

Gergin Elastik Tele Bağlı Kütlelin Doğrusal Olmayan Salınımının Yaklaşık Çözümleri

Approximate Solutions of Nonlinear Oscillation of a Mass Attached to a Stretched Elastic Wire

Mustafa Mehmet Fatih KARAHAN^{*a}, Beyza BOSTANCI^b

Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 45140, Manisa

• Geliş tarihi / Received: 29.03.2018 • Düzeltilerek geliş tarihi / Received in revised form: 10.07.2018 • Kabul tarihi / Accepted: 06.08.2018

Öz

Gergin elastik bir tele bağlı kütlelin doğrusal olmayan titreşim hareketi ele alınmıştır. Sistemin hareket denklemi oluşturulmuştur. Hareket denkleminin çok ölçekli metot (ÇÖM) ve çok ölçekli Lindstedt Poincare (ÇÖLP) metodu uygulanmıştır. Belirtilen metotlar kullanılarak hareket denkleminin yaklaşık analitik çözümleri bulunmuştur. Belirtilen çözümler hareket denkleminin sayısal çözümü ile karşılaştırılmıştır. Kuvvetli doğrusal olmayan sistemlerde ÇÖLP metodu iyi sonuçlar vermiştir.

Anahtar kelimeler: Çok Ölçekli Lindstedt Poincare Metodu, Çok Ölçekli Metot, Kuvvetli Doğrusal Olmayan Sistemler, Perturbasyon Metotları, Sayısal Çözümler

Abstract

Nonlinear Oscillation of a Mass Attached to a Stretched Elastic Wire is considered. Equation of motion of the system is obtained. The classical multiple scales method (MS) and multiple scales Lindstedt Poincare (MSLP) method are applied to the equation of motion. Approximate analytical solutions of the equation of motion are obtained using the stated methods. Obtained solutions are compared with numerical solution of the equation of motion. MSLP method gives better results for strong nonlinearities.

Keywords: *Multiple Scales Lindstedt Poincare Technique, Method of Multiple Scales, Strong Nonlinearities, Perturbation Methods, Numerical Solution*

^{*a} Mustafa Mehmet Fatih KARAHAN; fatih.karahan@cbu.edu.tr; Tel: (0236) 201 23 67; orcid.org/0000-0001-9040-5041

^b orcid.org/0000-0002-5966-6398

$$m\ddot{x} = -2T \sin \theta \quad (1)$$

Burada T elastik telin gerilme kuvvetidir. Kütle başlangıçta durağan ve x konumunda bulunmaktadır. Bu nedenle başlangıç şartları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$x(0) = x, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2)$$

Telin gerilme kuvveti

$$T = T_0 + EA \frac{\sqrt{L^2 + x^2} - L}{L} \quad (3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada, T_0 telin başlangıçtaki gerilme kuvveti, EA ise telin eksenel rijitlik kuvvetidir. Denklem (3), denklem (1)' de yerine konulursa

$$m\ddot{x} + 2EA \frac{x}{L} + \frac{\frac{x}{L}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{L}\right)^2}} (2T_0 - 2EA) = 0 \quad (4)$$

elde edilir. Denklemi boyutsuzlaştırmak için boyutsuz değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$u = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{\frac{mL}{2EA}}} \quad (5)$$

3.1. Çok Ölçekli Metot

Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (10)$$

Zaman türevleri

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2\varepsilon D_0 D_2) + \dots \quad (11)$$

şeklinde ifade edilir. Bağımlı değişken aşağıdaki gibi seriye açılır,

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (12)$$

bu açılım orijinal denkleme yerleştirilir ve mertebe ayrıştırması yapılır. Aynı şekilde başlangıç şartları da mertebe ayrıştırmasına tabi tutulursa

$$O(1): D_0^2 u_0 + (1 - \lambda) u_0 = 0 \quad u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \quad (13)$$

$$O(\varepsilon): D_0^2 u_1 + (1 - \lambda) u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - \frac{\lambda}{2} u_0^3 \quad (14)$$

$$u_1(0) = 0, (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0$$

Boyutsuz değişkenler denklem (4)'de yerine konur ve aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\ddot{u} + u - \frac{\lambda u}{\sqrt{1 + u^2}} = 0 \quad (6)$$

Burada

$$\lambda = 1 - \frac{T_0}{AE}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (7)$$

şeklinde tanımlanır.

