EÜFBED - Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi Cilt-Sayı: 4-2 Yıl: 2011 113-124

STURM–LİOUVİLLE FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

SPECTRAL PROPERTIES OF THE STURM–LIOUVILLE DIFFERENCE OPERATOR

Aytekin ERYILMAZ[1*] ve Bilender PAŞAOĞLU[2]

[1]*Nevşehir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Nevşehir Türkiye*

[2]*Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Isparta, Türkiye*

Geliş Tarihi: 11 Mart 2011 **Kabul Tarihi:** 11 Nisan 2011

ÖZET

Bu çalışmada öncelikle konunun tarihsel gelişimi anlatılmıştır. Daha sonra Sturm-Liouville fark sınır değer problemi ele alınmış ve bu probleme uygun maksimal disipatif operatör oluşturulmuştur. Sturm-Liouville fark sınır değer problemi ve disipatif operatörün özvektörler ve asosye vektörler sistemi incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Kendine eş olmayan operatör, disipatif operatör, maksimal operatör, Sturm–Liouville fark operatörü.

ABSTRACT

In this study, firstly the historical progress of the subject is considered. Then, Sturm-Liouville difference boundary value problem is studied and maximal dissipative operator is constructed. Furthermore eigenvectors and associated vectors of the dissipative operator and Sturm-Liouville difference boundary value problem are investigated.

Key words: Non-selfadjoint operator, dissipative operator, maximal operator, Sturm–Liouville difference operator.

1. GİRİŞ

Doğada gerçekleşen fiziksel olayların incelenmesi, fizik alanında bilimsel gelişmelere yol açmıştır. Fizik alanındaki bu bilimsel çalışmalar matematik biliminin gelişmesinde büyük ölçüde

* Sorumlu yazar: eryilmazaytekin@gmail.com

etkili olmuştur. Matematiksel fiziğin ve mühendisliğin pek çok problemi diferansiyel denklemlerden oluşan sınır değer problemleri içermektedir. İlk defa 1836 yılında Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ortaya konulan, literatürde Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan sınır değer problemi de bu problemlerden birisidir. Başlangıçta ısı iletimi problemlerine uygulanan Sturm-Liouville teorisi günümüzde birçok fiziksel problemin araştırılmasında en etkin yöntemlerden biri olarak bilinmektedir. Bu problemler Fourier yöntemi(değişkenlerine ayırma) ile incelendiğinde elde edilen denklemin sınır şartlarında da spektral parametre bulunduğu görülür. Bu nedenle literatürde sınır şartlarında spektral parametre bulunduran ve bulundurmayan Sturm-Liouville problemleri ile ilgili çok sayıda çalışmalar vardır (Allahverdiev, 2004 ve 2005; Eryılmaz, 2006; Shi and Chen, 1999; Fulton, 1977; Walter, 1973; Welstead 1982).

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumlarda, $y(x)$'in değişimi $y(x)$ fonksiyonunun türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x'in sürekli olmadığı discrete (kesikli) değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bundan dolayı, bu çalışmada x'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu Sturm-Liouville fark denklemleri üzerinde durulacaktır.

Bu çalışmada kendine eş olmayan Sturm-Liouville fark operatörünün sınır koşulları, sınır değer problemine karşılık gelen operatörün spektral özellikleri incelenmiştir. Daha sonra problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiştir.

2. SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN STURM–LİOUVİLLE FARK OPERATÖRÜ

$n \in Z := \{0, \pm 1, \pm 2, ...,\}$ olmak üzere y_n kompleks sayılarının dizisi $y = \{y_n\}$ olsun. Bileşenleri $(\ell y)_n$ olan ly dizisi için

$$(ly)_n := -a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n - a_n y_{n+1} = \lambda w_n y_n \qquad (2.1)$$

ikinci mertebeden fark denklemini (Sturm – Liouville fark denklemini) ele alalım. Burada λ bir spektral parametre, $w_n > 0,\ a_n \neq 0$ ve $a_n, b_n \in R := (-\infty, +\infty)$ $n \in Z$ olsun.

