Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **18** (2018) **011301** (836-841) AKU J. Sci. Eng.**18** (2018) **011301** (836-841)

DOİ: 10.5578/fmbd.67594

Araştırma Makalesi / Research Article

2-normlu Uzaylarda Lacunary İstatistiksel Delta Ward Süreklilik

Sibel ERSAN

Maltepe Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, İstanbul

e-posta:sibelersan@maltepe.edu.tr

Geliş Tarihi: 03.01.2018 ; Kabul Tarihi: 26.10.2018

Anahtar kelimeler
Lacunary İstatistiksel Ward Süreklilik;Quasi-Cauchy Dizileri;Süreklilik;2-normlu Uzay

Özet

Bu makalede 2-normlu uzaylarda lacunary istatistiksel delta ward süreklilik kavramı incelenmiştir. Ayrıca, lacunary istatistiksel delta ward süreklilik ve normal anlamda süreklilik arasındaki ilişki ile ilgili teoremlerin ispatları verilmiştir.

Lacunary Statistically Delta Ward Continuity In 2-normed Spaces

Keywords
Lacunary Statistically Ward Continuity;Quasi-Cauchy Sequences;Continuity;2-normed Space

Abstract

In this study, the concept of lacunary statistically delta ward continuity in 2-normed spaces is investigated. Also, proofs of theorems related to lacunary statistically delta ward continuity and other kinds of continuities are given.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

2-normlu uzay kavramı, ilk olarak 1963 yılında S. Gahler tarafından verilmiştir (Gahler 1963, 1965).Son zamanlarda birçok yazar 2-normlu uzaylara ilişkin bazı çalışmalar yapmışlardır (Bakınız: Mashadi 2001, Freese et al. 2001, Gurdal et al. 2004,Gurdal 2006, Sahiner et al. 2007, Gurdal et al. 2008, Gurdal et al. 2009, Gurdal et al. 2012, Savas et al. 2016, Cakalli et al. 2016, Yegul et al. 2017, Arslan et al. 2018).S. Gahler, 2-normlu uzay kavramını şu şekilde vermiştir: *X* boyutu 1den büyük bir reel vektör uzayı ve $\|.,.\|: X \times X \to R^+$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in R$ için aşağıda verilen koşulları sağlayan $\|.,.\|$ fonksiyonuna 2-norm denir:

i) *x* ve *y* lineer bağımlı ise ancak ve ancak $\|x, y\| = 0$,

ii) $\|x, y\| = \|y, x\|$,

iii) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$,

iv) $\|x, y+z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$.

$(X, \|.,.\|)$ ikilisine de 2-normlu uzay denir. Bu makalede *X* denildiğinde $\|.,.\|$ 2-normuna sahip 2-normlu uzay anlaşılacaktır. $\|.,.\|$ iki normu tarafından üretilen topoloji ile $(X, \|.,.\|)$, local konveks Hausdorff topolojik vektör uzayıdır. Bunun için öncelikle her $x \in X$ ve $\forall z \in X$ için $p_z(x) = \|x, z\|$ şeklinde ifade edilen $p_z(x)$ yarınormları tanımlanır. Böylece *X* uzayı üzerinde, $\{p_z : z \in X\}$ formundaki yarınormların ailesi tarafından üretilen topoloji elde edilir.

J. A. Fridy ve C. Orhan,reel sayılar dizisi için lacunary istatistiksel yakınsaklıkkavramını tanımlamışlardır (Fridy et al. 1993). Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = \{k_r\}$ olsun.Eğer $k_0 \neq 0$ olmak üzere $h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$ $(r \to \infty)$ ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizi denir (Freedman 1978). $\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi ile oluşturulan aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilir ve $q_r = \dfrac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı olmak üzere $\liminf_r q_r > 1$ olarak alınacaktır. *X* uzayından alınan (x_k) dizisi *X*'in bir *L* noktasına lacunary istatistiksel yakınsaktır veya S_θ-yakınsaktır demek her pozitif ε reel sayısı için $\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}\left|\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$ sağlanması demektir.Bu durum ayrıca $S_\theta - \lim_{k\to\infty} x_k = L$ ile de gösterilebilir.

