Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi
Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **18** (2018) 011304 (156-161) AKU J. Sci. Eng. **18** (2018) 011304(156-161)
DOİ: 10.5578/fmbd.66812

Araştırma Makalesi / Research Article

Gecikme Argümentli Rayleigh Tipi Denklem için Periyodik Çözümlerin Varlığı Üzerine

Omer Acan
Siirt Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Siirt.
e-posta: acan_omer@siirt.edu.tr

Geliş Tarihi:08.11.2016 ; Kabul Tarihi:13.04.2018

Anahtar kelimeler
Rayleigh Denklemi; Periyodik Çözümler; Gecikme Argümenti; Varlık; Örtüşen Derece.

Özet

Bu çalışmada,

$$\psi''(t)+f(t,\psi'(t))\psi'(t)+g(t,\psi(t-\vartheta(t)))\psi(t-\vartheta(t))=0$$

formundaki gecikme argümentli Rayleigh tipi denklem ele alınmaktadır. Bu denklemin T-periyodik çözümlerinin varlığı üzerine yeni sonuçlar elde edilmektedir. Bu sonuçlar elde edilirken örtüşen derece teorisi kullanılmaktadır.

On The Existence of Periodic Solutions For Rayleigh-Type Equation With a Deviating Argument

Keywords
Rayleigh Equation; Periodic Solutions; Deviating Argüment; Existence; Coincidence Degree.

Abstract

In this paper, we discusse Rayleigh-type equation with a deviating argument of the form

$$\psi''(t)+f(t,\psi'(t))\psi'(t)+g(t,\psi(t-\vartheta(t)))\psi(t-\vartheta(t))=0.$$

New results are obtained on the existence of T-periodic solutions for this equation. In order to obtain these results, the coincidence degree is used.

1. Giriş

Gecikmeli ve gecikmesiz Rayleigh tipi denklemlerin dinamik davranışları geniş bir şekilde çalışılmıştır. Fizik, mekanik, mühendislik teknik alanları ve benzerleri gibi pek çok alanda uygulamaları nedeniyle halen araştırılmaktadır. Son yıllarda, gecikmeli ve gecikmesiz Rayleigh denklemi ve Rayleigh tipi denklemler için periyodik çözümlerin varlığı bazı araştırmacılar tarafından incelenmiştir (Acan 2016, Burton 1985, Deimling 1985, Degla 1997, Gaines and Mawhin 1977, Huang et al. 2007, Li and Huang 2008, Liang 2012, Liu 2008, Liu 2009, Liu and Huang 2006, Lu and Ge 2004a, Lu and Ge 2004b, Lu et al. 2004, Peng et al. 2006, Wang and Shao 2010, Xiong et al. 2007, Yu et al. 2009, Zhou and Tang 2007a, Zhou and Tang 2007b, Zhou and Tang 2008).

$$\psi''(t)+f(\psi'(t))+g(\psi(t-\vartheta(t)))=\rho(t) \quad (1)$$

(1) formundaki gecikme argümentli Rayleigh denklemi ile ilgili çalışmalar literatürde mevcuttur (Lu and Ge 2004b, Lu et al. 2004, Zhou and Tang 2007).

$$\psi''(t)+f(t,\psi'(t))+g(t,\psi(t-\vartheta(t)))=\rho(t) \quad (2)$$

(2) tipindeki gecikme argümentli Rayleigh denklemi ile ilgili çalışmalar literatürde vardır (Liu and Huang 2006, Zhou and Tang 2008). Söz konusu (1) ve (2)

denklemlerinin T-periyodik çözümlerinin varlığı için yeterli koşullar çalışılmıştır. Bu sonuçlar elde edilirken örtüşen derece teorisi kullanılmıştır (Liu and Huang 2006, Lu and Ge 2004b, Lu et al. 2004, Zhou and Tang 2007b, Zhou and Tang 2008).