Eğer $p_n = a_n,\ q_n = b_n - a_n - a_{n-1}$ ve $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ ifadeleri (2.1) denkleminde yazılırsa Sturm – Liouville biçiminde

$$-\Delta\left(p_{n-1}\Delta y_{n-1}\right) + q_n y_n = \lambda w_n y_n \quad (n \in Z) \tag{2.2}$$

fark denklemi elde edilir. $y = \{y_n\}$ ve $z = \{z_n\}$ dizileri için

$$[y,z]_n := a_n(y_n \bar{z}_{n+1} - y_{n+1} \bar{z}_n) \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlanan bileşenleri $[y,z]_n$ olan dizi, $[y,z]$ olsun.

Tanım 1: Her $m, n \in Z$ ve $n < m$ için

$$\sum_{j=n}^{m}\left\{w_j(\ell y)_j \bar{z}_j - w_j y_j (\ell \bar{z})_j\right\} = [y,z]_m - [y,z]_{n-1} \tag{2.4}$$

eşitliğine Green formülü adı verilir (Allahverdiev, 2004). Keyfi $y = \{y_n\}$ dizisi için $(\ell y)_n = w_n^{-1}(\ell y)_n$ biçiminde tanımlanan bileşenleri $(\ell y)_n$ olan diziyi ℓy ile gösterelim. $(y,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n y_n \bar{z}_n$ iç çarpımını oluşturup , $\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n |y_n|^2 < \infty$ koşulunu sağlayan bütün kompleks değerli y dizilerinin oluşturduğu $\ell_w^2(Z)$ $(\mathrm{w} := \{\mathrm{w}_n\},\ n \in Z)$ Hilbert uzayını kuralım. $\ell y \in \ell_w^2(Z)$ olacak şekilde $y \in \ell_w^2(Z)$ vektörlerinin kümesini D ile gösterelim. $Ly = \ell y$ konularak D de bir L maksimal operatörü tanımlayalım. $y,z \in D$ vektörleri için $[y,z]_\infty = \lim_{n\to\infty}[y,z]_n$ ve $[y,z]_{-\infty} = \lim_{n\to-\infty}[y,z]_n$ limitlerinin varlığı ve sonlu olduğu (2.4) formülünden elde edilir. Bundan dolayı, $n \to -\infty$ ve $n \to \infty$ için (2.4) de limite geçilirse, $y,z \in D$ için

$$(Ly,z) - (y,Lz) = [y,z]_\infty - [y,z]_{-\infty} \tag{2.5}$$

elde edilir. Sonlu sayıdaki elemanı sıfırdan farklı olan $y = \{y_n\}$ dizilerinin kümesi üzerinde $L_0^{\prime} y = Ly$ ile tanımlı $L_0^{\prime}$ simetrik operatörünün kapanışını L_0 ile gösterelim. L_0 oparetörü simetriktir ve $L_0^* = L$ dir (Naimark, 1968).

L_0 ın indis defektinin hesaplanması, yarı doğru üzerindeki indis defektinin hesaplanmasına indirgenebilir. Aslında $\ell_w^2(Z)$, $\ell_w^2(N_-)$ $\left(N_- = \{-1,-2,-3,...,\}\right)$ ve $\ell_w^2(N_+)$ $\left(N_+ = \{0,1,2,...\}\right)$ uzaylarının ortogonal toplamıdır. $\ell_w^2(N_-)$ ve $\ell_w^2(N_+)$ uzaylarında ℓ ile üretilen minimal (maksimal) operatörler $L_0^-(L_-)$ ve $L_0^+(L_+)$ olsun ve $D_0^{\mp}(D_{\mp})$, $L_0^{\mp}(L_{\mp})$ operatörlerinin tanım kümesi olsun. $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ için L_0 ın defekt sayısı $def\, L_0 := \dim\{(L_0 - \lambda I)D(L_0)\}^{\perp}$ için $defL_0 = defL_0^- + defL_0^+$ eşitliği sağlanır. Bu ise $k = 0,1,2$ olmak üzere L_0 ın indis defektinin (k,k) biçiminde olduğunu gerektirir. (0,0) indis defekti için L_0 operatörü kendine eştir. Yani $L_0^* = L_0 = L$ dir.

