GÜFBED/*GUSTIJ* (2019) 9 (2): 290-294
DOI: 10.17714/gumusfenbil.418418 Araştırma Makalesi / *Research Article*

Birinci Mertebeden Düzgün Katsayılı Maksimal Hiponormal Operatör Genişlemeleri

Maximal Hyponormal Operator Extensions of First-order with Smooth Coefficients

Meltem SERTBAŞ*
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 61080, Trabzon

• Geliş tarihi / *Received*: 25.04.2018 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 13.09.2018 • Kabul tarihi / *Accepted*: 01.10.2018

Öz
Bu çalışmada sonlu bir aralıkta tanımlı Hilbert uzay değerli fonksiyonlar uzayında tanımlı düzgün operatör katsayılı birinci mertebeden tüm maksimal hiponormal genişlemeleri verilmiştir. Bu genişlemeler sınır değerleri anlamındadır. Ayrıca maksimal hiponormal operatörlerin spektrum yapısı verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Diferensiyel operatör, Genişleme, Hiponormal operatör, Minimal ve maksimal operatörler, Spektrum

Abstract
In this study, it is given all maximal hyponormal extensions of first-order with smooth operator coefficients in Hilbert valued function space on a finite interval. These extention is by means of boundary values.Also, the structure of the spectrum of the maximal hyponormal extensions is investigated.

Keywords: *Differential operator, Extension, Hyponormal operator, Minimal and maximal operators, Spectrum*

* Meltem SERTBAŞ; m.erolsertbas@gmail.com; Tel: (0462) 377 25 77; orcid.org/0000-0001-9606-951X

1. Giriş

Diferensiyel operatörler teorisi, diferensiyel denklemler teorisindeki klasik problemlerden farklı birçok yeni problemin açık şekilde belirlenmesini ve çözümünü mümkün kılmaktadır. Bu anlamda, diferensiyel operatör teorisi, mekanik ve teorik fizik için oldukça önemli bir rol üstlenir. Üstelik, bu operatörlerin spektral analizi modern matematiksel fiziğin çok önemli bir dalıdır.

Eğer bir kapalı $T: D(T) \subset H \to H$ lineer operatörü, $D(T) \subset D(T^*)$ ve her $x \in D(T)$ için $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ eşitsizliğini sağlıyor ise T operatörüne hiponormaldir denir. Bu operatör sınıfı bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Putnam, 1972; Janas, 1989; Ota ve Schmüdgen, 1989; Stochel ve Szafraniec, 1989; Jin, 1993).

$L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında, birinci mertebeden lineer diferensiyel-operatör ifadesi tarafından tanımlanan minimal operatörün tüm normal genişlemelerinin sınır değer koşulları İsmailov (1998, 2003, 2006) tarafından verilmiştir. Potansiyelin düzgün olması durumunda da normal genişlemelerin ifadesi İsmailov ve Erol (2012) çalışmasında yer almaktadır. Ayrıca sınırsız operatör katsayılı maksimal hiponormal genişlemelerinin tanım kümelerinin yapısı İsmailov ve Ünlüyol (2010)'un çalışmasındadır. Bu makalede katsayının sabit operatör yerine düzgün operatör fonksiyonu ele alınmıştır.

Bu çalışma boyunca H sonlu boyutlu Hilbert uzayı, $B(H)$ lineer sınırlı operatörlerin uzayı ve $L^2 \coloneqq L^2(H,(a,b))$, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı H Hilbert uzay değerli fonksiyonların Hilbert uzayı olarak alınacaktır (Dunford ve Schwartz, 1963).

2. Maksimal Hiponormal Genişlemelerin Sınır Değerler Dilinde İfadesi

$L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında $A(t)$ her $t \in [a,b]$ için H Hilbert uzayında lineer sınırlı selfadjoint operatörler ve $A(t): [a,b] \to B(H)$ operatör fonksiyonu güçlü sürekli olmak üzere,

$$l(u) = u'(t) + A(t)u(t) \quad (1)$$

şeklinde göstereceğimiz bir lineer diferensiyel-operatör ifadesi ele alalım.