Bu çalışmanın temel amacı,

$$\begin{aligned}\psi''(t)+f\left(t,\psi'(t)\right)\psi'(t)\\ +g\left(t,\psi\left(t-\vartheta(t)\right)\right)\psi\left(t-\vartheta(t)\right)=0\end{aligned} \tag{3}$$

formundaki gecikme argümentli Rayleigh tipi denklem için T-periyodik çözümlerin varlığı için gerekli şartları belirlemektir. (1) ve (2) başta olmak üzere Acan (2016), Burton (1985), Deimling (1985), Degla (1997), Gaines ve Mawhin (1977), Huang vd. (2007), Li ve Huang (2008), Liang (2012), Liu (2008), Liu (2009), Liu ve Huang (2006), Lu ve Ge (2004a), Lu ve Ge (2004b), Lu vd. (2004), Peng vd. (2006), Wang ve Shao (2010), Xiong vd. (2007), Yu vd. (2009), Zhou ve Tang (2007a), Zhou ve Tang (2007b), Zhou ve Tang (2008) ve bunların referanslarındaki kaynaklarda çalışılmış olan gecikme argümentli Rayleigh tipi denklemlerin T-periyodik çözümün varlığını elde etmek için kullanılan şartlar (3) denklemine uyumlu olmadıkları için bu çalışmadaki gerekli şartlar literatüre yeni katkılar sağlayacaktır. Burada $\vartheta:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ ve $f,g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ sürekli fonksiyonlar, T>0 periyodu ile ϑ fonksiyonu T-periyodik, f ve g fonksiyonları ise ilk değişkene göre T-periyodiktir.

Çalışmamızda, ana bulgularda kullanacağımız süreklilik teoremi ve temel tanımlar verilmiştir. Daha sonra gecikme argümentli (3) Rayleigh tipi denkleminin T-periyodik çözümlerinin varlığı üzerine yeni sonuçlara ulaşılmıştır. Ana bulgulardaki konunun daha iyi anlaşılıp kavranabilmesi için bir örnek verilmiş ve edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. Ön Bilgiler

Bu bölümde ilk olarak, ana teoremimizin ispatında kullanacağımız aşağıdaki süreklilik teoremi (Gaines ve Mawhin (1977), 40. syf) ve homotopi değişmezlik teoremini verelim:

Lemma 2.1. *(*Süreklilik *Teoremi) (*Gaines and Mawhin 1977). X ve Y iki Banach uzayı olsun. $L:DomL\subset X\to Y$ sıfır indeksli Fredholm operatör ve $N:\overline{\Omega}\to Y$ operatörü $\overline{\Omega}$ üzerinde L-kompakt olduğunu kabul edelim. Ayrıca $\lambda\in(0,1)$ olmak üzere aşağıdaki şartların da sağlandığını kabul edelim.

(i) Her $\psi\in\partial\Omega\cap DomL$ için $L\psi\neq\lambda N\psi$,

(ii) Her $\psi\in\partial\Omega\cap KerL$ için $QN\psi\neq 0$,

(iii) Brower derecesi, $d\left[QN,\Omega\cap KerL,0\right]\neq 0$ dir.

O halde $L\psi=N\psi$ denkleminin $\overline{\Omega}$ da en az bir çözüme sahiptir.

Lemma 2.2. *(*Homotopi Değişmezlik *Teoremi) (Degla 1997).*

$$\phi:[0,1]\times\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^n$$

Sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca

$$\phi_\lambda(\psi)=\phi(\psi,\lambda)$$

Şeklinde tanımlansın. $p\in\mathbf{R}^n$ öyle ki

$$\phi(\psi,\lambda)\neq p\text{, her }\lambda\in[0,1]\text{ ve }\psi\in\partial\Omega.$$

Bu takdirde λ değişkeni $[0,1]$ aralığında değişirken

$$d\left[\phi_\lambda,\Omega,p\right]$$

derecesi sabittir.

