Erzincan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
2019, 12(1), 437-446
ISSN: 1307-9085, e-ISSN: 2149-4584
Araştırma Makalesi

Erzincan University
Journal of Science and Technology
2019, 12(1), 437-446
DOI: 10.18185/erzifbed.485186
Research Article

Genelleştirilmiş Srivastava-Attiya Operatörü Yardımıyla Tanımlanan Konkav Yalınkat Fonksiyonlarda Fekete-Szegö Problemi

Hasan BAYRAM*, Sibel YALÇIN TOKGÖZ

Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 16059

Geliş / Received: 19/11/2018, Kabul / Accepted: 08/03/2019

Özet
Bu makalede daha önce tanımlanan konkav yalınkat fonksiyonların alt sınıfı ön bilgi olarak verilmiştir. Ardından Fekete-Szegö Problemi olarak bilinen λ∈(0,1] reel değerli sayısına bağlı $|a_3 - \lambda a_2{}^2|$ katsayı bağıntısının üst sınırını bulma problemi kısaca tanımlanmıştır. Sonuç olarak makalenin sonunda verilen teoremin ispatı için gerekli tüm durumlar incelenip Genelleştirilmiş Srivastava-Attiya Operatörü yardımıyla tanımlanan konkav yalınkat fonksiyonlarda Fekete-Szegö Problemi çözülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Konkav Yalınkat Fonksiyonlar, Genelleştirilmiş Srivastava-Attiya Operatörü, Fekete-Szegö Eşitsizliği

Fekete-Szegö Problem for Concave Univalent Functions Defined by Generalized Srivastava-Attiya Operator

Abstract
In this article, the subclass of the previously described concave univalent functions is given as a preliminary information. Then, the problem of finding the upper limit of the coefficient relation $|a_3 - \lambda a_2{}^2|$ connected to the number of real values $\lambda \in (0,1]$ known as the Fekete-Szegö problem is briefly described. As a result, all the necessary conditions for the theory given at the end of the article are examined. The Fekete-Szegö problem was solved in concave univalent functions defined by the Generalized Srivastava-Attiya Operator.

Keywords: Concave Univalent Functions, Generalized Srivastava-Attiya Operator, Fekete-Szegö Inequality

1. Giriş

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

birim dairesinde tanımlı analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{A}$ sınıfındaki fonksiyonlar

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (1)$$

eşitliğini sağlasın. Ayrıca $\mathcal{S}$ ile birim dairede yalınkat olan $\mathcal{A}$ sınıfındaki tüm fonksiyonların sınıfını tanımlayalım.

f fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde tanımlı (1) tipinde $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. Klasik Fekete-Szegö eşitsizliği Loewner'in metoduna göre tanımlanırsa $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonunun katsayıları için $\lambda \in (0,1]$ olmak üzere

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| \leq 1 + 2\exp\left(-\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right) \qquad (2)$$

eşitsizliği geçerlidir. $\lambda \to 1^-$ iken temel $|a_3 - a_2{}^2| \leq 1$ eşitsizliği elde edilir.

Dahası

$$\Lambda_\lambda(f) = a_3 - \lambda a_2{}^2$$

*Sorumlu Yazar: hbayram@uludag.edu.tr

katsayı fonksiyonu ve $\mathbb{D}$ diskinde tanımlı, normalizasyonu yapılmış f analitik fonksiyonu, fonksiyonlar teorisinde önemli rol oynamaktadır. Örneğin $a_3 - a_2{}^2$ sayısı $\mathcal{S}_f$; $\mathbb{D}$ dairesinde lokal yalınkat f fonksiyonlarının Schwarzian türevi $(f''/f')' - (f''/f')^2/2$ olmak üzere $\mathcal{S}_f(0)/6$ sayısını temsil eder. $\Lambda_\lambda(f)$ fonksiyonunun mutlak değerinin maksimumunu bulma problemi Fekete-Szegö (1933) problemi olarak adlandırılır. Burada Genelleştirilmiş Srivastava-Attiya Operatörü yardımıyla tanımlanan konkav fonksiyonlar için λ reel parametreli Fekete-Szegö problemi çözülecektir.

2. Ön Hazırlıklar

Operatör çalışmaları kompleks analizin, geometrik fonksiyonlar teorisi ve benzeri alanlarında oldukça önemli bir rol oynamaktadır. Örneğin işlemlerde kolaylık sağlaması açısından birçok türev ve integral operatörü bazı analitik fonksiyonların konvolüsyonu olarak yazılabilir.

$$f_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j} z^n \qquad (j = 1,2)$$

tipindeki fonksiyonlar $\mathbb{D}$ birim dairesinde analitik ve $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Hadamard çarpımı

$$(f_1 * f_2)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,1} a_{n,2} z^n = (f_2 * f_1)(z) \qquad (3)$$

eşitliğiyle tanımlansın.

Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu içeren Dziok-Srivastava lineer konvolüsyon operatörü ve bu operatörün Hadamard çarpımı (veya konvolüsyonu), Dziok ve Srivastava (1999), (2003) ve daha sonra diğer birçok yazar tarafından sistematik olarak tanıtılmış ve araştırılmıştır (bkz. Kiryakova (2011) ve Srivastava (2007)).

Srivastava ve Choi (2001) tarafından tanımlanan genel $\Phi(z,s,a)$ Hurwitz-Lerch Zeta fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon, $\mathbb{Z}_0^- := \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, ve $\mathbb{N} := \{1,2,3,\cdots\}$ olduğunda $|z| < 1$ iken $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ ve $s \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ iken $\mathrm{Re}(s) > 1$ olmak üzere

$$\Phi(z,s,a) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}$$

olarak tanımlanır. $\Phi(z,s,a)$ Hurwitz-Lerch Zeta fonksiyonu ile ilgili bu ve buna benzer birçok özellik Choi ve Srivastava (2005), Ferreira ve Lopez (2004), Srivastava ve Attiya (2007), Lin ve Srivastava (2006) çalışmalarında mevcuttur. Srivastava ve Attiya (2007) tarafından (Attiya ve Hakami (2013), Kutbi ve Attiya (2012) çalışmalarında da görülebilir.) $z \in \mathbb{D}$, $b \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$, $\mu \in \mathbb{C}$ ve $f \in \mathcal{A}$ iken

$$\mathfrak{J}_b^\mu f(z) = \left(G_b^\mu * f\right)(z) \qquad (4)$$

Hadamard çarpımı ile tanımlanan

$$\mathfrak{J}_b^\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

lineer operatörü araştırılıp tanıtılmıştır. Bu operatör burada kolaylık sağlaması açısından $z \in \mathbb{D}$ için

$$G_b^\mu(z) := (1+b)^\mu [\Phi(z,\mu,b) - b^{-\mu}] \qquad (5)$$

eşitliği ile verilecek. Ayrıca (1), (4) ve (5) eşitlikleri yardımıyla

$$\mathfrak{J}_b^\mu f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1+b}{n+b}\right)^\mu a_n z^n \qquad (6)$$

elde edilir. Srivastava-Attiya operatörü yardımıyla elde edilen $\mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k}$ genelleştirilmiş integral operatörü Murugusundaramoorthy (2014) tarafından tanımlanmıştır. Buna göre;

$$\mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k} f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} C_n^m(b,\mu,k) a_n z^n \quad (7)$$

olup, burada

$$\Psi_n = C_n^m(b,\mu,k)$$

$$= \left| \left(\frac{1+b}{n+b} \right)^{\mu} \right| \frac{m!\,(n+k-2)!}{(k-2)!\,(n+m-1)!} \quad (8)$$

olarak tanımlanır. μ ve b parametreleri $k \geq 2$ ve $m > -1$ iken $\mu \in \mathbb{C}$ ve $b \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_0^-$ şartlarını sağlar.

2.1 Uyarı. $m = 1$ ve $k = 1$ iken $\mathfrak{J}_{\mu,b}^{1,1}$ operatörü Srivastava-Attiya (2007) operatörüne karşılık gelir.

2.2 Uyarı. $\mu = 0$ iken $\mathfrak{J}_{0,b}^{m,k}$ operatörü de iyi bilinen Choi-Saigo-Srivastava operatörüdür (Ling ve Liu, 2005).

2.3 Uyarı. $m = 1, k = \mu = 2$ ve $b = 0$ iken $\mathfrak{J}_{2,0}^{1,2}$ operatörü Alexander (1915) operatörü olarak bilinir.

2.4 Uyarı. $m = \mu = 1, k = 2$ ve $b = c$ iken $\mathfrak{J}_{1,c}^{1,2}$ operatörü Bernardi (1969) operatörü olarak bilinir.