Kabul edelim ki simetrik L_0 operatörünün indis defekti (2,2) olsun. $\pm\infty$ da Weyl limit çember durumlarını garanti eden yeterli koşullar vardır (Atkinson, 1964; Welstead, 1982).

L_0 ın tanım kümesi

$$[y,z]_{\infty} - [y,z]_{-\infty} = 0 \qquad (z \in D) \tag{2.6}$$

koşulunu sağlayan $y \in D$ vektörlerini içerir.

$$P_{-1}^{(1)}(\lambda) = 0,\ P_0^{(1)}(\lambda) = 1,\ P_{-1}^{(2)}(\lambda) = -\frac{1}{a-1},\ P_0^{(2)}(\lambda) = 0 \tag{2.7}$$

koşullarını sağlayan (2.1) denkleminin çözümlerini $P^{(1)}(\lambda) = \{P_n^{(1)}(\lambda)\}$ ve $P^{(2)}(\lambda) = \{P_n^{(2)}(\lambda)\}$ ile gösterelim. (2.1) denkleminin $y = \{y_n\}$ ve $z = \{z_n\}$ çözümlerinin Wronskiyeni $W_n(y,z) = [y,\bar{z}]_n$ olacak şekilde $W_n(y,z) = a_n(y_n z_{n+1} - y_{n+1} z_n)$ biçiminde tanımlanır. Bu çözümler n ye bağlı değildir ve bu iki çözümün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul Wronskiyeninin sıfırdan farklı olmasıdır. (2.7) koşulundan $W_n(P^{(1)},P^{(2)})=1$ olduğu elde edilir. $P^{(1)}(\lambda)$ ve $P^{(2)}(\lambda)$, (2.1) denkleminin çözümlerinin temel sistemini oluşturur ve her $\lambda\in C$ için $P^{(1)}(\lambda)$, $P^{(2)}(\lambda)\in\ell_w^2(Z)$ dır. $u=P^{(1)}(0)$ ve $v=P^{(2)}(0)$ olsun. $u=\{u_n\}$ *ve* $v=\{v_n\}$ reel sayılar dizisi ve $[u,v]_n=1$ olduğundan (2.3) denkleminin tabanı olduğu görülür (Allahverdiev, 2004).

Lemma 2: Keyfi $y=\{y_n\}$ ve $z=\{z_n\}\in D$ vektörleri için

$$[y,z]_n=[y,u]_n\left[\overline{z},v\right]_n-[y,v]_n\left[\overline{z},u\right]_n,\quad (n\in Z\cup\{-\infty,+\infty\}) \tag{2.8}$$

eşitliği sağlanır (Allahverdiev, 2004).

İspat: (2.3) denkleminden ve $[u,v]_n=1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&[y,u]_n[\overline{z},v]_n-[y,v]_n[\overline{z},u]_n\\
&=\left(y_nu_{n+1}-u_ny_{n+1}\right)\left(\overline{z}_nv_{n+1}-v_n\overline{z}_{n+1}\right)-\left(y_nv_{n+1}-v_ny_{n+1}\right)\left(\overline{z}_nu_{n+1}-u_n\overline{z}_{n+1}\right)\\
&=y_nu_{n+1}\overline{z}_nv_{n+1}-y_nu_{n+1}v_n\overline{z}_{n+1}-u_ny_{n+1}\overline{z}_nv_{n+1}+u_ny_{n+1}v_n\overline{z}_{n+1}\\
&-y_nv_{n+1}\overline{z}_nu_{n+1}+y_nv_{n+1}u_n\overline{z}_{n+1}+v_ny_{n+1}\overline{z}_nu_{n+1}-v_ny_{n+1}u_n\overline{z}_{n+1}\\
&=y_nv_{n+1}u_n\overline{z}_{n+1}-y_nu_{n+1}v_n\overline{z}_{n+1}+v_ny_{n+1}\overline{z}_nu_{n+1}-u_ny_{n+1}\overline{z}_nv_{n+1}\\
&=y_n\overline{z}_{n+1}\left(v_{n+1}u_n-v_nu_{n+1}\right)+y_{n+1}\overline{z}_n\left(v_nu_{n+1}-u_nv_{n+1}\right)\\
&=\left(y_n\overline{z}_{n+1}-y_{n+1}\overline{z}_n\right)\left(v_{n+1}u_n-v_nu_{n+1}\right)\\
&=[y,\overline{z}]_n[u,v]_n\\
&=[y,\overline{z}]_n\ (n\in Z\cup\{-\infty,+\infty\})
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3: L_0 operatörünün tanım bölgesi D_O,

