Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD18**X** (2018) **011303** (852-860) AKU J. Sci. Eng. **18** (2018) **011303** (852-860)

DOİ: 10.5578/fmbd.67682

Araştırma Makalesi / Research Article

Daha Hızlı Mann Sabit Nokta Yinelemesi Üzerine Bir Çalışma

KADRİ DOĞAN

Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Artvin Çoruh Üniversitesi, Artvin, Türkiye.

dogankadri@hotmail.com

Geliş Tarihi: 10.01.2018 ; Kabul Tarihi: 15.11.2018

Anahtar kelimeler
Mann sabit nokta yineleme yöntemi, Yakınsaklık hızı, Yakınsaklık denkliği, Kuvvetli yakınsaklık.

Özet

Bu çalışmada, Mann yineleme yönteminden daha hızlı olan Mann tipinde bir yineleme tanımlanmış ve bu yineleme yönteminin Banach uzaylarında hemen hemen büzülme dönüşümleri için sabit noktaya yakınsadığı gösterilmiştir. Ayrıca düzenlenmiş Mann yineleme yönteminin literatürdeki diğer sabit nokta yineleme yöntemlerine yakınsaklık denklikleri ispatlanmıştır. Son olarak, Mann tipindeki yineleme yönteminin, klasik Mann yineleme yönteminden daha hızlı olduğu gösterilmiştir.

A Study On Faster Mann Iterative Method

Keywords
Mann fixed point iterative process, Rate of convergence, Equivalence of convergence, Strong convergence

Abstract

In this study, we introduce a Mann-type iterative method converges faster than Mann iterative method which is shown strong convergence to fixed point for almost contraction mappings in Banach spaces. Also, we prove that the strong convergences of them are equal. Finally, it is shown that the Mann-type iterative process is faster than the classical Mann iterative process.

1. Giriş

Teorik açıdan gerçek dünyadaki ortamdan kaynaklanan sayısız problemin çözümüne yönelik çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Olası uygulamalardaki etkin rolünden dolayı, yıllardır, sabit nokta teorisi matematikte en ilginç dallardan birisi olmuştur. Birkaç matematiksel ve gerçek dünya probleminin, sabit bir nokta problemi olarak doğal olarak formüle edildiği iyi bilinmektedir; başka bir deyişle,

$$Tx = x \quad (1)$$

olacak şekilde uygun bir T dönüşümünün tanım kümesindeki bir x noktasını bulmak için bir problem vardır. (1) şartını sağlayan bir x noktasına, T dönüşümünün sabit noktası denir. Ayrıca, sabit nokta teorisi, diferansiyel denklem, integral denklemi, matris denklemi, konveks minimizasyon ve split fizibilite, büzülme dönüşümlerinin sıfırlarını bulma gibi çeşitli konularda etkin bir şekilde uygulanmıştır. Tek değerli büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarının varlık ve tekliği ile ilgili sabit nokta teorisinde birçok çalışma, Picard, Krasnoselksii, Mann ve Ishikawa yineleme yöntemleri gibi temel algoritmalar kullanılarak geliştirilmiştir. Bu çalışmalar yapılırken, denklemlerin çözümlerine yaklaşımı sağlayan iyi bir yakınsaklık hızına sahip bir sabit nokta yineleme yöntemini geliştirmek gerekir. Yıllar geçtikçe, yinelemelerin yakınsaklık hızlarına ilgi çok hızlı bir şekilde arttı. Örneğin, birçok yazar çok sayıda yineleme yöntemini değerlendirmiş ve bunların yakınsaklık hızlarını çalışmışlardır (Abbas ve Nazir 2014, Berinde 2004, Fukharuddin ve Berinde 2016, Karakaya vd. 2017, Chungh vd. 2015, Gursoy ve Karakaya 2014, Karahan ve Ozdemir 2013, Karakaya vd. 2013, Dogan ve Karakaya 2014, Sintunavarat ve Pitea 2016, Suantai 2005, Phuengrattana ve Suantai 2013 ve Phuengrattana ve Suantai 2011). Bazı yineleme yöntemleri büzülme dönüşümlerin, bazıları da genişlemeyen dönüşümlerin (Reich ve Safir 1990) sabit noktalarını bulmak için tanımlanmıştır.