Yakın zamanda D. Burton ve J. Coleman, quasi Cauchy dizileri kavramını tanımlamışlardır (Burton et al. 2010).Bu tanımdan faydalanarak H. Cakallı, reel değerli fonksiyonlarda ve metrik uzaylardasürekliliğin farklı tiplerini tanımlamış ve bunlar hakkında ilginç çalışmalar yapmıştır (Cakalli 2011a, 2011b, 2011c).Eğer $S_\theta - \lim \Delta\alpha_k = 0$ sağlanıyor ise (α_k) dizisine lacunary istatistiksel quasi-Cauchy dizisi denir (Cakalli 2015).Burada her *k* pozitif tamsayısı için $\Delta\alpha_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$ şeklinde ifade edilir.Lacunary istatistiksel quasi-Cauchy dizilerinin kümesi ΔS_θ ile gösterilir. IR'nin alt kümesi E üzerinde tanımlanan bir *f* fonkiyonu eğer E kümesinin elemanlarından oluşan her (α_k) S_θ-quasi Cauchy dizisi için $f(\alpha_k)$ dizisi de S_θ-quasi Cauchy dizisi oluyorsa *f* fonksiyonuna lacunary istatistiksel ward sürekli veya $S_\theta -$ward süreklidir denir. Son günlerde bu kavramla ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır (Yıldız 2017, Kaplan et al. 2018).

Aynı zamanda ward süreklilik, lacunary ward süreklilik ve kuvvetli lacunary ward süreklilik kavramları 2-normlu uzaylarda da incelenmiştir (Cakalli et al. 2014, Cakalli et al. 2015, Ersan et al. 2015). Eğer her $z \in X$ için $S_\theta - \lim_{k\to\infty} \|\Delta x_k, z\| = 0$ sağlanıyor ise iki normlu uzay X den alınan (x_k) dizisi lacunary istatistiksel ward süreklidir denir.Bu makalede amaç, 2-normlu uzaylarda lacunary istatistiksel delta-ward süreklilik tanımını verip, ilgili teoremlerin ispatını göstermektir.

2. Temel Sonuçlar

Öncelikle *X* üzerinde lacunary istatistiksel delta quasi-Cauchy dizisi tanımını vererek başlayalım.

Tanım 2.1.Eğer *X* den alınan bir (x_k) dizisi için (Δx_k) dizisi lacunary istatistiksel quasi-Cauchy dizisi ise (x_k) dizisine lacunary istatistiksel delta quasi-Cauchy dizisidir veya $S_\theta - \delta$ quasi-Cauchy dizisidir denir. Bir diğer ifade ile her $\varepsilon > 0$ ve her $z \in X$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r}\left|\{k \in I_r : \|\Delta^2 x_k, z\| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

şeklindedir. Burada $\Delta^2 x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$ ile ifade edilir.

Böyle bir diziye örnek olarak

$$(x_n) = \begin{cases} (0, \sqrt{n}) : & n = k^2 \\ (0,0) \quad : & d.d. \end{cases}$$

verilebilir. (x_n) dizisi*X* de lacunary istatistiksel delta quasi-Cauchy dizisidir. Bu dizi aynı zamanda (0,0) noktasına lacunary istatistiksel yakınsaktır ama normal anlamda yakınsak değildir.

Şimdi *X* de lacunary istatistiksel delta ward sürekliliğin tanımından bahsedebiliriz.

Tanım 2.2. X nin bir alt kümesi olan E üzerinde tanımlanan reel değerli bir *f* fonksiyonu lacunary istatistiksel delta quasi-Cauchy dizisi olma özelliğini korursa fonksiyona lacunary istatistiksel delta ward süreklidir veya $S_\theta -$ward süreklidir denir. Başka bir deyişle, (Δx_k) dizisi *E* nin lacunary istatistiksel quasi-Cauchy dizisi olduğunda $(\Delta f(x_k))$ dizisi de lacunary istatistiksel quasi-Cauchy dizisi oluyorsa *f* fonksiyonuna lacunary istatistiksel delta ward süreklidir veya $S_\theta -$ward süreklidir denir.