Ayrıca $\mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k} f(z)$ operatöründeki m, k, μ ve b parametrelerini uygun olarak özel seçersek Ruscheweyh (1975), Libera (1965) ve Livingston (1966) tarafından tanımlanan çeşitli integral operatörleri elde edilebilir.

$$\mathcal{S}_{\Psi}^{*} = \left\{ f \in S \colon \mathrm{Re}\left(\frac{z\left(\mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k} f(z)\right)'}{\mathfrak{J}_{\mu,b}^{m,k} f(z)} \right) > 0, z \in \mathbb{D} \right\}$$

biçiminde tanımlanan $\mathcal{S}_{\Psi}^{*}$ sınıfı analitik fonksiyonların bir alt sınıfıdır. Geçmişte Avkhadiev ve Wirths (2002) tarafından birim daireyi konkav bölgelere(kapalı konveks kümelerin tümleyeni) dönüştüren konform dönüşümlerle ilgili bazı yeni özellikler bulundu. $C_0(\alpha)$ sınıfı konkav yalınkat fonksiyonların bir sınıfı olarak tanımlansın. Bir $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun $C_0(\alpha)$ sınıfına ait olması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekli ve yeterlidir:

- f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesinde $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ standart normalizasyonu sağlayan analitik bir fonksiyondur. Ayrıca $f(1) = \infty$ şartı sağlanır.
- f fonksiyonu $\mathbb{D}$ dairesini tümleyeni $\mathbb{C}$ ye göre konveks olan bir kümeye konform olarak resmeder.
- $f(\mathbb{D})$'nin ∞'da açılma açısı α, $\alpha \in (1,2]$ iken $\pi\alpha$ değerine eşit veya bu değerden daha azdır.

Konkav fonksiyonlarla ilgili daha detaylı bilgi için Avkhadiev vd. (2006), Cruz vd. (2007) kaynakları kullanılabilinir.

Bhowmik vd. (2010) f analitik fonksiyonunun $\mathbb{D}$ dairesini $\pi\alpha$ açılı konkav bir bölge üzerine resmetmesi için gerek ve yeter şartın

$$P_f(z) = \frac{2}{\alpha - 1}\left[\frac{\alpha + 1}{2} \frac{1+z}{1-z} - 1 - z\frac{f''(z)}{f'(z)} \right]$$

iken $\mathrm{Re}P_f(z) > 0$ olması gerektiğini göstermiştir. $\mathcal{S}^*$ yıldızıl fonksiyonların sınıfını göstersin. Aşağıdaki teorem Bhowmik vd. (2010) tarafından bu karakterizasyon kullanılarak ispat edilmiştir.

2.5 Teorem. $\alpha \in (1,2]$ iken $f \in C_0(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\Lambda_{\phi}(z)=\int_0^z \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\left(\frac{t}{\phi(t)}\right)^{(\alpha-1)/2} dt \qquad (9)$$

iken $f(z)=\Lambda_{\phi}(z)$ olacak şekilde $\phi \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

2.6 Lemma. $g(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots \in \mathcal{S}^*$ olsun. Bu taktirde

$$|a_3-\lambda {a_2}^2| \leq \max\{1,|3-4\lambda|\}$$

dir. Eşitlik, $|\lambda-3/4| \geq 1/4$ iken k Koebe fonksiyonu için, $|\lambda-3/4| \leq 1/4$ iken $\left(k(z^2)\right)^{1/2}=z/(1-z^2)$ fonksiyonu için sağlanır (Koepf, 1987).

Teorem 2.5 den hareketle (1) formundaki f fonksiyonunun $C_0(\alpha)$ sınıfında olması için gerek ve yeter şart

$$f'(z)=\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}}\left(\frac{z}{\Psi_n\phi(z)}\right)^{(\alpha-1)/2} \qquad (10)$$

olacak şekilde $\phi(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\phi_n z^n$ formunda bir $\phi \in \mathcal{S}_{\Psi}$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

$$f(z)=z+\sum_{n\geq 2} a_n z^n \text{ ve}$$

$$\phi(z)=z+\sum_{n\geq 2}\phi_n z^n$$

denir, (10) bağıntısındaki z ve z^2 nin katsayıları eşitlenirse,

$$a_2=\frac{\alpha+1}{2}-\frac{\alpha-1}{4}\Psi_2\phi_2$$

$$a_3=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}-\frac{\alpha^2-1}{6}\Psi_2\phi_2 -\frac{\alpha-1}{6}\Psi_3\phi_3+\frac{\alpha^2-1}{24}(\Psi_2)^2{\phi_2}^2$$

elde edilir. Buradan yola çıkılarak $a_3-\lambda {a_2}^2$ ifadesi hesaplanırsa

$$a_3-\lambda {a_2}^2=\frac{(\alpha+1)^2}{4}\left[\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}-\lambda\right] +\left(\frac{\alpha^2-1}{4}\right)\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)\Psi_2\phi_2 -\frac{\alpha-1}{6}\Psi_3\left[\phi_3 -\left(\frac{2(\alpha+1)-3\lambda(\alpha-1)}{8\Psi_3}\right)(\Psi_2)^2{\phi_2}^2\right] \qquad (11)$$

bulunur. λ nın aldığı değer aralıklarına göre birkaç durumda $|a_3-\lambda {a_2}^2|$ fonksiyonunun maksimum değeri incelenecektir.