Bu çalışmanın amacı, uygun şartlar altında klasik Mann sabit nokta yineleme yönteminden daha hızlı bir yineleme tanımlamak ve çıkan sonuçları nümerik örneklerle desteklemektir.

Bu çalışmanın tümünde, T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi $Fix(T)$ ile gösterilecektir.

Picard yineleme yöntemi Picard (1890) x_0 başlangıç noktası ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$x_{n+1} = Tx_n \qquad (2)$$

ile tanımlanmıştır.

Genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşımda, Picard yineleme yöntemi başarılı olamamıştır. Bu gerçeği ispatlamak için aşağıdaki basit örneği verebiliriz.

Örnek 1.1 $T:[0,5]\rightarrow[0,5]$ dönüşümü $x\in[0,5]$ olmak üzere $Tx=5-x$ ile gösterilsin. Bu taktirde bir tek $x^*=\frac{5}{2}$ sabit noktasına sahip T dönüşümü alışılmış metriğe göre bir genişlemeyen dönüşümdür. $x_0 \neq \frac{5}{2}$ olmak üzere Picard yineleme yöntemini kullanarak yukarıdaki gerçeği aşağıdaki şekilde kolayca gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} x_1 &= Tx_0 = 5\text{-}x_0; \\ x_2 &= Tx_1 = 5 - (5 - x_0) = x_0; \\ x_3 &= Tx_2 = 5\text{-}x_0; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi Picard yineleme yöntemi T'nin bir tek sabit noktası olan $x^*=\frac{5}{2}$ noktasına yakınsamaz.

Bu eksikliği ortadan kaldırmak için Krasnoselskii' yineleme yöntemi Krasnoselskii (1961) aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}Tx_n. \end{cases}$$

(3)

Mann (1953)'de verilen Mann yineleme yöntemi genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşımı tanımlayan oldukça genel bir yineleme yöntemidir. Mann yineleme yöntemi Krasnoselskii' yineleme yönteminden iki sene önce bir matris yardımıyla tanımlanmasına rağmen daha genel bir sabit nokta yineleme yöntemidir. Bu yineleme yöntemini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Bu çalışmanın amacı, literatürde mevcut olan sabit nokta yineleme yöntemlerinden daha hızlı ve daha sade bir sabit nokta yineleme yöntemini tanımlamaktır. Sabit nokta yineleme yöntemlerinin en önemlilerinden biri Mann yineleme yöntemidir. Ancak bu yineleme yönteminin yakınsaklık hızı diğerlerine göre daha yavaştır ve bu nedenle de tercih edilen bir yineleme yöntemi değildir. Bu yüzden araştırmacılar, Mann yineleme yönteminin yakınsaklık hızını artırmak için yollar aramışlardır. Bu çalışmaları göz önünde bulundurarak daha hızlı bir Mann yineleme yöntemini aşağıdaki şekilde tanımladık.

$$\begin{cases} x_0 \in X, \alpha_n \in [0,1] \; ve \, k, n \in \mathbb{N}, k \neq 0 \\ x_{n+1} = \frac{(1-\alpha_n)}{k}x_n + \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)Tx_n. \end{cases} \qquad (5)$$

2. Temel Kavramlar

Şimdi, esas sonuçlarımızı ispatlamak için gerekli olan tanım ve lemmaları verelim.

Tanım 2.1 (Berinde 2003) (X,d) bir metrik tam metrik uzay olsun.

$$d(Tx,Ty)\le \delta d(x,y)+L_1 d(y,Tx)$$

olacak şekilde eğer $L\ge 0$ ve $\delta\in(0,1)$ varsa $T:X\to X$ dönüşümüne hemen hemen büzülme dönüşümü denir.

Teorem 2.1 (Berinde 2003) (X,d) bir metrik tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir hemen hemen büzülme dönüşümü olsun. Eğer

$$d(Tx,Ty)\le \delta d(x,y)+L_1 d(x,Tx)$$
(6)

olacak şekilde $L_1\ge 0$ ve $\delta\in(0,1)$ varsa bu taktirde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 2.2 (Berinde 2007) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olamayan sırasıyla limitleri a ve b olan reel yakınsak diziler olsunlar. Aşağıdaki limitin mevcut olduğunu kabul edelim.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n-a}{b_n-b}\right|=l. \quad (7)$$

i) Eğer $l=0$ ise, bu durumda $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$'nin a'ya yakınsaması $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$'nin b'ye yakınsamasından daha hızlıdır.

ii) Eğer $0<l<\infty$ ise, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ aynı hızda yakınsar.