Bu çalışma boyunca aşağıdaki gösterimleri kabul edeceğiz:

$$|\psi|_k=\left(\int_0^T|\psi(\tau)|d\tau\right)^{\frac{1}{k}},|\psi|_\infty=\max_{t\in(0,T)}|\psi(t)|.$$

Ayrıca

$$\|\psi\|_X=\max\left\{|\psi|_\infty,|\psi'|_\infty\right\}\text{ ve }\|\psi\|_Y=|\psi|_\infty.$$

normları ile tanımlanan

$$X=\left\{\psi\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}):her\,t\in\mathbf{R}\text{ }i\c{c}in\text{ }\psi(t+T)=\psi(t)\right\}$$

ve

$$Y=\left\{\psi\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}):her\,t\in\mathbf{R}\text{ }i\c{c}in\text{ }\psi(t+T)=\psi(t)\right\}$$

iki Banach uzayıdır.

$$DomL = \{\psi \in X : \psi'' \in C(\mathbf{R},\mathbf{R})\}$$

olmak üzere $L : DomL \subset X \to Y$ lineer operatörü her $\psi \in DomL$ için

$$L\psi = \psi'' \tag{4}$$

şeklinde tanımlansın. Aynı zamanda $N : X \to Y$ lineer olmayan operatörü

$$\begin{aligned} N\psi &= -f\left(t,\psi'(t)\right)\psi'(t) \\ &\quad - g\left(t,\psi\left(t-\vartheta(t)\right)\right)\psi\left(t-\vartheta(t)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

biçiminde tanımlansın. (4) ve (5) dikkate alındığında

$$L\psi = \lambda N\psi$$

operatör denklemi her $\lambda \in (0,1)$ için

$$\psi''(t) + \lambda \begin{bmatrix} f\left(t,\psi'(t)\right)\psi'(t) \\ +g\left(t,\psi\left(t-\vartheta(t)\right)\right)\psi\left(t-\vartheta(t)\right) \end{bmatrix} = 0 \tag{6}$$

biçimindeki denklem sistemini ifade eder. Yine (4) ve (5) den

$$KerL = \mathbf{R}$$

ve

$$\operatorname{Im} L = \left\{ \psi \in Y : \int_0^T \psi(\xi)\, d\xi = 0 \right\}$$

olduğu açıkça görülmektedir. Böylece L lineer operatörü sıfır indeksli Fredholm operatördür.

$P : X \to KerL$ ve $Q : Y \to Y$

izdüşüm operatörleri sırasıyla

$P\psi(t) = \psi(0) = \psi(T)$ ve $Q\psi(t) = \frac{1}{T}\int_0^T \psi(\xi)\, d\xi = 0$

olarak tanımlansın. Ayrıca

$$L_P = L|_{DomL \cap KerP} : DomL \cap KerP \to \operatorname{Im} L$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda Lu ve Ge (2004b)'e göre L operatörünün $DomL \cap KerP$ üzerine sınırlandırılışının tersi $L_P^{-1} = K_P$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} K_P\eta(t) &= -\frac{t}{T}\int_0^T (t-\xi)\, y(\xi)\, d\xi \\ &\quad + \int_0^t (t-\xi)\, y(\xi)\, d\xi \end{aligned} \tag{7}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (5) ve (7) den N operatörü $\overline{\Omega}$ üzerinde L-kompakt olur. Burada Ω kümesi X de herhangi bir açık kümedir.

3. Ana Bulgular

Bu bölümde (3) gecikme argümentli Rayleigh tipi denklem için T-periyodik çözümlerin varlığı için gerekli şartları veren teorem ve ispatı sunulacaktır.

Teorem 3.1. c^* pozitif bir sabit ve $r + S < 1/T$ eşitsizliğini sağlayan r, s, K negatif olmayan sabitler olsun. Ayrıca aşağıdaki şartların da sağlandığını kabul edelim:

(H_1) Her $t \in \mathbf{R}$ ve $|\psi| \geq c^*$ için $g(t,\psi) < 0$;

(H_2) Her $t \in \mathbf{R}$, $|\psi| \leq c^*$ için $g(t,\psi) < s$ ve

her $t \in \mathbf{R}$, $\psi \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ için $|f(t,\psi)| < r + \frac{K}{|\psi|}$

dir.