E de lacunary istatistiksel delta ward sürekli fonksiyonların kümesi $\Delta^2 S_\theta(E)$ şeklinde ifade edilir. Bir sonraki önermede lacunary istatistiksel delta ward sürekli fonksiyonların kümesinin bir lineer uzay olduğu verilmiştir.

Önerme 2.1. Lacunary istatistiksel delta ward sürekli fonksiyonların kümesi bir lineer uzaydır.

İspat.Öncelikle iki lacunary istatistiksel delta ward sürekli fonksiyonun toplamının yine lacunary istatistiksel delta ward sürekli fonksiyon olduğunu gösterelim: $\forall f, g \in \Delta^2 S_\theta(E)$ için $f+g \in \Delta^2 S_\theta(E)$ olduğunu göstereceğiz.

f ve *g, X* uzayının *E* alt kümesinde tanımlı lacunary istatistiksel delta ward sürekli iki fonksiyon olsun. $\forall \varepsilon > 0$ verilsin. Terimleri *E* den alınan herhangi bir lacunary istatistiksel delta quasi Cauchy dizisi (x_k) olsun. Bu takdirde *f* ve *g* lacunary istatistiksel delta ward sürekli olduğundan $(f(x_k))$ ve $(g(x_k))$ lacunary istatistiksel delta quasi-Cauchy dizisi olur. Yani $\forall z \in X$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left\|\Delta^2 f(x_k), z\right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0$$

ve

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left\|\Delta^2 g(x_k), z\right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0.$$

Böylece

$$\left\{k \in I_r : \left\|\Delta^2 (f+g)(x_k), z\right\| \geq \varepsilon\right\}$$

$$\subseteq \left\{k \in I_r : \left\|\Delta^2 f(x_k), z\right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{k \in I_r : \left\|\Delta^2 g(x_k), z\right\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

kapsamasından

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left\|\Delta^2\left(f(x_k) + g(x_k)\right), z\right\| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

elde edilir. Ayrıca bir lacunary istatistiksel ward sürekli *f* fonksiyonu ile herhangi bir *α* reel sabitinin çarpımının yine lacunary istatistiksel ward sürekli olduğu yani

$\forall f \in \Delta^2 S_\theta(E)$ ve her α için $\alpha f \in \Delta^2 S_\theta(E)$

olduğu aşağıda şekilde gösterilir:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left\|\Delta^2 \alpha f(x_k), z\right\| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : |\alpha|\left\|\Delta^2 f(x_k), z\right\| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left\|\Delta^2 f(x_k), z\right\| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right\}\right| = 0.$$

Böylece $\Delta^2 S_\theta(E)$ bir lineer uzaydır.

Teorem 2.1. Bir 2-normlu *X* uzayının alt kümesi *E* üzerinde lacunary istatistiksel delta ward sürekli bir fonksiyon *E* de lacunary istatistiksel ward süreklidir.

İspat.*f* fonksiyonu *X* uzayının bir *E* alt kümesi üzerinde lacunary istatistiksel delta ward sürekli bir fonksiyon olsun ve (Δx_n), *E* de lacunary istatistiksel quasi-Cauchy dizisi olsun. Yani $\forall z \in X$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left\|\Delta x_n, z\right\| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olsun. Şimdi

$$(t_n) = (x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n, \ldots)$$

şeklinde tanımlanan (t_n) dizisini gözönüne alalım. Bu (t_n) dizisi de *E* de lacunary istatistiksel quasi-Cauchy dizisidir dolayısıyla *E* de lacunary istatistiksel delta quasi-Cauchy dizisidir. $\forall z \in X$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left\|\Delta^2 f(t_n), z\right\| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

dır. Bu dizi

$$(f(t_n)) = (f(x_1), f(x_1), f(x_2), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots)$$

ile verilir. Buradan $(f(x_n))$ dizisinin *E* de lacunary istatistiksel ward sürekliliği açıktır. $\forall z \in X$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k \in I_r : \left\|\Delta f(x_n), z\right\| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ile ifade edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.*E* de bir fonksiyon lacunary istatistiksel delta ward sürekli ise süreklidir.