Bu durumda $A(t)$, $t \in [a,b]$ operatör fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde düzgün sınırlı olup (1)' e uygun Cauchy problemi iyi tanımlıdır. Bu diferensiyel ifadesinin $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal eşlenik ifadesi

$$l^+(u) = -u'(t) + A(t)u(t) \quad (2)$$

biçimindedir.

Şimdi $l(.)$ ve $l^+(.)$ diferensiyel ifadelerinin ürettiği maksimal ve minimal operatörlerini tanımlayalım. Bunun için, $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında yoğun tanımlı vektör-fonksiyonların lineer manifoldu üzerinde

$$D_0' \coloneqq \left\{u(t) \epsilon L^2(H,(a,b)) : u(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) x_k\,,\ x_k \in H,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$L_0'(u) = l(u)$, $u \in D_0'$ operatörü tanımlansın.

L_0' operatörünün $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayındaki kapanışına $l(.)$ diferensiyel ifadesi tarafından üretilen minimal operatör denir ve L_0 sembolüyle gösterilir.

Benzer şekilde $l^+(.)$ diferensiyel ifadesinin $L^2(H,(a,b))$ üzerinde ürettiği L_0^+ minimal operatörünün tanımı verilebilir. L_0^+ (L_0) operatörünün $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayındaki eşlenik operatörüne $l(.)$ $(l^+(.))$ ifadesinin ürettiği maksimal operatör denir ve L (L^+) şeklinde gösterilir (Berezansyky, 1968; Gorbachuk 1991).

$L_0 \subset L$, $L_0^+ \subset L^+$, $D(L_0) = \overset{0}{W_2^1}(H,(a,b))$ ve $D(L) = W_2^1(H,(a,b))$ olduğu açıktır.

Teorem 2.1: $A(t)$ operatör fonksiyonu, (a,b) aralığı üzerinde güçlü türevlenebilir ve $\|A'(t)\| \in L^2(a,b)$ ise, minimal operatörünün $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal hiponormal operatör olması için gerek ve yeter koşul (a,b) üzerinde hemen her yerde $A'(t) \leq 0$ olmasıdır.

İspat: L_0 minimal operatörü $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal hiponormal operatör olduğunu varsayalım. Bu takdirde her $u \in D(L_0) \subset D(L^+)$ için

$$\|L_0u(t)\|_{L^2}^2 - \|L^+u(t)\|_{L^2}^2 = 2\left[(u'(t), A(t)u(t))_{L^2} - (A(t)u(t), u'(t))_{L^2}\right] \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $u(t) = \varphi(t)x \in D(L_0)$, $x \in H$, $\bar{\varphi} = \varphi$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ şeklinde tanımlanan özel vektör-fonksiyonları yukarıdaki eşitsizlikte yerine konulursa,

$$\int_a^b |\varphi(t)|^2 (A'(t)x, x)dt \leq 0$$

olur. Bu eşitsizlik reel değerli her $\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(a,b)$ fonksiyonları için doğru olduğundan (Giaquinta ve Hildebrand, 2004) kitabında Lemma 1.2.3.3 ve bu lemmanın ispatı kullanılarak hemen her yerde $A'(t) \leq 0$ olduğu bulunur.

Tersine, hemen her yerde $A'(t) \leq 0$, $a < t < b$ ise, L_0 minimal operatörünün $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında formal hiponormal operatör olduğu ilk eşitsizlikten kolaylıkla gösterilebilir.

Not: $A(t)$ operatör fonksiyonunun, (a,b) aralığı üzerinde zayıf türevlenebilir olması durumunda da Teorem 2.1' in iddiası doğrudur.

Teorem 2.2 (Schmüdgen, 2012): H Hilbert uzayında $T: D(T) \subset H \to H$ yoğun tanımlı simetrik lineer operatör ve $H_+ \subseteq Ker(T^* - i)$ ve $H_- \subseteq Ker(T^* + i)$ kapalı alt uzayları için $dimH_+ = dimH_-$ olsun. $U: H_+ \to H_-$ bir izometrik lineer operatör olmak üzere

$$D(T_U) = D(\bar{T}) \dotplus (E - U)H_+ \text{ ve } T_U(x + (E - U)y) = \bar{T}x + iy + iUy$$

şeklinde tanımlanan T_U operatörü T operatörünün kapalı simetrik bir genişlemesidir. T lineer operatörünün tüm kapalı simetrik genişlemeleri bu formdadır.