O halde (3) denklemi en az bir T-periyodik çözüme sahiptir.

İspat. (3) denklemi en az bir T-periyodik çözüme sahip olduğunu göstermek için Lemma 2.1 i uygulayacağız. Bunu yapmak için ilk olarak (6) denklem sisteminin mümkün olabilecek tüm T-periyodik çözümler kümesinin sınırlı olduğu iddası ispatlanacaktır. (6) denkleminin bir T-periyodik çözümü $\psi(t) \in X$ olsun. $a, b \in \mathbf{R}$ için

$$\psi(a) = \max_{t\in\mathbf{R}} \psi(t),\ \psi(b) = \min_{t\in\mathbf{R}} \psi(t)$$

olarak belirlensin. O zaman

$$\psi'(a) = \psi'(b) = 0,\ \psi''(a) \leq 0 \ ve\ \psi''(b) \geq 0$$

ifadelerine sahip oluruz. (6) den

$$g\left(a,\psi\left(a-\vartheta(a)\right)\right) \geq 0 \ ve\ g\left(b,\psi\left(b-\vartheta(b)\right)\right) \leq 0$$

olur. (H_1) den,

$$\psi\left(a-\vartheta(a)\right) < c^* \ ve\ \psi\left(b-\vartheta(b)\right) > -c^*$$

elde edilir. $\psi\left(t-\vartheta(t)\right)$ fonksiyonu $\mathbf{R}$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olduğundan bir $\zeta \in \mathbf{R}$ sabiti vardır öyle ki;

$$\psi\left(\zeta-\vartheta(\zeta)\right)<c^{*}$$

dir. $\bar{\zeta}\in[0,T]$ ve m bir tam sayı olmak üzere $\zeta-\vartheta(\zeta)=mT+\bar{\zeta}$ olsun. O zaman Schwarz eşitsizliği ve

$$|\psi(t)|=\left|\psi(\bar{\zeta})+\int_{\bar{\zeta}}^{t}\psi'(\xi)\,d\xi\right|\le c^{*}+\int_{0}^{T}\psi'(\xi)\,d\xi,\ t\in[0,T]$$

ifadesinden

$$|\psi|_{\infty}=\max_{t\in(0,T)}|\psi(t)|\le\sqrt{T}\,|\psi'|_{2}+c^{*} \qquad (8)$$

elde edilir.

$$\Omega_1=\left\{t:t\in[0,T],\ |\psi(t)|>c^{*}\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{t:t\in[0,T],\ |\psi(t)|\le c^{*}\right\}$$

olsun. $\psi(t)$ ifadesini (6) denklemi ile çarpıp 0 dan T ye integral alınırsa (H_1), (H_2), (8) ve Schwarz eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
|\psi'|_2^2&=-\int_0^T\psi''(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\\
&=\int_0^T\left\{\lambda\begin{bmatrix}f(\tau,\psi'(\tau))\psi'(\tau)\\+g(\tau,\psi(\tau-\vartheta(\tau)))\psi(\tau-\vartheta(\tau))\end{bmatrix}\right\}\psi(\tau)\,d\tau\\
&=\int_0^T\lambda f(\tau,\psi'(\tau))\psi'(\tau)\psi(\tau)\,d\tau\\
&\quad+\lambda\int_{\Omega_1}g(\tau,\psi(\tau-\vartheta(\tau)))\psi(\tau-\vartheta(\tau))\psi(\tau)\,d\tau\\
&\quad+\lambda\int_{\Omega_2}g(\tau,\psi(\tau-\vartheta(\tau)))\psi(\tau-\vartheta(\tau))\psi(\tau)\,d\tau\\
&\le r|\psi|_{\infty}\int_0^T|\psi'(\tau)|\,d\tau\\
&\quad+|\psi|_{\infty}T\left(\max\left\{|g(t,\psi)|:t\in\mathbf{R},|\psi|\le c^{*}\right\}|\psi|_{\infty}+K\right)\\
&\le r\left(\sqrt{T}|\psi'|_2+c^{*}\right)\sqrt{T}|\psi'|_2\\
&\quad+T\left(\sqrt{T}|\psi'|_2+c^{*}\right)^2\times\\
&\quad\left(\max\left\{|g(t,\psi)|:t\in\mathbf{R},|\psi|\le c^{*}\right\}|\psi|_{\infty}+K\right)\\
&\quad+K\left(\sqrt{T}|\psi'|_2+c^{*}\right)
\end{aligned} \qquad (9)$$