Hareket denklemindeki kare köklü ifadeyi elimine etmek adına terim Taylor serisine açılır ve denkleme ε perturbasyon parametresi uygun bir şekilde yerleştirilir ise denklemin ve başlangıç şartlarının nihai durumu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\ddot{u} + (1 - \lambda)u + \frac{\varepsilon \lambda}{2} u^3 = 0 \quad (8)$$

$$u(0) = \frac{x}{L} = a_0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (9)$$

3. Analitik Çözümler

Bu bölümde elde edilen hareket denklemini, ÇÖM ve ÇÖLP metotları ile çözülüp, elde edilen çözümler sayısal sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

$$O(\varepsilon^2): D_0^2 u_2 + (1-\lambda)u_2 = -2D_0 D_1 u_1 - (D_1^2 + 2D_0 D_2)u_0 - \frac{3\lambda}{2}u_0^2 u_1 \quad (15)$$

ifadeleri elde edilir.

Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i\sqrt{(1-\lambda)}T_0} + ke \quad (16)$$

olarak elde edilir. Burada kompleks genlik aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (17)$$

Gerçek genlik ve faz açısından birinci mertebe çözüm

$$u_0 = a(T_1, T_2) \cos\left(\sqrt{(1-\lambda)}T_0 + \beta(T_1, T_2)\right) \quad (18)$$

şeklinde elde edilir. Denklem başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (19)$$

ifadeleri elde edilir. Birinci mertebe çözüm, denklem (14)'e yerleştirilir ve seküler terimleri elimine edecek olan denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-2i\sqrt{(1-\lambda)}D_1 A + iA - \frac{3\lambda}{2}A^2 \bar{A} = 0 \quad (20)$$

Kompleks genlik denklem (20)'ye yerleştirilirse aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a(T_2), \quad \beta = \frac{3\lambda}{16\sqrt{(1-\lambda)}} a^2 T_1 + \beta_0(T_2) \quad (21)$$

ε mertebesindeki çözüm aşağıdaki şekildedir.

$$u_1 = B e^{i\sqrt{(1-\lambda)}T_0} + \frac{\lambda}{16(1-\lambda)} A^3 e^{3i\sqrt{(1-\lambda)}T_0} + ke \quad (22)$$

Gerçek genlik ve faz için, u_1 çözümü

$$u_1 = b \cos\left(\sqrt{(1-\lambda)}T_0 + \gamma\right) + \frac{\lambda}{64(1-\lambda)} a^3 \cos\left(3\sqrt{(1-\lambda)}T_0 + 3\beta\right) \quad (23)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$B = \frac{1}{2} b e^{i\gamma} \quad (24)$$

olarak alınır. Denklem başlangıç şartları uygulanırsa

$$b(0) = -\frac{\lambda}{64\sqrt{(1-\lambda)}} a_0^3, \quad \gamma(0) = 0 \quad (25)$$

ifadeleri elde edilir. Son mertebede, denklemler (16) ve (22), denklem (15)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklemden aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0, \quad b = -\frac{\lambda}{64\sqrt{(1-\lambda)}} a_0^3, \quad \beta = \gamma = \frac{3\lambda}{16\sqrt{(1-\lambda)}} a_0^2 T_1 + \frac{21\lambda^2}{1024(1-\lambda)^{3/2}} a_0^4 T_2 \quad (26)$$

Nihai sonuç aşağıdaki gibidir.

$$u = a_0 \cos\left(\sqrt{(1-\lambda)}t + \beta\right) + \frac{\varepsilon\lambda}{64(1-\lambda)} a_0^3 \left[\cos\left(3\sqrt{(1-\lambda)}t + 3\beta\right) - \cos\left(\sqrt{(1-\lambda)}t + \beta\right) \right] + O(\varepsilon^2) \quad (27)$$

3.2. Çok Ölçekli Lindstedt Poincare Metot

Denklem (8)'e $\tau = \omega t$ zaman dönüşümü uygulanır ise

$$\omega^2 u'' + (1 - \lambda)u + \frac{\lambda}{2} \varepsilon u^3 = 0 \quad (28)$$

elde edilir. Burada () gösterimi, yeni zaman değişkeni olan τ 'ya göre türevi ifade etmektedir. Hızlı ve yavaş zaman ölçekleri yeni zaman değişkeni cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$T_0 = \tau = \omega t, \quad T_1 = \varepsilon \tau = \varepsilon \omega t, \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau = \varepsilon^2 \omega t \quad (29)$$

Yeni zaman türevleri

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2\varepsilon D_0 D_2) + \dots \quad (30)$$

şeklinde ifade edilir. Bağımlı değişken ve tabii frekans aşağıdaki gibi seriye açılır.

