellikle "yüz tanıma" konusunda) araştırmalar yapmaktadır.