$$[y,u]_{-\infty}=[y,v]_{-\infty}=[y,u]_{\infty}=[y,v]_{\infty}=0 \tag{2.9}$$

sınır koşullarını sağlayan $y \in D$ vektörlerini içerir (Allahverdiev, 2004).

İspat: Lemma (2.2) den (2.6) denklemi

$$[y,u]_{\infty}\left[\bar{z},v\right]_{\infty}-[y,v]_{\infty}\left[\bar{z},u\right]_{\infty}-[y,u]_{-\infty}\left[\bar{z},v\right]_{-\infty}-[y,v]_{-\infty}\left[\bar{z},u\right]_{-\infty}=0 \quad (2.10)$$

denklemine denktir. Üstelik $\left[\bar{z},u\right]_{-\infty}$, $\left[\bar{z},v\right]_{-\infty}$, $\left[\bar{z},u\right]_{\infty}$ ve $\left[\bar{z},v\right]_{\infty}$ keyfi olabilir. Bundan dolayı, her $z \in D$ için (2.10) denkleminin mümkün olması için gerek ve yeter koşul (2.9) koşullarının sağlanmasıdır. Teorem ispatlanır.

$(-\infty,\infty)$ aralığında (2.1) fark ifadesi için sonsuzda disipatif, spektral parametrenin aralığın sol uç noktasında verilmesi durumunda aşağıdaki sınır değer problemini düşünelim.

$$\ell(y)=\lambda y,\ y \in D \quad (n \in Z) \qquad (2.11)$$

$$\alpha_1[y,v]_{-\infty}-\alpha_2[y,u]_{-\infty}=\lambda\left(\alpha_1'[y,v]_{-\infty}-\alpha_2'[y,u]_{-\infty}\right) \qquad (2.12)$$

$$[y,v]_{\infty}-h[y,u]_{\infty}=0 \quad \operatorname{Im} h>0 \qquad (2.13)$$

Burada λ, kompleks spektral parametre; R, reel sayılar kümesi olmak üzere, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1',\alpha_2' \in R$ ve

$$\alpha=\begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_1\\ \alpha_2' & \alpha_2\end{vmatrix}=\alpha_1'\alpha_2-\alpha_2'\alpha_1>0$$

dir. Kolaylık için aşağıdaki kabulleri yapalım.

$$M_{-\infty}(y):=\alpha_1[y,v]_{-\infty}-\alpha_2[y,u]_{-\infty},$$

$M'_{-\infty}(y):=\alpha_1'[y,v]_{-\infty}-\alpha_2'[y,u]_{-\infty}$, $N_1^{\infty}(y)=[y,v]_{\infty}$, $N_2^{\infty}(y):=[y,u]_{\infty}$, $N_1^{-\infty}(y):=[y,v]_{-\infty}$, $N_2^{-\infty}(y):=[y,u]_{-\infty}$ ve $M_{\infty}(y)=N_1^{\infty}(y)-hN_2^{\infty}(y)$.

Lemma 4: Keyfi $y,z \in D$ için $M_{-\infty}(\bar{z})=\overline{M_{-\infty}(z)}$, $M'_{-\infty}(\bar{z})=\overline{M'_{-\infty}(z)}$

$N_1^{\infty}(\bar{z})=\overline{N_1^{\infty}(z)}, N_2^{\infty}(\bar{z})=\overline{N_2^{\infty}(z)}$ olmak üzere

i) $\left[y,\bar{z}\right]_{-\infty}=\dfrac{1}{\alpha}\left[M_{-\infty}(y).\overline{M^{\prime}_{-\infty}(z)}-\overline{M}^{\prime}_{-\infty}(y)\overline{M_{-\infty}(z)}\right]$ (2.14)

ii) $\left[y,\bar{z}\right]_{\infty}=N_1^{\infty}(y).N_2^{\infty}(\bar{z})-N_1^{\infty}(\bar{z}).N_2^{\infty}(y)$ (2.15)

eşitlikleri sağlanır (Eryılmaz, 2006).