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (31)$$

$$(1 - \lambda) = \omega^2 - \varepsilon \omega_1 - \varepsilon^2 \omega_2 \dots \quad (32)$$

bu açılımlar denklem (28)'e yerleştirilir ve merteye ayrıştırması yapılır. Aynı şekilde başlangıç şartları da merteye ayrıştırmasına tabi tutulursa

$$O(1): \omega^2 D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \quad u_0(0) = a_0, \quad D_0 u_0(0) = 0 \quad (33)$$

$$O(\varepsilon): \omega^2 D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_0 + \omega_1 u_0 - \frac{\lambda}{2} u_0^3 \quad (34)$$

$$u_1(0) = 0, (D_0 u_1 + D_1 u_0)(0) = 0$$

$$O(\varepsilon^2): \omega^2 D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = -2\omega^2 D_0 D_1 u_1 - \omega^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2)(u_0) + \omega_1 u_1 + \omega_2 u_0 - \frac{3\lambda}{2} u_0^2 u_1 \quad (35)$$

ifadeleri elde edilir.

Birinci mertebedeki çözüm

$$u_0 = A(T_1, T_2) e^{i T_0} + ke = a(T_1, T_2) \cos(T_0 + \beta(T_1, T_2)) \quad (36)$$

Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$a(0) = a_0, \quad \beta(0) = 0 \quad (37)$$

ifadeleri elde edilir. Birinci merteye çözüm, denklem (34)'e yerleştirilir ve seküler terimleri elimine edecek olan denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$-2i D_1 A + \frac{\omega_1}{\omega^2} A + -\frac{3\lambda}{2\omega^2} A^2 \bar{A} = 0 \quad (38)$$

Seküler ifadede, $D_1 A = 0$ seçildiğinde ω_1 kompleks yapıda olmaz. Bu yüzden seçim uygundur. Bu durumda $a = a(T_2)$, $\beta = \beta(T_2)$ olacaktır. ω_1 ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$\omega_1 = \frac{3\lambda}{2} A \bar{A} = \frac{3\lambda}{8} a^2 \quad (39)$$

ε mertebesinde çözüm aşağıdaki gibidir.

$$u_1 = B e^{i T_0} + \frac{\lambda}{16\omega^2} A^3 e^{3i T_0} + ke = b \cos(T_0 + \gamma) + \frac{\lambda}{64\omega^2} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta) \quad (40)$$

Denkleme başlangıç şartları uygulanırsa

$$b(0) = -\frac{\lambda a_0^3}{64\omega^2}, \quad \gamma(0) = 0 \quad (41)$$

ifadeleri elde edilir. Son mertebede, denklemler (36) ve (40), denklem (35)'de yerine konur ve seküler terimleri yok edecek denklem

$$2iD_1B + 2iD_2A - \frac{\omega_1}{\omega^2}B - \frac{\omega_2}{\omega^2}A + \frac{3\lambda}{2\omega^2} \left(A^2\bar{B} + \frac{\lambda}{16\omega^2}\bar{A}^2A^3 + 2A\bar{A}B \right) = 0 \quad (42)$$

şeklinde ifade edilir.

Seküler ifadeye, $D_2A = 0$ seçilir ise ω_2 kompleks yapıda olmaz. Bu yüzden seçim uygundur. Cebirsel işlemler sonrasında denklem (42)'den aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a = a_0, \quad b = -\frac{\lambda a_0^3}{64\omega^2}, \quad \beta = \gamma = 0, \quad \omega_2 = -\frac{3\lambda^2}{512\omega^2} a_0^4 \quad (43)$$

Nihai çözüm

$$u = a_0 \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon \lambda a_0^3}{64\omega^2} [\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)] + O(\varepsilon^2) \quad (44)$$

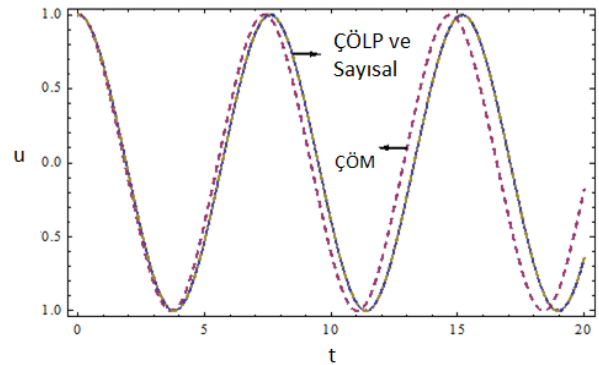
şeklinde elde edilir.