1. Durum. $\lambda \in \left(-\infty, \frac{2(\alpha+1)\left((\Psi_2)^2-8\Psi_3\right)}{3(\Psi_2)^2}\right)$ olsun. Bu varsayım

$$\frac{2(\alpha+1)(\Psi_2)^2-3\lambda(\alpha-1)(\Psi_2)^2}{8\Psi_3} \geq 1$$

eşitsizliğine denktir ve son ifadedeki ilk terim negatif değildir. (11) eşitliğinin son terimine Lemma 2.6 uygulanır ve $|\phi_2| \leq 2/\Psi_2$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$|a_3-\lambda {a_2}^2| \leq \frac{\alpha^2+5}{6}+\frac{(\alpha^2-1)\Psi_2(\Psi_2+2\Psi_3)}{6\Psi_3} -\lambda\left[\frac{(\alpha+1)^2\Psi_3+2\Psi_3\Psi_2(\alpha^2-1)}{4\Psi_3} +\frac{(\Psi_2)^2(\alpha-1)^2}{4\Psi_3}\right] \qquad (12)$$

elde edilir.

2. Durum. $\lambda \geq \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}$ olsun. Bu (11) eşitliğinin ilk teriminin pozitif olmadığını gösterir. Böylece $\lambda \geq 2/3$ elde edilir. Buradan

$$\left(\frac{2(\alpha+1)-3\lambda(\alpha-1)}{8}\right)\frac{(\Psi_2)^2}{\Psi_3} \le \frac{(\Psi_2)^2}{2\Psi_3}$$

bulunur. Lemma 2.6 dan

$$\left|\phi_3 - \left(\frac{2(\alpha+1)-3\lambda(\alpha-1)}{8}\right)\phi_2{}^2\frac{(\Psi_2)^2}{\Psi_3}\right| \le 3 - \frac{2}{\Psi_3}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ve $|\phi_2| \le 2/\Psi_2$ eşitsizliği (11) eşitliğinde kullanılarak yukarıdaki eşitsizlik düzenlenirse

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| \le \frac{\alpha-1}{2} - \left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} + (\alpha^2-1)\Psi_3 - \frac{\alpha-1}{2\Psi_3}\right) + \lambda\left(\frac{(\alpha+1)^2}{4} + \frac{(\alpha^2-1)\Psi_3}{2} - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}\right) \quad (13)$$

elde edilir.

3. Durum. Bu Fekete-Szegö probleminin tam çözümünü elde etmek için

$$\lambda \in \left(\frac{2(\alpha+1)((\Psi_2)^2 - 8\Psi_3)}{3(\Psi_2)^2(\alpha-1)}, \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}\right)$$

durumunu da göz önünde bulundurmak gereklidir. Bu durum için (10) ve (11) formülleri dikkate alınırsa $w: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ diskinde analitik ve

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

tipinde Taylor seri açılımına sahip iken $\phi \in \mathcal{S}_\Psi^*$ için

$$\frac{z(\Psi_n \phi(z))'}{\Psi_n \phi(z)} = \frac{1+zw(z)}{1-zw(z)} \quad (14)$$

temsil formülü kullanılır. (14) eşitliğinde Taylor seri açılımları sırasıyla yerlerine konulup z ve z^2 terimlerinin katsayıları eşitlenirse

$$\phi_2 = \frac{2c_0}{\Psi_2} \quad \text{ve} \quad \phi_3 = \frac{c_1 + 3c_0{}^2}{\Psi_3} \quad (15)$$

elde edilir. Bu değerler (11) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} A = \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} - \lambda\dfrac{(\alpha+1)^2}{4}, \\ B = (\alpha^2-1)\left(\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{3}\right), \\ C = -\dfrac{(\alpha-1)\big(4-2\alpha+3\lambda(\alpha-1)\big)}{12}, \\ D = -\dfrac{\alpha-1}{6} \end{cases}$$

olmak üzere

$$a_3 - \lambda a_2{}^2 = \frac{(\alpha+1)^2}{4}\left(\frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)} - \lambda\right) + \frac{\alpha^2-1}{4}\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)c_0 + \left(-\frac{\alpha-1}{2} + \frac{\alpha^2-1}{6} - \frac{\lambda(\alpha-1)^2}{4}\right)c_0{}^2 - \frac{\alpha-1}{6}c_1 =: A + Bc_0 + Cc_0{}^2 + Dc_1$$

elde edilir. $|c_0| \le 1$ ve $|c_1| \le 1 - |c_0|^2$ olduğu bilinmektedir. Bu eşitsizlikler kullanılarak