Tanım 2.3 (Berinde 2007) $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ aynı p noktasına yakınsayan iki reel dizi olduğunu kabul edelim. Bu iki dizinin hata tahminleri

$$\|t_n-p\|\le u_n$$
$$\|r_n-p\|\le v_n$$

olacak şekilde mevcut olsun. Burada $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif sıfıra yakınsayan iki reel sayı dizisidir. Eğer $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı 0'a yakınsıyorsa, bu durumda $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı p sabit noktasına yakınsar.

Phuengrattana ve Suantai (2013) çalışmasında sabit nokta yineleme yöntemleri arasında yakınsaklık hızının kontrolünü sağlayan yeni bir yakınsaklık hızı tanımı aşağıdaki vermişlerdir.

Tanım 2.4 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ aynı p noktasına yakınsayan iki reel dizi olduğunu kabul edelim. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{t_n-p}{r_n-p}\right\|=0$$

ise, bu taktirde $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı p sabit noktasına yakınsar.

Lemma 2.1 (Qihou 2001) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n<\infty$ olmak üzere

$$\lambda_{n+1}\le(1+\alpha_n)\lambda_n+\beta_n$$

eşitsizliğini sağlayan $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olmayan reel sayı dizileri olsunlar. Bu durumda

i) $\lim_{n\to\infty}\lambda_n$ limiti mevcuttur.

ii) Eğer $\lim_{n\to\infty}\inf\lambda_n=0$ ise, bu taktirde $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$ dır.

3. Esas Sonuçlar

Bu bölümde (5) sabit nokta yineleme metodunun yakınsaklık analizi, literatürdeki diğer yineleme yöntemleri ile yakınsaklık denkliği ve yakınsaklık karşılaştırması yapılıp (5) yineleme yönteminin diğer yineleme yöntemleri ile yakınsaklık hız karşılaştırmasını destekleyen nümerik örnek verilmiştir.

3.1 Yakınsaklık Analizi

Teorem 3.1.1 X bir Banach uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T:C\to C$, (6) şartını sağlayan bir zayıf büzülme dönüşümü olsun. Ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ olmak üzere $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, (5) ile üretilen yineleme dizisi olsun. Bu taktirde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, T'nin teklik ile belirli p sabit noktasına yakınsar.

İspat (5) yineleme yöntemi ve (6) dönüşümünün kullanılmasıyla,

$$\|x_{n+1}-p\|=\left\|\begin{matrix}\dfrac{(1-\alpha_n)}{k}x_n\\+\left(1-\dfrac{(1-\alpha_n)}{k}\right)Tx_n-p\end{matrix}\right\|$$

$$\le\frac{(1-\alpha_n)}{k}\|x_n-p\|+\left(1-\frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)\|Tx_n-p\|$$

$$\begin{aligned}&\le\frac{(1-\alpha_n)}{k}\|x_n-p\|\\&+\left(1-\frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)\delta\|x_n-p\|\\&+\left(1-\frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)L\|p-Tp\|\\&=\left(\frac{(1-\alpha_n)}{k}+\left(1-\frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)\delta\right)\|x_n-p\|\\&=\delta\left(1+\frac{(1-\alpha_n)(1-\delta)}{k\delta}\right)\|x_n-p\|\end{aligned}\tag{8}$$

eşitsizliği elde edilir.

(8) eşitsizliği indirgeme yöntemine göre düzenlenirse

$$\|x_{n+1}-p\|\le\delta\left(1+\frac{(1-\alpha_n)(1-\delta)}{k\delta}\right)\|x_n-p\|$$

$$\|x_n-p\|\le\delta\left(1+\frac{(1-\alpha_{n-1})(1-\delta)}{k\delta}\right)\|x_{n-1}-p\|$$

$$\|x_{n-1}-p\|\le\delta\left(1+\frac{(1-\alpha_{n-2})(1-\delta)}{k\delta}\right)\|x_{n-2}-p\|$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$\|x_2-p\|\le\delta\left(1+\frac{(1-\alpha_1)(1-\delta)}{k\delta}\right)\|x_1-p\|$$

olur. Böylece

$$\|x_{n+1}-p\|\le(\delta)^n\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{(1-\alpha_i)(1-\delta)}{k\delta}\right)\|x_1-p\|$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ ve $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,1]$ olduğundan, $n\to\infty$ iken $\|x_n-p\|\to 0$ olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|=0$$

elde edilir.