yazılabilir. $0\le r+s<1/T$ olduğundan dolayı (9) eşitsizliğinden

$$|\psi'|_2\le D_1\ \ ve\ \ |\psi|_{\infty}\le D_1$$

olacak şekilde bir pozitif D_1 sabiti vardır.

$$|\psi(a)|=\max_{t\in[0,T]}|\psi(t)|$$

olacak şekilde $a\in[0,T]$ olsun. O zaman $\psi'(a)=0$ olur.

$$\begin{aligned}
|\psi'|&=\left|\psi(a)+\int_a^t\psi''(\xi)\,d\xi\right|\\
&=|\psi(a)|+\int_a^t|\psi''(\xi)|\,d\xi\\
&=\int_0^T\left\{\lambda\begin{bmatrix}f(\tau,\psi'(\tau))\psi'(\tau)\\+g(\tau,\psi(\tau-\vartheta(\tau)))\psi(\tau-\vartheta(\tau))\end{bmatrix}\right\}\psi(\tau)\,dt\\
&\le\int_0^T|\psi''(\xi)|\,d\xi\\
&\le\int_0^T\left|\lambda\begin{bmatrix}f(\tau,\psi'(\tau))\psi'(\tau)\\+g(\tau,\psi(\tau-\vartheta(\tau)))\psi(\tau-\vartheta(\tau))\end{bmatrix}\right|d\tau\\
&\le\int_0^T\left|\lambda\left[r+\frac{\lambda K}{|\psi'(\tau)|}\right]\right||\psi'(\tau)|\,d\tau\\
&\le\int_0^T\left|\lambda g(\tau,\psi(\tau-\vartheta(\tau)))\psi(\tau-\vartheta(\tau))\right|d\tau\\
&\le r\int_0^T|\psi'(\tau)|\,d\tau\\
&\quad+T\left(\max\left\{|g(t,\psi)|:t\in\mathbf{R},|\psi|\le D_1\right\}+K\right)\\
&\le r\left(\sqrt{T}|\psi'|_2+c^{*}\right)\\
&\quad+T\left(\max\left\{|g(t,\psi)|:t\in\mathbf{R},|\psi|\le c^{*}\right\}+K\right)\\
&\le D_2
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir pozitif D_2 sabiti seçilebilir. Burada $t\in[a,a+T]$ dir.

$$\Omega=\left\{\psi\in X:\|\psi\|_X<D_1+D_2+c^{*}+1=D\right\}$$

olsun. O zaman $\lambda\in(0,1)$ olduğunda (6) sisteminin $\partial\Omega$ üzerinde çözüme sahip değildir.

$\psi\in\partial\Omega\cap KerL=\partial\Omega\cap\mathbf{R}$

olsun. ψ vektörü $\|\psi\|_X=D$ ile $\mathbf{R}$ de sabit bir vektördür. (H_1) den eğer $\psi'=0$ ise