3. SINIR DEĞER PROBLEMİNİN HİLBERT UZAYINDA ÜRETTİĞİ LİNEER OPERATÖR:

$f^{(1)}\in\ell_w^2\left(Z\right),\ f^{(2)}\in C$ olmak üzere $\hat{f}=\begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}$ şeklinde iki bileşenli elemanların lineer uzayını $H=\ell_w^2\left(N\right)\oplus C$ şeklinde gösterelim. Eğer $\alpha=\begin{vmatrix} \alpha_1^{\prime} & \alpha_1 \\ \alpha_2^{\prime} & \alpha_2 \end{vmatrix}$ olmak üzere $\alpha>0$ kabul edilirse $\hat{f}=\begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}$, $\hat{g}=\begin{pmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \end{pmatrix}\in H$ olmak üzere

$$\left(\hat{f},\hat{g}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{(1)}\overline{g}_n^{(1)}w_n+\frac{1}{\alpha}f^{(2)}\overline{g}^{(2)} \tag{3.1}$$

formülü H lineer uzayında bir iç çarpım tanımlar (Fulton, 1977). Bu iç çarpıma göre H lineer uzayı bir Hilbert uzayı olur. Dolayısıyla verilmiş sınır değer problemine uygun Hilbert uzayı tanımlanmış olur.

Verilen sınır değer problemine uygun $A_h:H\rightarrow H$ operatörünü

$$D\left(A_h\right)=\left\{\begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}\in H: f^{(1)}\in D,\ M_{\infty}\left(f^{(1)}\right)=0,\ f^{(2)}=M_{-\infty}^{\prime}\left(f^{(1)}\right)\right\} \tag{3.2}$$

$$A_h\hat{f}=\tilde{\ell}\left(\tilde{f}\right):=\begin{pmatrix} \ell\left(f^{(1)}\right) \\ M_{-\infty}\left(f^{(1)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

eşitlikleri ile tanımlayalım.

Lemma 5: $H=\ell_w^2(N)\oplus C$ Hilbert uzayında (3.1) ve (3.2) eşitlikleri ile tanımlı A_h operatörü için

$$\left(A_h\hat{f},\hat{g}\right)-\left(\hat{f},A_h\hat{g}\right)=\left[f^{(1)},g^{(1)}\right]_{\infty}-\left[f^{(1)},g^{(1)}\right]_{-\infty}+\frac{1}{\alpha}\left[M_{-\infty}\left(f^{(1)}\right)\overline{M'_{-\infty}\left(g^{(1)}\right)}-M'_{-\infty}\left(f^{(1)}\right)\overline{M_{-\infty}\left(g^{(1)}\right)}\right] \quad (3.4)$$

eşitliği sağlanır (Eryılmaz, 2006).

Teorem 6 : A_h operatörü H uzayında disipatiftir.

İspat : $\hat{y}=\{\hat{y}_n\}\in D(A_h)\ ve\ \overline{D(A_h)}=H$ için (3.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right) &=\sum_n^m\left(-a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n-a_ny_{n+1}\right)\overline{y_n}+\frac{1}{\alpha}f^{(2)}\overline{g}^{2}\\ &-\sum_n^m\left(a_{n-1}y_{n-1}+b_n\overline{y}_n+a_n\overline{y}_{n+1}\right)y_n-\frac{1}{\alpha}\overline{f^{(2)}}\,g^{(2)}\\ &=-a_{n-1}y_{n-1}\overline{y_n}+a_{n-1}y_n\overline{y}_{n-1}-a_my_{m+1}\overline{y}_m+a_my_m\overline{y}_{m+1}\\ &+\frac{1}{\alpha}f^{(2)}\overline{g^{(2)}}-\frac{1}{\alpha}f^{(2)}\overline{g^{(2)}}\\ &=\left[y^{(1)},\overline{y}^{(1)}\right]_m-\left[y^{(1)},\overline{y}^{(1)}\right]_{n-1}+\frac{1}{\alpha}\left[f^{(2)}\overline{g^{(2)}}-\overline{f^{(2)}}g^{(2)}\right]\end{aligned}$$