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| = |A + Bc_0 + Cc_0{}^2 + Dc_1| \le |A + Bc_0 + Cc_0{}^2| + |D|(1 - |c_0|^2) \quad (16)$$

elde edilir. $c_0 = re^{i\theta}$ olsun. Şimdi (16) ifadesinin maksimum değerini bulalım. Bunun için ilk olarak r sabit, θ değişken değerler alırken $|A + Bc_0 + Cc_0{}^2|$ ifadesinin maksimum değeri araştırılmalıdır. c_0 değerleri yerine konulup hesaplama yapılırsa

$$\begin{aligned}
&|A + Bc_0 + Cc_0{}^2|^2 \\
&= \left|A + Bre^{i\theta} + Cr^2e^{2i\theta}\right|^2 \\
&= (A - Cr^2)^2 + B^2r^2 \\
&\qquad + (2ABr + 2BCr^3)^2\cos\theta \\
&\qquad + 4ACr^2(\cos\theta)^2 \\
&=: f(r,\theta) \qquad (17)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan $|a_3 - \lambda a_2{}^2|$ ifadesinin üst sınırını elde etmek için r, $(0,1]$ aralığında değerler alırken $f(r,\theta)$ maksimum fonksiyonunun en büyük değeri bulunmalıdır. (15) eşitliğinde $\cos\theta = x$ değişken değişimi yapılırsa $x \in [-1,1]$ için

$$\begin{aligned}
&h(x) = (A - Cr^2)^2 + B^2r^2 \\
&+(2ABr + 2BCr^3)^2x + 4ACr^2x^2 \qquad (18)
\end{aligned}$$

olur. Buradan yedi farklı durum ortaya çıkar.

Durum 3.1. $\lambda \in \left(\frac{2(\alpha+1)((\Psi_2)^2-8\Psi_3)}{3(\Psi_2)^2(\alpha-1)}, \frac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}\right)$ olsun. Bu aralıkta $r \in [0,1)$ için $C > 0$, $B < 0$ ve $A + Cr^2 > 0$ olduğundan $h(x)$ fonksiyonu maksimum değerine herhangi $r \in [0,1)$ için $x = -1$ de ulaşır. Böylece

$$g(r) = A - Br + Cr^2 + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2)$$

olmak üzere $g(r)$ fonksiyonunun maksimum değerinin bulunması gerekir.

$$g'(r) = -B + 2Cr - \frac{\alpha - 1}{3}r$$

olup

$$g'(0) = -B > 0$$

ve

$$\begin{aligned}
g'(1) &= -B + 2C - \frac{\alpha - 1}{3} \\
&= \frac{\alpha - 1}{6}\big(-6\lambda + 4(\alpha - 1)\big) \\
&> 0
\end{aligned}$$

olduğundan fonksiyon maksimum değerini $r = 1$ sınırında alır. Bu ise

$$\begin{aligned}
|a_3 - \lambda a_2{}^2| &\le g(r) \\
&\le g(1) \\
&= A - B + C = \frac{2\alpha^2 + 1}{3} - \lambda\alpha^2 \qquad (19)
\end{aligned}$$

olduğunu gösterir.

Durum 3.2. $\lambda = \frac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}$ ise $C = 0$ olup h lineer fonksiyonu maksimum değerine $x = -1$ de ulaşır. Yine Durum 3.1 deki hususlar geçerli olup $|a_3 - \lambda a_2{}^2|$ ifadesinin maksimum değerinin yukarıdaki gibi $g(1)$ olduğu görülür.

Durum 3.3. $\lambda \in \left(\frac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}, \frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}\right)$ olsun. İlk olarak $x \in [-1,1]$ için ikinci dereceden h fonksiyonunun bu aralıkta monoton azalan olduğunu göstermek gerekir. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu maksimum değerini

$$x(r) = \frac{-B(A + Cr^2)}{4ACr} = \frac{-B}{4}\left(\frac{1}{Cr} + \frac{r}{A}\right)$$

de aldığından $x(r)$ nin monoton artan ve $x(1) < -1$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Burada $x(r)$ nin monoton artan olduğu açıktır. $x(1) < -1$ olması ise

$$j(\lambda) = \alpha^2(3\lambda - 2)^2 - 4 + 3\lambda > 0$$

ifadesine denktir. Böylece $|a_3 - \lambda a_2{}^2|$ ifadesi için Durum 3.1 ve Durum 3.2 dekilere benzer bir üst sınır elde edilir. Sonuç olarak Durum 3.1, 3.2 ve 3.3 de,

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| \le \frac{2\alpha^2 + 1}{3} - \lambda\alpha^2$$

dir.