$|\psi|_{\infty}=D>c^{*}+1$

ve

$$-\frac{1}{T}\int_0^T\left\{\begin{bmatrix} f\left(\tau,\psi'(\tau)\right)\psi'(\tau) \\ +g\left(\tau,\psi\left(\tau-\vartheta(\tau)\right)\right)\psi\left(\tau-\vartheta(\tau)\right)\end{bmatrix}\right\}d\tau$$

$$=-\frac{1}{T}\int_0^T g\left(\tau,\psi\left(\tau-\vartheta(\tau)\right)\right)\psi\left(\tau-\vartheta(\tau)\right)d\tau\neq 0$$

olur. Bu takdirde herhangi bir durumda $\psi\in\partial\Omega\cap KerL$ için

$$QN\psi=-\frac{1}{T}\int_0^T g\left(\tau,\psi\left(\tau-\vartheta(\tau)\right)\right)\psi\left(\tau-\vartheta(\tau)\right)d\tau\neq 0 \quad (10)$$

olur. (10) ün ispatına benzer bir şekilde $\partial\Omega\cap KerL\times[0,1]$ üzerinde $\phi(\psi,\lambda)\neq 0$ olacak şekilde

$$\phi(\psi,\lambda)=(1-\lambda)\psi+\lambda QN\psi$$
$$=(1-\lambda)\psi-\lambda\frac{1}{T}\int_0^T g(\tau,\psi)\psi d\tau\neq 0$$

bir homotopi dönüşüm olduğu ispatlanabilir.

Sonuç olarak, Lemma 2.2 yi kullanarak

$$d\left[QN,\Omega\cap KerL,0\right]=d\left[-\frac{1}{T}\int_0^T g(\tau,\psi)\psi d\tau,\Omega\cap KerL,0\right]$$
$$=d\left[\psi,\Omega\cap KerL,0\right]\neq 0$$

elde edilir.

Şimdiye kadar Ω, Lemma 2.1 deki bütün şartları sağladığını gördük. Bu sebeple $L\psi=N\psi$ operatör denklemi X Banach uzayında en az bir çözüme sahiptir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

4. Bir Uygulama

Bu bölümde, yukarıdaki ana sonuçların daha iyi anlaşılması için bir örnek verilmiştir.

Örnek 4.1.

$f,g:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ fonksiyonları

$$f(t,y)=\frac{1}{95\pi}\left(\sin(y)e^{\cos(y)}+e^{\sin(y)}\right),\text{ her } t,y\in R,$$

$$g(t,\psi)=\frac{1}{28\pi}\psi^{98}\left(2e^{\sin(\psi)}-1\right)\cos^2(\psi),\text{ her } t\in R,\psi<0,$$

$$g(t,\psi)=\frac{1}{16\pi}\psi^{98}\left(1-e^{\psi}\right)\sin^2(\psi),\text{ her } t\in R,\psi\geq 0$$

olmak üzere

$$\psi''(t)+f\left(t,\psi'(t)\right)\psi'(t)$$
$$+g\left(t,\psi\left(t-\cos(t)\right)\right)\psi\left(t-\cos(t)\right)=0 \quad (11)$$

Rayleigh denklemi en az bir 2π-periyodik çözüme sahiptir.

(H_1) şartının sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Şimdi (H_2) şartının sağlandığı görelim; Bu şartın ikinci kısmı kolayca görülebilir. Birinci kısmı için $c^*=1$ olarak seçelim. $t\in\mathbf{R},|\psi|\leq c^*=1$ dolayısıyla $t\in\mathbf{R},-1\leq\psi\leq 1$ için $g(t,\psi)<2$ dir. Böylelikle (H_1) ve (H_2) şartları sağlanmış olur. Bu nedenle Teorem 3.1 den (11) denklemi en az bir 2π-periyodik çözüme sahip olur.