$m\to\infty$ ve $n-1\to-\infty$ için

$$=\left[y^{(1)},\overline{y}^{(1)}\right]_{\infty 1}-\left[y^{(1)},\overline{y}^{(1)}\right]_{-\infty}+\frac{1}{\alpha}\left[M_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)\overline{M'_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)}-M'_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)\overline{M_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)}\right]$$

bulunur. (2.14) den dolayı

$$\begin{aligned}\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right)&=[y^{(1)},\overline{y}^{(1)}]_{\infty}\\ &=N_1^{\infty}(y^{(1)})N_2^{\infty}(\overline{y}^{(1)})-N_1^{\infty}(\overline{y}^{(1)})N_2^{\infty}(y^{(1)})\end{aligned}$$

olur $M_{\infty}(y^{(1)})=0$ $M_{\infty}(y^{(1)})$ koşulu sağlanacağından $N_1^{\infty}(y^{(1)})=hN_2^{\infty}(y^{(1)})$ bulunur ve buradan da

$$\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right)=hN_2^{\infty}\left(y^{(1)}\right)N_2^{\infty}\overline{(y^{(1)})}-\bar{h}N_2^{\infty}\overline{(y^{(1)})}N_2^{\infty}\left(y^{(1)}\right)$$

$$=\left(h-\bar{h}\right)\left(N_2^{\infty}(y^{(1)})N_2^{\infty}(y^{(1)})\right)$$

$$=2i\,\mathrm{Im}\,\mathrm{h}\left|N_2^{\infty}(y^{(1)})\right|^2$$ olur. Bundan dolayı

$$\mathrm{Im}\ \left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)=\mathrm{Im}\,\mathrm{h}\left|N_2^{\infty}(y^{(1)})\right|^2\geq 0\quad(\mathrm{Im}h>0)$$

dır. Yani A_h operatörü H de disipatiftir.

4. HİLBERT UZAYINDA SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÜRETTİĞİ A_h OPERATÖRÜNÜN ÖZDEĞERLERİ ve ÖZVEKTÖRLERİ:

$\lambda\in C$ için (2.1) denkleminin

$$N_1^{\infty}\left(\chi(\lambda)\right)=\left[\chi(\lambda),u\right]_{\infty}=1$$

$$N_2^{\infty}\left(\chi(\lambda)\right)=\left[\chi(\lambda),v\right]_{\infty}=h$$

$$N_1^{-\infty}\left(\phi(\lambda)\right)=\alpha_2-\lambda\alpha_2'$$

$$N_2^{-\infty}\left(\phi(\lambda)\right)=\alpha_1-\lambda\alpha_1' \tag{4.1}$$

koşullarını sağlayan çözümlerini $\phi(\lambda)$ ve $\chi(\lambda)$ olsun. (2.14) dan $-\infty$ daki Wronskiyeni olan $\Delta_{-\infty}(\lambda)$, $\Delta(\lambda)=\Delta_{-\infty}(\lambda)=M_{-\infty}(\chi(\lambda))-\lambda M'_{-\infty}(\chi(\lambda))$ dir. (2.15) den $+\infty$ daki Wronskiyeni olan $\Delta_{\infty}(\lambda)$, $\Delta(\lambda)=\Delta_{\infty}(\lambda):=-M_{\infty}(\phi(\lambda))$ olarak hesaplanır.

Teorem 7: (2.11) – (2.13) Sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\Delta(\lambda)$ nın sıfır yerlerinden ibarettir $\left(\Delta(\lambda)=\Delta_{-\infty}(\lambda)=\Delta_{\infty}(\lambda)\right)$.