3.2 Yakınsaklık Denkliği

Teorem 3.2.1 X bir Banach uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T:C\to C$, (6) şartını sağlayan p sabit noktasına sahip bir zayıf büzülme dönüşümü olsun. $m_1,x_1\in C$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ şartını sağlayan $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,1]$ olmak üzere $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sırasıyla (4) ve (5) ile gösterilen Mann ve düzenlenmiş Mann sabit nokta yineleme yöntemleri olmaları varsayımı üzerine aşağıdaki iddialar gerçeklenir.

i) (4) ile gösterilen Mann sabit nokta yineleme yöntemi p'ye yakınsar.

ii) (5) ile gösterilen düzenlenmiş Mann sabit nokta yineleme yöntemi p'ye yakınsar.

İspat $i)\Rightarrow ii)$: Kabul edelim ki (4) ile gösterilen Mann yineleme yöntemi p sabit noktasına yakınsasın. Bu takdirde (5) ile gösterilen düzenlenmiş Mann yineleme yönteminin de p sabit noktasına yakınsadığını göstereceğiz. Bunu göstermek için (4), (5) ve (6) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\|m_{n+1}-x_{n+1}\| = \left\| \begin{array}{l} (1-\alpha_n)m_n+\alpha_n Tm_n \\ -\frac{(1-\alpha_n)}{k}x_n-\left(1-\frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)Tx_n \end{array} \right\|$$
$$\le \frac{(1-\alpha_n)}{k}\|m_n-x_n\| + \frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}\|m_n-Tx_n\| + \alpha_n\|Tm_n-Tx_n\|$$

$$\le \frac{(1-\alpha_n)}{k}\|m_n-x_n\| + \frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}\|m_n-Tm_n\| + \frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}\|Tm_n-Tx_n\| + \alpha_n\|Tm_n-Tx_n\|$$

$$\le \frac{(1-\alpha_n)}{k}\|m_n-x_n\| + \frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}\|m_n-Tm_n\| + \frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}\delta\|m_n-x_n\| + \alpha_n\delta\|m_n-x_n\| + \frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}L\|m_n-Tm_n\| + \alpha_n L\|m_n-Tm_n\|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ayrıca aşağıdaki şekilde de düzenlenebilir.

$$\|m_{n+1}-x_{n+1}\| \le \left[\frac{(1-\alpha_n)}{k}+\frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}\delta+\alpha_n\delta\right]\|m_n-x_n\| + \left[\frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}+\frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}L+\alpha_n L\right]\|m_n-Tm_n\|$$

$$\le \left(\frac{1+\delta(k-1)}{k}\right)\|m_n-x_n\| + \left[\frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}+\frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}L+\alpha_n L\right]\|m_n-Tm_n\|$$

Bundan başka

$$\begin{aligned}\|m_n-Tm_n\| &= \|m_n-p+p-Tm_n\| \\ &\le \|m_n-p\|+\|p-Tm_n\| \\ &\le \|m_n-p\|+\delta\|p-m_n\| + L\|p-Tp\| \\ &= (1+\delta)\|m_n-p\|+L\|p-Tp\|\end{aligned}$$

olur. p T 'nin sabit noktası olduğundan $Tp=p$ dir. Buna göre $\lim_{n\to\infty}\|m_n-Tm_n\|=0$ elde edilir. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}+\frac{(k-1)(1-\alpha_n)}{k}L+\alpha_n L\right]\in\mathbb{R}$$

olduğu kolayca görülmektedir. Bu yüzden

$$\begin{aligned}\|m_{n+1}-x_{n+1}\| &\le \left(\frac{1+\delta(k-1)}{k}\right)\|m_n-x_n\| \\ &\le \left(\frac{1+\delta(k-1)}{k}\right)^n\|m_1-x_1\|\end{aligned}$$

yazılabilir.