Durum 3.4. $\lambda \in [\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}, \frac{2}{3})$ olsun. $j(\lambda) = 0$ eşitliğini sağlayan değerler

$$\lambda_1 = \frac{4\alpha^2 - 1 - \sqrt{8\alpha^2 + 1}}{6\alpha^2}$$
$$\lambda_2 = \frac{4\alpha^2 - 1 + \sqrt{8\alpha^2 + 1}}{6\alpha^2} \qquad (20)$$

dir. Dikkat edilirse $\lambda_2 > \lambda_1$ dir. $\lambda \in [\frac{2(\alpha-1)}{3\alpha}, \lambda_1)$ için h fonksiyonu en büyük değerini $x = -1$ noktasında alır ve g fonksiyonu maksimum değerine

$$r_m = \frac{-B}{-2C + \frac{\alpha-1}{3}} \in (0,1]$$

iken ulaşır. Buradan Fekete-Szegö fonksiyonelinin maksimumu

$$g(r_m) = A - Br_m + Cr_m{}^2 = \frac{\alpha(10-9\lambda) - (3\lambda - 2)}{9(2-\lambda) + 3\alpha(3\lambda - 2)}$$

dir. $\lambda \in [\lambda_1, \frac{2}{3})$ için $(0,1]$ aralığında $x(r) = -1$ eşitliğinin tek çözümü

$$r_0 = \frac{B}{2C\left(1 + \sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}\right)} \in (0,1]$$

eşitliği ile elde edilir. $\lambda < \frac{2}{3}$ için $r_m < r_0$ olduğu açıktır. Dahası $r \geq r_0$ için

$$k(r) = \sqrt{h\big(x(r)\big)} + \frac{\alpha-1}{6}(1-r^2) = (A - Cr^2)\sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}} + \frac{\alpha-1}{6}(1-r^2)$$

fonksiyonu monoton azalandır. Buradan anlaşılıyor ki bu durumdaki aralık için de $|a_3 - \lambda a_2{}^2|$ nin maksimum değeri $g(r_m)$ fonksiyonu ile bulunur. Ekstremal fonksiyon $\mathbb{D}$ bölgesini sonsuzluğa $\pi\alpha$ dereceden daha az açılma açısına sahip kama biçimli ve Bhowmik vd. (2010) örneğindeki gibi sonlu bir köşeye sahip bir bölgeye resmeder.

Durum 3.5. $\lambda = \frac{2}{3}$ için $B = 0$ ve $C = -\frac{\alpha-1}{6}$ dır. Böylece maksimum değer herhangi bir $r \in (0,1]$ ve $\cos\theta = 0$ için sağlanır. Tüm durumlarda kesin üst sınır olarak $|a_3 - \lambda a_2{}^2| = \frac{\alpha}{3}$ elde edilir. Ekstremal fonksiyon $\mathbb{D}$ diskini sonsuzluğa $\pi\alpha$ dereceden daha az açılma açısına sahip ve Bhowmik vd. (2010) örneğindeki gibi sonlu iki köşeye sahip bir bölgeye resmeder. Sonuç olarak Durum 3.4 ve Durum 3.5 de

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| \leq \frac{\alpha(10-9\lambda) - (3\lambda-2)}{9(2-\lambda) + 3\alpha(3\lambda-2)} \qquad (21)$$

elde edilir.

Durum 3.6. $\lambda \in (2/3, \lambda_2]$ olsun. $B > 0$ olduğundan $x(r)$ fonksiyonu monoton azalan olur. $(0,1]$ aralığında $x(r) = 1$ eşitliğinin tek çözümü

$$r_1 = \frac{B}{-2C\left(1 + \sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}\right)} \in (0,1]$$

eşitliği ile elde edilir. $r < r_1$ için $h(x) \leq h(1)$ elde edilir.

$$l(r) = A + Br + Cr^2 + \frac{\alpha - 1}{6}(1 - r^2)$$

fonksiyonu göz önüne alınırsa, bu fonksiyon $r_n > r_1$ için

$$r_n = \frac{B}{-2C + \frac{\alpha-1}{3}}$$

noktasında maksimum değerini alır. $k(r)$ monoton artan olduğundan Fekete-Szegö fonksiyonelinin $\cos\theta_0 = \frac{-B(A+C)}{4AC}$ iken $c_0 = e^{i\theta_0}$ için elde edilen

$$k(1) = (A - C)\sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}$$
$$= \alpha(1-\lambda)\sqrt{\frac{12(1-\lambda)}{(4-3\lambda)^2 - \alpha^2(3\lambda-2)^2}}$$