İspat: λ_0, $\Delta_0(\lambda)$'nın bir sıfırı olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\Delta_{-\infty}(\lambda_0)=\phi_n(\lambda_0)\chi_{n+1}(\lambda_0)-\phi_{n+1}(\lambda_0)\chi_n(\lambda_0)=0 \qquad (4.2)$$

dır. $n=-\infty$ için $\Delta_{-\infty}(\lambda)$, $\varphi(\lambda_0)$ ve $\chi(\lambda_0)$ vektörlerinin Wronskiyeni olduğundan (4.2) gereği $\varphi(\lambda_0)$ ve $\chi(\lambda_0)$ çözümleri lineer bağımlı olur. Yani, $\phi_n(\lambda_0)=k\chi_n(\lambda_0)$ olacak şekilde $k\neq 0$ sabit sayısı bulunur. (4.1) gereği $\varphi(\lambda_0)$ (2.11) – (2.13) sınır değer probleminin $\lambda=\lambda_0$ için bir çözümü olur. Yani $\lambda=\lambda_0$ bir özdeğerdir. Şimdi bunun tersinin de doğru olduğunu gösterelim. Yani $\lambda=\lambda_0$ özdeğer ise $\Delta_{-\infty}(\lambda_0)=0$ ve $\Delta_{\infty}(\lambda_0)$ olduğunu gösterelim. $\lambda=\lambda_0$ özdeğer için $\Delta_{-\infty}(\lambda_0)\neq 0$ ve $\Delta_{\infty}(\lambda_0)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\Delta_{-\infty}(\lambda_0)\neq 0$ ve $\Delta_{\infty}(\lambda_0)\neq 0$ ise $\phi_n(\lambda_0)$ ve $\chi_n(\lambda_0)$ vektörleri lineer bağımsız olur. Buna göre (2.11) denkleminin genel çözümü $y(\lambda_0)=c_1(\lambda_0)\varphi(\lambda_0)+c_2\chi(\lambda_0)$ şeklinde yazılabilir. (2.12) sınır koşulu gereği, $[y,v]_{\infty}-h[y,u]_{\infty}=0$ eşitliği sağlanır. Buradan (2.12) koşulu dikkate alınırsa, $c_1\left(\phi_n(\lambda_0)+h\phi_n(\lambda_0)\right)+c_2\left(\chi_{\mathrm{n}}(\lambda_0)+h\chi_n(\lambda_0)\right)=0$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\phi(\lambda_0)$ çözüm vektörünün (2.12) sınır koşulunu sağladığı göz önüne alınırsa, $c_2\left(\chi_0(\lambda_0)+h\chi_{-1}(\lambda_0)\right)=c_2\Delta_{-\infty}(\lambda_0)=0$ bulunur. Kabul gereği $\Delta_{-\infty}(\lambda_0)\neq 0$ olduğundan $c_2=0$ olur. (2.13) koşulundan ve $c_2=0$ olmasından,

$$c_1\left\{[\varphi(\lambda_0),v]_{\infty}(\alpha_1-\lambda\alpha_1')-[\varphi(\lambda_0,u)]_{\infty}(\alpha_2-\lambda\alpha_2')\right\}=c_1\Delta_{\infty}(\lambda_0)=0 \qquad (4.3)$$

dır. $\Delta_{\infty}(\lambda_0)\neq 0$ olduğundan $c_1=0$ olur. Sonuç olarak $y(\lambda_0)=0$ olur. Bu λ_0'ın özdeğer olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

$\Delta_{-\infty}(\lambda)$ ve $\Delta_{\infty}(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarını $\lambda_n\ (n=0,1,2,...)$ şeklinde gösterirsek

$$\hat{\phi}_n=\begin{pmatrix}\phi(\lambda_n)\\ M'_{-\infty}(\phi(\lambda_n))\end{pmatrix}\in D(A_h)$$

vektörleri $A_h\hat{\phi}_n = \lambda_n\hat{\phi}_n$ eşitliğini sağlar. Yani $\hat{\phi}_n$ ler A_h operatörünün özvektörleridir.