$\left(\frac{1+\delta(k-1)}{k}\right)<1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\|m_n-x_n\|=0$$

elde edilir. Bu da $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$ olduğunu gösterir.

$ii) \Rightarrow i)$: Benzer işlemler kullanılarak kolayca gösterilebilir.

Sonuç 3.2.1 X bir Banach uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T: C \to C$, (6) şartını sağlayan p sabit noktasına sahip bir zayıf büzülme dönüşümü olsun. Eğer tüm yinelemeler için başlangıç noktası aynı nokta ise, bu durumda aşağıdaki iddialar denk olur.

1) Picard-S yineleme yöntemi Gursoy ve Karakaya (2014) p sabit noktasına yakınsar,
2) Düzenlenmiş Mann yineleme yöntemi (5) p sabit noktasına yakınsar,
3) CR yineleme yöntemi Chungh vd. (2012) p sabit noktasına yakınsar,
4) Ishikawa yineleme yöntemi Ishikawa (1974) p sabit noktasına yakınsar,
5) S^*yineleme yöntemi Karahan ve Ozdemir (2013) p sabit noktasına yakınsar,
6) Mann yineleme yöntemi (4) p sabit noktasına yakınsar,
7) Noor yineleme yöntemi Noor (2001) p sabit noktasına yakınsar,
8) SP yineleme yöntemi Phuengrattana ve Suantai (2011) p sabit noktasına yakınsar,
9) Picard yineleme yöntemi Picard (1890) p sabit noktasına yakınsar,
10) Picard-Mann yineleme yöntemi Khan (2013) p sabit noktasına yakınsar.

3.3 Yakınsaklık Hız Karşılaştırması

Teorem 3.3.1 X bir Banach uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ve $T: C \to C$, (6) şartını sağlayan p sabit noktasına sahip bir zayıf büzülme dönüşümü olsun. (α_n), her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$ ve $2 \le k$ koşullarını sağlayan $[0,1]$ de bir reel sayı dizisi olduğunu kabul edelim. Verilen $x_1, u_1 \in C$ başlangıç koşulları için, sırasıyla (5) ve (4) ile gösterilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ yineleme dizilerini göz önüne alalım. Bu taktirde $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, p sabit noktasına $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ den daha hızlı yakınsar.

İspat $\|x_{n+1} - p\| \le a_n$ ve $\|u_{n+1} - p\| \le b_n$ olarak alınırsa

$$a_n = (\delta)^n \prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{(1-\alpha_i)(1-\delta)}{k\delta}\right)\|x_1 - p\|$$

ve

$$b_n = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \alpha_i(1-\delta)\right)\|u_1 - p\|$$

yazılabilir. $C_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{(\delta)^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}\left(1 + \frac{(1-\alpha_i)(1-\delta)}{k\delta}\right)\|x_1 - p\| \times \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \alpha_i(1-\delta)\right)\|u_1 - p\|}{(\delta)^{n}\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{(1-\alpha_i)(1-\delta)}{k\delta}\right)\|x_1 - p\| \times \prod_{i=1}^{n+1}\left(1 - \alpha_i(1-\delta)\right)\|u_1 - p\|}.$$

Kabulümüzden,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\delta\left(1 + \frac{(1-\alpha_{n+1})(1-\delta)}{k\delta}\right)}{\left(1 - \alpha_{n+1}(1-\delta)\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\delta}{1-\alpha_{n+1}(1-\delta)} + \frac{(1-\alpha_{n+1})(1-\delta)}{k\left(1-\alpha_{n+1}(1-\delta)\right)}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\delta}{1-\alpha_{n+1}(1-\delta)} + \lim_{n\to\infty}\frac{(1-\delta)}{k\left(1-\alpha_{n+1}(1-\delta)\right)} \\
&\quad - \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}(1-\delta)}{k\left(1-\alpha_{n+1}(1-\delta)\right)}
\end{aligned}$$