İspat.İspat (Cakalli et al. 2015a) daki Teorem 3.9 dan ve yukarıdaki teoremden elde edilir.

Ayrıca herhangi lacunary istatistiksel delta ward sürekli fonksiyon istatistiksel süreklidir.

Teorem 2.2.*X* uzayının bir *E* alt kümesi üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon *f* olsun. Bu takdirde *E* deki her (x_n) quasi-Cauchy dizisi için $(f(x_n))$ dizisi lacunary istatistiksel delta quasi-Cauchy dizisidir.

İspat.*X* uzayının bir *E* alt kümesi üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon*f* olsun ve (x_n) de *E* de herhangi bir quasi-Cauchy dizisi olarak verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $\|x-y, z\| < \delta$ sağlayan her $x, y, z \in X$ için $\|f(x) - f(y), z\| < \varepsilon$ gerçeklenir. Ayrıca (x_n), *E* nin bir quasi-Cauchy dizisi olduğundan bu δ için bir $n_1 \in IN$ sayısı vardır öyle ki her $k \geq n_1$ ve her $z \in X$ için $\|\Delta x_k, z\| = \|x_{k+1} - x_k, z\| < \delta$ sağlanır. Her

$k \geq n_1$ ve her $z \in X$ için düzgün süreklilik $\left\| f(x_{k+1}) - f(x_k), z \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olmasını gerektirir. Ayrıca $(f(x_n))$ dizisinin lacunary istatistiksel delta quasi-Cauchy dizisi olduğunun ispatı için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| \Delta^2 f(x_k), z \right\| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

sağlandığını göstermek gerekir. 2-normun

$$\|x+y,z\| \leq \|x,z\| + \|y,z\|$$

özelliğinden faydalanılarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| \Delta^2 f(x_k), z \right\| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| f(x_{k+2}) - 2f(x_{k+1}) + f(x_k), z \right\| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$\leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| f(x_{k+2}) - f(x_{k+1}), z \right\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|$$

$$+ \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| f(x_{k+1}) - f(x_k), z \right\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|$$

$$\leq \lim_{r\to\infty} \frac{n_1}{h_r} + \lim_{r\to\infty} \frac{n_1}{h_r} = 0 + 0 = 0$$

elde edilir. Böylelikle $(f(x_n))$ dizisinin lacunary istatistiksel delta quasi-Cauchy dizisi olduğu gösterilmiş olur ve ispat tamamlanır.

Sürekli fonksiyon dizilerinin düzgün limitinin sürekli olduğu bilinmektedir. Bir sonraki teoremde lacunary istatistiksel delta ward sürekli fonksiyon dizilerinin düzgün limitinin yine lacunary istatistiksel delta ward sürekli olduğu gösterilecektir.

Teorem 2.3. $E \subset X$ altkümesi üzerinde tanımlanan (f_n) lacunary istatistiksel delta ward sürekli fonksiyonlar dizisi ve ayrıca (f_n) bir *f* fonksiyonuna *E* üzerinde düzgün yakınsıyor ise *f* fonksiyonu da *E* de lacunary istatistiksel delta ward süreklidir.

İspat. Kabul edelim ki(f_n) dizisi bir f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için bir $N \in IN$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq N$ ve her $x, z \in E$ için $\left\| f_n(x) - f(x), z \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ sağlanır. Ayrıca f_N, *E* de lacunary istatistiksel delta ward sürekli bir fonksiyon olduğundan her $z \in E$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| \Delta^2 f_N(x_k), z \right\| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\} \right| = 0$$

yazılabilir. Bu her $z \in E$ için

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| f_N(x_{k+2}) - 2f_N(x_{k+1}) + f_N(x_k), z \right\| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\} \right| = 0$$