Burada frekans ifadesi aşağıdaki gibidir.

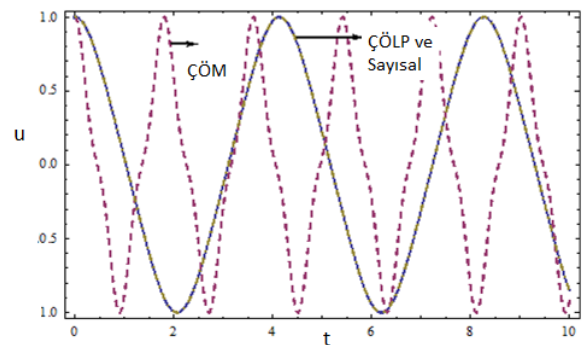
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \lambda + \frac{3\varepsilon\lambda}{8} a_0^2 \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \lambda + \frac{3\varepsilon\lambda}{8} a_0^2 \right)^2 - \frac{12\varepsilon^2\lambda^2}{512} a_0^4}} \quad (45)$$

3.3. Sayısal Çözümler ile Karşılaştırma

Bu bölümde, ÇÖM ve ÇÖLP yöntemlerinin yaklaşık analitik çözümleri, MATHEMATICA' da yerleşik bir yöntem olan Runge-Kutta yöntemi kullanılarak sayısal olarak doğrusal olmayan adi diferansiyel denklemi doğrudan integre ederek elde edilen sayısal integrasyon çözümü ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma, denklemde bulunan parametrelerin farklı değerleri için yapılmıştır. Bu nedenle denklemdeki her bir parametrenin, denklemi nasıl etkilediği incelenmiştir. Şekiller 2 - 4'de $a_0 = 1$ ve $\lambda = 0.5$ seçilmiştir. Şekil 2'de karşılaştırma $\varepsilon = 1$ için yapılmıştır. Sayısal çözüm ile ÇÖLP çözümü çakışmasına rağmen ÇÖM yöntemi ile sayısal çözüm birbirinden ayrılmaktadır. Şekil 3'de perturbasyon parametresinin değeri artırılarak $\varepsilon = 10$ alınmıştır. Aynı şekilde ÇÖLP çözümü sayısal çözüm ile uygun sonuçlar göstermektedir. Ancak ÇÖM yöntemi ile sayısal çözümün genlik değerleri uyumlu sonuçlar gösterir iken frekans değerleri bakımından uygun sonuçlar göstermediği görülmektedir.

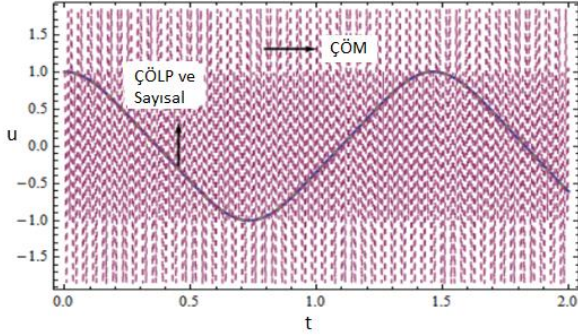


Şekil 2. Analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 1 (a_0 = 1, \lambda = 0.5)$



Şekil 3. Analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 10 (a_0 = 1, \lambda = 0.5)$

Şekil 4'de sonuçlar $\varepsilon = 100$ için karşılaştırılmıştır. ÇÖLP çözüm ile sayısal çözüm uyum içinde olmasına rağmen ÇÖM yöntemi ile elde edilen çözüm fiziksel olmayan sonuçlar göstermektedir. Görüldüğü üzere kütlelinin yapmış olduğu titreşim hareketinin yapısı, kuvvetli doğrusal olmayan ve zayıf doğrusal olmayan sistemler için farklılıklar içermektedir.