şeklinde bir maksimum değeri vardır. Böylece ekstremal fonksiyon

$$f'(z) = \frac{\left(1 - ze^{i\theta_0}\right)^{\alpha-1}}{(1-z)^{\alpha+1}}$$

kompleks diferansiyel denkleminin çözümü ile belirlenir. Sonuç olarak $\lambda \in (2/3, \lambda_2]$ için

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| \le \alpha(1-\lambda)\sqrt{\frac{12(1-\lambda)}{(4-3\lambda)^2 - \alpha^2(3\lambda-2)^2}} \quad (22)$$

elde edilir.

Durum 3.7. $\lambda \in \left(\lambda_2, \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}\right)$ olsun. Bu tipteki λ değerleri için $x(1) < -1$ olduğundan

$$r_2 = \frac{B}{-2C\left(1 - \sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}\right)}$$

sayısı $x(r_2) = -1$ ve $r_2 \in (0,1)$ şartlarını sağlar. $r \le r_2$ için önceki durumlardaki benzer hususlar yazılabilir örneğin $r \le r_1$ için $l(r)$ maksimum değeri alır ve $r \in (r_1, r_2]$ için $k(r)$ fonksiyonu benzer roldedir. $r > r_2$ için $x(r)$ noktası $[-1,1]$ aralığında değildir. Dolayısıyla problemdeki maksimum değer $x = -1$ veya $x = 1$ için geçerlidir. Şu anki çalıştığımız λ değerleri için $A + C < 0$ ve $-A - Cr^2 > 0$ ve $c_0 = -r$ için (16) nın maksimum değeri $x = -1$ için sağlanır. Böylece $r \in (r_2, 1]$ için

$$n(r) = -A + Br - Cr^2 + \frac{\alpha-1}{6}(1 - r^2)$$

maksimum fonksiyonudur. $-C > (\alpha-1)/6$ ve $B > 0$ olduğundan bu aralıkta $n(r) \le n(1)$ elde edilir. Dolayısıyla da

$$\lambda \in (\lambda_2, \frac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}]$$

için

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| \le n(1) = -A + B - C$$
$$= \lambda\alpha^2 - \frac{2\alpha^2+1}{3}$$

elde edilir. (12), (13), (19), (21), (22) ve Durum 3.7 aşağıdaki teoremi verir.

2.7 Teorem. $\alpha \in (1,2]$ için $f \in C_0(\alpha)$ fonksiyonu (1) tipinde bir açılıma sahip olsun. λ_2, (20) eşitliğindeki gibi tanımlansın. O halde

$$|a_3 - \lambda a_2{}^2| \le \begin{cases} \dfrac{\alpha^2+5}{6} + \dfrac{(\alpha^2-1)\Psi_2(\Psi_2+2\Psi_3)}{6\Psi_3} \\ -\lambda\left[\dfrac{(\alpha+1)^2\Psi_3 + 2\Psi_3\Psi_2(\alpha^2-1) + (\Psi_2)^2(\alpha-1)^2}{4\Psi_3}\right], & \lambda \in (-\infty, \dfrac{2(\alpha+1)((\Psi_2)^2 - 8\Psi_3)}{3(\Psi_2)^2}] \\ \dfrac{2\alpha^2+1}{3} - \lambda\alpha^2, & \lambda \in \left[\dfrac{2(\alpha+1)((\Psi_2)^2-8\Psi_3)}{3(\Psi_2)^2(\alpha-1)}, \dfrac{2(\alpha-2)}{3(\alpha-1)}\right] \\ \dfrac{\alpha(10-9\lambda)-(3\lambda-2)}{9(2-\lambda)+3\alpha(3\lambda-2)}, & \dfrac{2(\alpha-1)}{3\alpha} \le \lambda \le \dfrac{2}{3} \\ \alpha(1-\lambda)\sqrt{\dfrac{12(1-\lambda)}{(4-3\lambda)^2-\alpha^2(3\lambda-2)^2}}, & \dfrac{2}{3} \le \lambda \le \lambda_2 \\ \lambda\alpha^2 - \dfrac{2\alpha^2+1}{3}, & \lambda_2 \le \lambda \le \dfrac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)} \\ \dfrac{\alpha-1}{2} - \left(\dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6} + (\alpha^2-1)\Psi_3 - \dfrac{\alpha-1}{2\Psi_3}\right) \\ +\lambda\left(\dfrac{(\alpha+1)^2}{4} + \dfrac{(\alpha^2-1)\Psi_3}{2} - \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}\right), & \lambda \in \left[\dfrac{2(\alpha+2)}{3(\alpha+1)}, \infty\right) \end{cases}$$

dir. Sınırın, herhangi bir α için λ nın sürekli bir fonksiyonu olduğunu ve λ nın bazı değerleri için aynı sınır için iki farklı ifadeden söz edilebildiğini vurgulamakta yarar vardır. Eşitsizlikler kesindir.