5. Sonuç ve Tartışma

Bu makalede örtüşen derece teorisi, gecikme argümentli (3) Rayleigh tipi denkleminin T-periyodik çözümlerinin varlığı üzerine yeni sonuçlar elde etmek için kullanılmıştır. Gecikme argümentli (3) denkleminin T-periyodik çözümlerinin var olduğunu gösteren bir teorem verilmiştir. Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için bir uygulama yapılmıştır. (1) ve (2) tipindeki gecikme argümentli Rayleigh denklemleri başta olmak üzere Acan (2016), Burton (1985), Deimling (1985), Degla (1997), Gaines ve Mawhin (1977), Huang vd. (2007), Li ve Huang (2008), Liang (2012), Liu (2008), Liu (2009), Liu ve Huang (2006), Lu ve Ge (2004a), Lu ve Ge (2004b), Lu vd. (2004), Peng vd. (2006), Wang ve Shao (2010), Xiong vd. (2007), Yu vd. (2009), Zhou ve Tang (2007a), Zhou ve Tang (2007b), Zhou ve Tang (2008) kaynakların sonuçları dikkate alındığında bu çalışmadaki gecikme argümentli (11) Rayleigh tipi denklemi için 2π-periyodik çözümün varlığını elde etmek için uygulanamazlar. Sonuç olarak bu çalışmanın ana bulgularının yeni olduğu söylenebilir.

References

Acan, O., 2016. Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of forced rayleigh equation, Gazi University Journal of Science, **29**, 645-650.

Burton T. A., 1985. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Academic Press, Orland, FL.

Deimling, K., 1985. Nonlinear Functional Analysis, Springer, Berlin.

Degla, G., 1997. Degree theory for compact displacements of the identity and applications, International Center for Theoretical Physics, P.O. Box 586, Italy.

Gaines, R. E., Mawhin, J., 1977. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations, in: Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, New York.

Huang, C., He, Y., Huang, L., Tan, W., 2007. New results on the periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with two deviating arguments, *Mathematical and Computer Modelling,* **46**, 5-6.

Li, Y., Huang, L., 2008. New results of periodic solutions for forced Rayleigh-type equations, *Journal of mathematical analysis and applications,* **221**(1), 98-105.

Liang, R., 2012. Existence and uniqueness of periodic solution for forced Rayleigh type equations, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **40**, 415-425.

Liu, B., 2008. Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with two deviating arguments, *Computers & Mathematics with Applications*, **55**, 2108-2117.

Liu, B., 2009. Anti-periodic solutions for forced Rayleigh-type equations, *Nonlinear Analaysis*, **10**, 2850-2856.

Liu, B., Huang, L., 2006. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument, *Journal of mathematical analysis and applications,* **321**, 491-500.

Lu, S., Ge, W., 2004a. Periodic solutions for a kind of Liénard equations with deviating arguments, *Journal of mathematical analysis and applications*, **249**, 231-243.

Lu, S., Ge, W., 2004b. Some new results on the existence of periodic solutions to a kind of Rayleigh equation with a deviating argument, *Nonlinear Analaysis*, **56**, 501-504.

Lu, S., Ge, W., Zheng, Z., 2004. Periodic Solutions for a Kind of Rayleigh Equation with a Deviating Argument, *Applied mathematics letters*, **17**, 443-449.

Peng, L., Liu, B., Zhou, Q., Huang, L., 2006. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with two deviating arguments, *Journal of the Franklin Institute,* **343**, 676-687.

Wang, L., Shao, J., 2010. New results of periodic solutions for a kind of forced Rayleigh-type equations, *Nonlinear Analaysis*, **11**, 99-105.

Xiong, W., Zhou, Q., Xiao, B., Wang, Y., Long, F., 2007. Periodic solutions for a kind of Liénard equation with two deviating arguments, *Nonlinear Analaysis*, **8**(3), 787-796.

Yu, Y., Shao, J., Yue, G., 2009. Existence and uniqueness of anti-periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with two deviating arguments, *Nonlinear Analaysis*, *71*, 4689-4695.

Zhou, Y., Tang, X., 2007a. On existence of periodic solutions of Rayleigh equation of retarded type, *Journal of computational and applied mathematics*, **203**, 1-5.

Zhou, Y., Tang, X., 2007b. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument, *Computers & Mathematics with Applications,* **53**, 825-830.

Zhou, Y., Tang, X., 2008. On existence of periodic solutions of a kind of Rayleigh equation with a deviating argument, *Nonlinear Analaysis*, **69**, 2355-2361.