olması demektir. Amacımız *f* fonksiyonunun da lacunary istatistiksel delta ward sürekli olduğunu göstermektir.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| \Delta^2 f(x_k), z \right\| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| f(x_{k+2}) - 2f(x_{k+1}) + f(x_k), z \right\| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| [f(x_{k+2}) - 2f(x_{k+1}) + f(x_k)] \right. \right. \right.$$
$$-[f_N(x_{k+2}) - 2f_N(x_{k+1}) + f_N(x_k)]$$
$$\left. \left. \left. +[f_N(x_{k+2}) - 2f_N(x_{k+1}) + f_N(x_k)], z \right\| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| f(x_{k+2}) - f_N(x_{k+2}) \right. \right. \right.$$
$$+ f_N(x_{k+2}) - 2f_N(x_{k+1}) + f_N(x_k) + 2f_N(x_{k+1})$$
$$\left. \left. \left. - f_N(x_k) - 2f(x_{k+1}) + f(x_k), z \right\| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$\leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| f(x_{k+2}) - f_N(x_{k+2}), z \right\| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\} \right|$$

$$+ \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| f_N(x_{k+2}) - 2f_N(x_{k+1}) + f_N(x_k), z \right\| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\} \right|$$

$$+ \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| 2(f_N(x_{k+1}) - f(x_{k+1})), z \right\| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\} \right|$$

$$+ \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left\| -(f_N(x_k) - f(x_k)), z \right\| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right\} \right| = 0.$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. Bu ispat ile 2-normlu uzaylar da lacunary delta ward sürekli fonksiyonların düzgün limitinin de lacunary delta ward sürekli olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2.4.*X* uzayının bir *E* alt kümesi üzerinde lacunary istatistiksel delta ward sürekli fonksiyonlar dizisinin oluşturduğu küme *E* deki sürekli fonksiyonlar kümesinin bir kapalı alt kümesidir.

İspat.Eğer $E \subset X$ kümesinde bir f fonksiyonu lacunary istatistiksel delta ward sürekli ise bu durumda $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ sağlayan bir (f_n) dizisi vardır. Ayrıca kabul edelim ki *E* de (x_n) lacunary istatistiksel delta quasi-Cauchy dizisi olsun. (f_n) dizisi*f* fonksiyonuna yakınsadığından, her $x, z \in E$ için bir pozitif *N* sayısı vardır öyle ki her $n \geq N$ için $\left\| f_n(x) - f(x), z \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ sağlanır. f_N fonksiyonu*E*'de lacunary istatistiksel delta ward sürekli olduğundan

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \left\|\Delta^2 f_N(x_k),z\right\|\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|=0$$

yazılabilir. Bu her $z\in E$ için

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \| f_n(x_{k+2})-2f_n(x_{k+1})+f_n(x_k),z\|\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|=0$$

olması demektir. Amacımız *f* fonksiyonunun da lacunary istatistiksel delta ward sürekli olduğunu göstermektir. O halde

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \| f_N(x_{k+2})-2f_N(x_{k+1})+f_N(x_k),z\|\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|=0$$

her $z\in E$ için gerçeklenir. Buradan

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \| f(x_{k+2})-2f(x_{k+1})+f(x_k),z\|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \|[f(x_{k+2})-2f(x_{k+1})+f(x_k)]\right.\right.$$

$$-[f_N(x_{k+2})-2f_N(x_{k+1})+f_N(x_k)]$$

$$\left.\left.+[f_N(x_{k+2})-2f_N(x_{k+1})+f_N(x_k)],z\|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \| f(x_{k+2})-f_N(x_{k+2}),z\|\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|$$

$$+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \|-2f(x_{k+1})+2f_N(x_{k+1}),z\|\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|$$

$$+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \| f(x_k)-f_N(x_k)),z\|\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|$$

$$+\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\left\{k\in I_r : \| f_N(x_{k+2})-2f_N(x_{k+1})+f_N(x_k),z\|\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|$$

Böylece *f* fonksiyonunun lacunary istatistiksel delta ward sürekli olduğu gösterilmiş olur ve ispat tamamlanır.

3. Kaynaklar

Arslan, M. and Dundar, E., 2018. *I*-Convergence and *I*-Cauchy sequence of functions in 2-normed spaces, Konuralp Journal of Mathematics, 6, **1**, 57-62.

Arslan, M. and Dundar, E., 2018. On *I*-Convergence of sequences of functions in 2-normed spaces, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 42, 491-502.