Tanım 8: Eğer λ_0 özdeğerine karşılık gelen vektörler sistemi

$$\ell(y)_0 = \lambda_0 y_0, \quad M_{-\infty}(y_0) - \lambda_0 M'_{-\infty}(y_0) = 0, \quad M_{\infty}(y_0) = 0,$$
$$\ell(y_s)_n - \lambda_0 y_s - y_{s-1} = 0$$

$$M_{-\infty}(y_s) - \lambda_0 M'_{-\infty}(y_s) - M'_{-\infty}(y_{s-1}) = 0 \quad \text{ve}$$
$$M_{\infty}(y_s) = 0, \; s = 1,2,\ldots,n \tag{4.4}$$

şartlarını sağlıyorsa $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ vektörler sistemine (2.11) – (2.13) sınır değer probleminin öz ve birleştirilmiş (asosye) vektörler zinciri denir.

Teorem 9: (2.11) – (2.13) sınır probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır. Yani, (2.11) – (2.13) sınır değer probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen her bir özvektörler zinciri ve birleştirilmiş vektörleri, A_h disipatif operatörünün aynı λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ birleştirilmiş vektörler ve özvektörler zincirine karşılık gelir. Bu durumda

$$\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ M'_{-\infty}(y_k) \end{pmatrix}, \; k = 0,1,2,\ldots,n \tag{4.5}$$

olur.

İspat: Eğer, $\hat{y}_0 \in D(A_h)$ ve $A_h\hat{y}_0 = \lambda_n\hat{y}_0$ ise $\ell(y)_0 = \lambda_0 y_0$, $M_{\infty}(y_0) - \lambda_0 M'_{\infty}(y_0) = 0$ eşitlikleri sağlanır. Yani (2.11) – (2.13) sınır değer probleminin özvektörü y_0'dır. Tersine olarak, eğer (2.12) şartları varsa, $\begin{pmatrix} y_0 \\ M_{\infty}{}'(y_0) \end{pmatrix} = \hat{y}_0 \in D(A_h)$ ve $A_h\hat{y}_0 = \lambda_n\hat{y}_0$'dir. Yani $\hat{y}_0$, A_h operatörünün özvektörüdür. Ayrıca, eğer A_h operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ birleştirilmiş vektörleri ve özvektörler zinciri ise, $\hat{y}_k \in D(A_h)$ $(k = 0,1,2,...,n)$ ve $A_h \hat{y}_0 = \lambda_0 \hat{y}_0$, $A_h \hat{y}_s = \lambda_0 \hat{y}_s + \hat{y}_{s-1}$, s = 1,2,…) şartları ile birlikte (2.12) eşitliğini elde ederiz. Burada $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$'ler $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n$ vektörlerinin birinci bileşenleridir. Eğer, (2.11) – (2.13) problemine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ bileşenleri, $\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ K'_\infty(y_k) \end{pmatrix} \in D(A_h)$, $k = 0,1,2,\ldots,n$ (2.12)'de yerine yazılırsa, (2.13) elde edilir. Yani (2.11) – (2.13) sınır değer probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır.

KAYNAKLAR

Allahverdiev, B.P., (2004). Dissipative Second-Order Difference Operators with General Conditions, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 10, No.1, 1-16.

Allahverdiev, B.P., (2005). Extensions, Dilations and Functional Models of Infinite Jacobi Matrix, *Czechoslovak Math. Journal*, 55 (130), 593-609.

Atkinson, F.V., (1964). *Discrete and Continuous Boundary Problems*, Acad. Pres Inc., NewYork.

Eryılmaz, A. (2006), *Fark Operatörlerinin Spektral Teorisi*, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta

Fulton, C.T., (1977). Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalues parameter Contained in the Boundary Conditions Proc. *Royal Soc. Edinburg*, 77A, 293-308.

Naimark, M.A., (1968). *Linear Differential Operators,* 2nd ed., Nauka Moskow, 1969 English transl., of 1st ed. Vols. 1, 2, Ungar, New York.

Shi, Y., and Chen, I., (1999). Spectral Theory of Second-Order Vector Difference Equations, *Journal of Math. Anal. And Appl*. 239, 195-212.

Walter, J., (1973). Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition, *Math. Z.* 133, 301-312.

Welstead, S, T., (1982). Boundary Conditions at Infinity for Difference Equations of Limit – *Circle Type, J.Math. Anal. Appl. 89, 442-461.*

****