Şekil 4. Analitik ve sayısal çözümlerin karşılaştırılması $\varepsilon = 100 (a_0 = 1, \lambda = 0.5)$

ÇÖLP yönteminin doğruluğunu göstermek için, başka metotlar ile elde edilen periyodlar ve tam çözüm periyod değerleri Tablo 1'de sunulmuştur. Görüldüğü gibi hem küçük salınım hem de büyük salınım genlik değerleri için ÇÖLP metodunun, tam ve başka metot çözümleri ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

4. Sonuç

Gergin elastik bir tele bağlı kütlelinin doğrusal olmayan titreşim hareketi incelenmiştir. Sistemin hareket denkleminde ÇÖLP metodu ilk defa uygulanmıştır. ÇÖM ve ÇÖLP yöntemleri kullanılarak hareket denkleminin yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiştir. Belirtilen çözümler hareket denkleminin sayısal çözümü ile karşılaştırılmıştır. ÇÖLP metodu zayıf ve kuvvetli doğrusal olmayan sistemler için sayısal çözüm ile uyumlu sonuçlar verirken, ÇÖM metodunun kuvvetli lineer olmayan sistemler için sayısal çözüm ile uyumlu sonuçlar vermediği gözlemlenmiştir.

Tablo 1. Yaklaşık analitik periyodların tam çözüm periyod ile karşılaştırılması

a_0	T_{TAM} (Sun vd., 2007)	$T_{ÇÖLP}$	T_{HD} (Sun vd., 2007)	T_{VIM} (Jamshidi ve Ganji, 2010)	T_{EDM} (Jamshidi ve Ganji, 2010)
0.1	6.621688	6.621680	6.621688	6.621237	6.621737
1	6.537508	6.533706	6.538331	6.517854	6.535726
10	6.322939	6.290502	6.323065	6.314678	6.320056

Kaynaklar

- Durmaz, S., Demirbağ, S. A., Kaya, M. O., 2011. Approximate solutions for nonlinear oscillation of a mass attached to a stretched elastic wire, Computers and Mathematics with Applications, 61, 578-585.
- Hu, H., 2004a. A classical perturbation technique which is valid for large parameters, Journal of Sound and Vibration, 269, 409-412.
- Hu, H., 2004b. A classical perturbation technique that works even when the linear part of restoring force is zero, Journal of Sound and Vibration, 271, 1175-1179.
- Hu, H., ve Xiong, Z. G., 2004. Comparison of two Lindstedt-Poincare type perturbation methods, Journal of Sound and Vibration, 278, 437-444.
- Jamshidi, N. ve Ganji, D. D., 2010. Application of energy balance method and variational iteration method to an oscillation of a mass attached to a stretched elastic wire, Current Applied Physics, 10, 484-486.

- Karahan, M. M. F., 2017. Approximate Solutions for the Nonlinear Third-Order Ordinary Differential Equations, Zeitschrift für Naturforschung A, 72(6), 547-557.
- Karahan, M. M. F., Pakdemirli, M., 2017a. Free and Forced Vibrations of the Strongly Nonlinear Cubic-Quintic Duffing Oscillators, Zeitschrift für Naturforschung A, 72(1), 59-69.
- Karahan, M. M. F., Pakdemirli, M., 2017b. Vibration Analysis of a Beam on a Nonlinear Elastic Foundation, Structural Engineering and Mechanics, 62(2), 171-178.
- Nayfeh, A. H., 1981. Introduction to Perturbation Techniques, John Wiley and Sons, New York, 532p.
- Pakdemirli M. ve Karahan, M. M. F., 2010. A New Perturbation Solution for Systems with Strong Quadratic and Cubic Nonlinearities, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 33, 704-712.

Pakdemirli, M., Karahan, M. M. F. Karahan ve Boyacı H., 2009. A new perturbation algorithm with better convergence properties: Multiple Scales Lindstedt Poincare method, *Mathematical and Computational Applications*, 14, 31-44.

Pakdemirli, M., Karahan, M. M. F. Karahan ve Boyacı H., 2011. Forced Vibrations of Strongly Nonlinear Systems with Multiple Scales

Lindstedt Poincare Method, *Mathematical and Computational Applications*, 16, 879-889.

Sun, W. P., Wu, B. S. Ve Lim, C. W., 2007. Approximate analytical solutions for oscillation of a mass attached to a stretched elastic wire, *Journal of Sound and Vibration*, 300, 1042-1047.