Arslan, M. and Dundar, E., 2018. Rough convergence in 2-normed spaces, Bulletion of Mathematical Analysis and Applications, ISSN:1821-1291, URL:http://www.bmathaa.org, Volume 10, Issue **3**, Pages 1-9.

Burton, D.and Coleman, J., 2010. Quasi-Cauchy Sequences.*Amer. Math. Monthly*, 117, **4**, 328-333.

Cakalli, H., 2011a. Forward continuity.*J. Comput. Anal. Appl.,* 13, **2**, 225-230.

Cakalli H., 2011b. δ -quasi-Cauchy sequences.*Math. Comput. Modelling,* 53, **1-2**, 397-401.

Cakalli, H., 2011c. Statistical ward continuity.*Appl. Math. Lett.,* 24, **10**, 1724-1728.

Cakalli, H., Aras, C. G. and Sonmez, A., 2015. Lacunary statistical ward continuity.*AIP Conf. Proc.,*1676.

Cakalli, H. and Ersan, S., 2015a. Lacunary ward continuity in 2-normed spaces.*Filomat*, 29, **10**, 2257-2263.

Cakalli, H. andErsan, S., 2014. Strongly lacunary ward continuity in 2-normed spaces.*The Scientific World Journal*, 2014, Article ID 479679, 5 pages, Doi: 10.1155/2014/.

Ersan,S. and Cakalli, H., 2015. Ward continuity in 2-normed spaces.*Filomat*, 29, **7**, 1507-1513.

Cakalli, H. and Ersan, S., 2016. New types of continuity in 2-normed spaces.Filomat, 30, **3**, 525-532.

Freedman, A. R., Sember, J.J. and Raphael, M., 1978.Some Cesàro-type summability spaces.*Proc. London. Math. Soc.,* 37, 508-520.

Freese R. and Cho, Y. J., 2001.Geometry of Linear 2-normed spaces.*Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, NY*.

Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence.*Pacific J. Math.,* 160, **1**, 43-51.

Fridy, A. and Orhan, C., 1993. Lacunary statistical Summability.*Journal of mathematical analysis and applications*, 173, **2**, 497-504.

Gahler, S., 1963.2-metrische Raume und ihre topologische Struktur.*Math.Nachr.*,26, 115-148.

Gahler, S., 1965.Lineare 2-normietre Raume.*Math.Nachr.*,28, 1-43.

Gurdal, M. and Pehlivan, S., 2004.The statistical convergence in 2-Banach spaces. Thai Journal of Mathematics, 2, **1**, 107-113.

Gurdal, M., 2006.On ideal convergent sequences in 2-normed spaces. Thai J. Math., 4, **1**, 85-91.

Gurdal, M. and Acik, I., 2008. On *I*-Cauchy sequences in 2-normed spaces. Mathematical Inequalities and Applications, 11, **2**, 349-354.

Gurdal, M. and Pehlivan, S., 2009.Statistical convergence in 2-normed spaces.Southeast Asian Bull. Math., 33, 257-264.

Gurdal, M. and Sahiner, A., 2012.Statistical approximation with a sequence of 2-Banach spaces, Mathematical and Computer Modelling, 55, (3-4), 471-479.

Kaplan, H. ve Cakalli, H., 2018.Kuvvetli Boşluklu Quasi-CauchyDizileri Üzerine Yeni Bir Çalışma. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 22,**3,** DOI: 10.16984/saufenbilder.357403.

Mashadi, H.G., 2001. On finite dimensional 2-normed spaces.*Soochow J. Math*., 27, **3**, 321-329.

Savas, E. and Gurdal, M., 2016.Ideal convergent function sequences in random 2-normed spaces. Filomat, 30, **3**, 557-567.

Sahiner, A., Gurdal, M., Saltan, S. and Gunawan, H., 2007.Ideal convergence in 2-normed spaces, Taiwanese J. Math., 11, **5**, 1477-1484.

Yegul, S. and Dundar, E., 2017. On statistical convergence of sequences of functions in 2-normed spaces, Journal of Classical Analysis, 10, **1**, 49-57.

Yıldız, S. 2017. Lacunary statistical delta 2 quasi Cauchy sequences. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 21,**6**, 1408-1412.