$$= \delta + \frac{(1-\delta)}{k} - 0$$
$$= \frac{1+\delta(k-1)}{k} < 1.$$

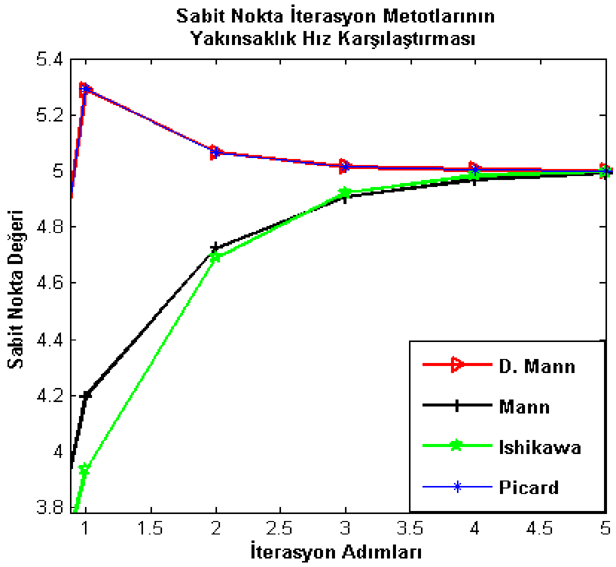
Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty$ elde edilir. Bu da $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ olduğunu gösterir. Yani $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ olur.

Sonuç olarak (5) yineleme dizisi (4) yineleme dizisinden daha hızlı yakınsar.

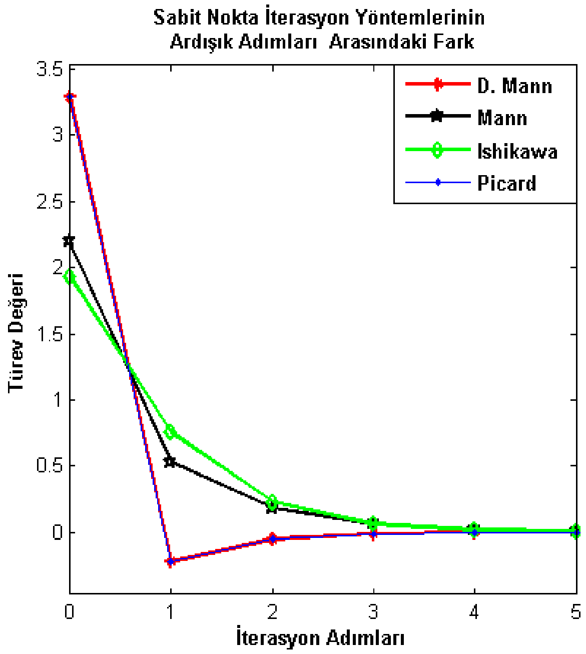
Örnek 3.3.1 $X = \mathbb{R}$ ve $C = [0,\infty)$ olsun ve her $x \in C$ için $T : C \to C$ operatörü $Tx = \sqrt{x^2 - 8x + 40}$ şeklinde tanımlayalım. T ' nin bir tek p sabit noktasına yakınsadığı kolayca görülebilir. $x_1 = 2$ başlangıç noktası olmak üzere $\alpha_n = \frac{n+1}{n+2}$ olarak şeçelim. Bu durumda aşağıdaki çizelge ve grafikler (5) ile gösterilen düzenlenmiş Mann yineleme yönteminin yakınsaklık hızının, (4) ile gösterilen Mann yineleme yönteminden daha hızlı olduğunu ve Picard yineleme yöntemine denk olduğunu göstermektedir.

Çizelge 1. D. Mann, Mann, Ishikawa ve Picard yineleme yöntemleri arasında yakınsaklık hızı karşılaştırması (15 basamak açılmıştır).

x_n	D.Mann	Mann	Ishikawa	Picard
x_1	2	2	2	2
	…	…	…	…
x_{20}	5,0…090	4,9…4094	5,0…0	5,0…090
x_{21}	5,0…020	4,9…8604	5,0…0	5,0…20
x_{22}	5,0…0	4,9…6720	5,0…0	5,0…0
	…	…	…	…
x_{25}	5,0…0	4,9…60	5,0…00	5,0…00
x_{26}	5,0…0	4,9…90	5,0…0	5,0…0
x_{27}	5,0…0	5,0…0	5,0…0	5,0…0



Resim 1. D. Mann, Mann, Ishikawa ve Picard yineleme yöntemleri arasında yakınsaklık hızı karşılaştırması.



Resim 2. D. Mann, Mann, Ishikawa ve Picard yinelemeyöntemlerinin türevlerinin karşılaştırması.