3. Kaynaklar

Alexander, J. W. 1915. “Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions” *Ann. of Math.*, 17, 12-22.

Attiya, A. A., Hakami, A. H. 2013. “Some subordination results associated with generalized Srivastava-Attiya operatör” *Adv. Difference Equ.*, 105.

Avkhadiev, F. G. and Wirths, K. J. 2002. “Convex holes produce lower bounds for coefficients” *Complex Variables, Theory and Application*, 47, 556-563.

Avkhadiev, F. G., Pommerenke, C. and Wirths, K. J. 2006. “Sharp inequalities for the coefficients of concave schlicht functions” *Comment. Math. Helv.*, 81, 801-807.

Bernardi, S. D. 1969. “Convex and starlike univalent functions” *Trans. Amer. Math. Soc.*, 135, 429-446.

Bhowmik, B., Ponnusamy, S. ve Wirths, K. J. 2010. “Characterization and the pre-Schwarzian norm estimate for concave univalent functions” Monatsh. Math., 161, 59-75.

Choi, J., Srivastava, H. M. 2005. “Certain families of series associated with the Hurwitz-Lerch Zeta function” *Appl. Math. Comput.* 170, 399-409.

Cruz, L., Pommerenke. 2007. “On concave univalent functions” *Complex Var. and Elliptic Equ.*, 52, 153-159.

Dziok, J., Srivastava, H. M. 2003. “Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function” *Integral Transforms Spec. Funct.* 14, 7-18.

Dziok, J., Srivastava, H. M. 1999. “Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function” *Appl. Math. Comput*. 103, 1-13.

Fekete, M., Szegö, G. 1933. “Eine Bumerkung Über Ungerade Schlict Funktionen” *J. Lond. Math. Soc*. 8, 85-89.

Ferreira, C., Lopez, J. L. 2004. “Asymptotic expansions of the Hurwitz-Lerch Zeta function” *J. Math. Anal. Appl.,* 298, 210-224.

Kiryakova, V. 2011. “Criteria for univalence of the Dziok-Srivastava and the Srivastava-Owa operators in the class A” *Appl. Math. Comput*., 218, 883-892.

Koepf, W. 1987. “On the Fekete-Szegö problem for close –to-convex functions” *Proc. Amer. Math. Soc*., 101, 420-433.

Kutbi, M. A., Attiya, A. A. 2012. “Differential subordination results for certain integrodifferential operator and its applications” *Abst. Appl. Anal.*,2012, 1-13.

Libera, R. J. 1965. **“**Some classes of regular univalent functions” *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16, 755-758.

Lin, S. D., Srivastava, H. M. 2006. “Wang, P. Y. Some espansion formulas for a class of generalized Hurwitz-Lerch Zeta functions” *Integral Transform. Spec. Funct*., 17, 817-827.

Ling, Y., Liu, F. S. 2005. “The Choi-Saigo-Srivastava integral operator and a class of analytic functions” *Appl. Math. Comput.*, 165, 613--621.

Livingston, A. E. 1966. **“**On the radius of univalence of certain analytic functions” *Proc. Amer. Math. Soc*., 17, 352-357.

Murugusundaramoorthy, G. 2014. “Coefficient estimate of bi-Bazilevic function defined by Srivastava-Attiya operatör” *Le Matematiche*, 69 (2) 45-56.

Ruscheweyh, S. 1975. **“**New criteria for univalent functions” *Proc. Amer. Math. Soc.* 49, 109-115.

Srivastava, H. M. 2007. “Some Fox-Wright generalized hypergeometric functions and associated families of convolution operators” *Appl. Anal. Discrete Math.*, 1, 56-71.

Srivastava, H. M., Attiya, A. A. 2007. “An integral operator associated with the Hurwitz-Lerch Zeta function and differential subordination” *Integral Transform. Spec. Funct.,* 18, 207-216.

Srivastava, H. M., Choi, J. (2001). “Series Associated with the Zeta and Related Functions” *Kluwer Academic,* Boston, Mass. USA, 388s.