4. Sonuç

Bu çalışmada, esas Mann yineleme yönteminden daha hızlı bir Mann tipinde yineleme yöntemi tanımlanarak bu yineleme yöntemi için sabit nokta teorideki bazı sonuçlar ispatlanmıştır. Bu çalışma göz önünde bulundurularak literatürdeki diğer sabit nokta yineleme yöntemlerinin hızlarında iyileştirme çalışmaları yapılabilir.

5. Teşekkür

Yazar, Artvin Çoruh Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Bölümü'ne Proje No: 2018.F13.02.01.projesi altında bu makalenin hazırlanmasında destekleri için teşekkür eder.

6. Kaynaklar

Abbas, M. and Nazir, T., 2014. A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems, Matematicki Vesnik **66** (2014) 223-234.

Berinde, V., 2004. Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators, Fixed Point Theory Appl. **2014** :1.

Fukhar-ud-din, H. and Berinde, V., 2016. Iterative methods for the class of quasi-contractive type operators and comparsion of their rate of convergence in convex metric spaces, Filomat **30**, 223-230.

Harder, A.M. and Hicks, T. L., 1988. Stability results for fixed point iteration procedures, Mathematica Japonica, **33**, 693-706.

Chugh, R., Malik, P. and Kumar, V., 2015. On a new faster implicit fixed point iterative scheme in convex metric spaces, J. Function Spaces , **2015**, Article ID 905834.

Gursoy, F. and Karakaya, V., 2014. A Picard-S hybrid type iteration method for solving a diferential equation with retarded argument, arXiv preprint arXiv:1403.2546

Karahan, I. and Ozdemir, M., 2013. A general iterative method for approximation of fixed points and their applications, Advances in Fixed Point Theory, **3**, 510-526.

Karakaya, V., Dogan, K., Gursoy, F. and Erturk, M., 2013. Fixed point of a new three-step iteration algorithm under contractive-like operators over normed spaces, Abstract and Applied Analysis, **2013**, 9 pages.

Dogan, K. and Karakaya, V., 2014. On the convergence and stability results for a new general iterative process, The Scienti_c World Journal, **2014**, 8 pages.

Sintunavarat, W. and Pitea, A., 2016. On a new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Berinde mappings with convergence analysis, J. Nonlinear Science Appl. **9**, 2553-2562.

Suantai, S., 2005. Weak and strong convergence criteria of Noor iterations for asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. **311**, 506-517.

Reich, S. and Safrir, I., 1990. Nonexpansive iteration in hyperbolic spaces, Nonlinear. Anal. **15**, 537-558

Qihou, L., 2001. Iterative sequences for asymptotically quasi-nonexpansive mappings with error member, Journal of Mathematical Analysis and applications, **259**(1), 18-24.

Berinde, V., 2003. On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, Carpathian J. Math, **19**, 7 - 22.

Berinde, V., 2007. Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin, (2007).

Phuengrattana, W. and Suantai, S., 2013. Comparison of the rate of convergence of various iterative methods for the class of weak contractions in Banach Spaces, Thai J. Math. **11**, 217-226.

Krasnoselkii, M. A., 1961. On solving the equations with self-adjoint operators by the method of successive approximations, Progress of mathematical sciences, vol.**15**. Issue. 3.

Picard, E., 1890. Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives, J. Math. Pures Appl., **6**, 145-210.

Karakaya,V., Atalan, Y., DoganK., and El Houda Bouzara,N., 2017. Some fixed point results for a new three steps iteration process in Banach spaces, Fixed Point Theory, **18**, No. 2, 625-640.

Mann, W.R., 1953. Mean value methods in iterations, Proc. Amer. Math. Soc., **4**, 506-510.

Ishikawa, S., 1974. Fixed point by a new iteration method, Proceedings of the American Mathematical Society, **44**, 147-150.

Noor, M.A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **251**, 217-229.

Phuengrattana, W. and Suantai, S., 2011. On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP iterations for continuous on an arbitrary interval, Journal of Computational and Applied Mathematics, **235**, 3006-3914.

Chugh, R. Kumar, V. and Kumar, S., 2012. Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces, American Journal of Computational Mathematics, **2**, 345-357.

Khan, S.H., 2013. A Picard-Mann hybrid iterative process, Fixed Point Theory and Applications, **1**, 1-10.