Teorem 2.3: $A(t)$, her $t \in [a,b]$ için H Hilbert uzayında lineer sınırlı selfadjoint operatör, $A(t): [a,b] \to B(H)$ operatör fonksiyonu güçlü türevlenebilir, (a,b) aralığı üzerinde hemen her yerde $A'(t) \leq 0$ ve $\|A'(t)\| \in L^2(a,b)$ olsun. $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında, (1) diferensiyel ifadenin ürettiği L_0 minimal operatörünün her bir L_h, $L_0 \subset L_h \subset L$, maksimal hiponormal genişlemeleri, $W: H \to H$ üniter operatör ve $W^*(A(b)W - WA(a))$ bir pozitif operatörü olmak üzere,

$$u(b) = Wu(a) \tag{3}$$

sınır koşuluyla ifade edilebilir. Buradaki $W: H \to H$ üniter operatörü L_h maksimal hiponormal operatörü tarafından tek türlü belirlenir, yani $L_h = L_W$.

Tersine, L maksimal operatörünün keyfi bir $W: H \to H$ izometrik ve $W^*(A(b)W - WA(a))$ pozitif operatör için (3) sınır koşullarını sağlayan $u \in W_2^1(H,(a,b))$ vektör-fonksiyonlarının alt uzayı üzerine kısıtlanışı, L_0 minimal operatörünün maksimal hiponormal genişlemesidir.

İspat: L_h, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. Bu durumda

$$Re(L_h)u(t) = A(t)u(t), u \in D(L_h),$$

$$Im(L_h)u(t) = -i\frac{d}{dt}u(t), u \in D(L_h),$$

operatörleri, $L^2(H,(a,b))$ Hilbert uzayında sırasıyla selfadjoint ve maksimal simetriktir. Varsayalım ki $Im(L_h)$ operatörü maksimal simetrik olmasın. Her $u, v \in D(L_h)$ için

$$(L_h u, v)_{L^2} - (u, L_h^* v)_{L^2} = -i[(Im(L_h)u, v)_{L^2} - (u, Im(L_h)v)_{L^2}] = (u(b), v(b))_H - (u(a), v(a))_H = 0$$

olduğundan $Im(L_h)$ operatörü simetriktir. Ayrıca L_h kapalı operatör ve $A(t)$ düzgün sürekli operatör fonksiyonu olduğundan $Im(L_h)$ da kapalıdır. Teorem 2.2 ye göre $Ker(Im(L) - i) = \{e^{t-a}f: f \in H\}$ ve $Ker(Im(L) + i) = \{e^{a-t}f: f \in H\}$ olup $H_+ \subseteq H$, $H_- \subseteq H$ ve $dimH_+ = dimH_-$ olan kapalı alt uzaylar olmak üzere bir $U: e^{t-a}H_+ \to e^{a-t}H_-$ izometrik operatörü için

$$D(Im(L_h)) = D(L_h) = D(L_0) \dotplus (E - U)\{e^{t-a}f: f \in H_+\}$$

şeklinde yazılabirlir. Bu halde, $H_a = \{u(a): u \in D(L_h)\}$ ve $H_b = \{u(b): u \in D(L_h)\}$ olarak tanımlanan alt uzaylar için $H_a = H_b$ olmak zorundadır. Şimdi $f \epsilon H$ vektörü H_a alt uzayına dik sıfırdan farklı olsun. $u_f(t) = f \in L^2(H,(a,b))$ şeklindeki sabit fonksiyon için $u_f \in D(L) \cap D(L^+)$ olur. Böylece L_h operatörünü tanım kümesi

$$D(\tilde{L}_h) = span\{D(L_h), u_f\}$$

şeklinde olan bir genişlemesini alalım. Bu durumda $D(\tilde{L}_h) \subset D(\tilde{L}_h{}^*)$ ve

$$\|\tilde{L}_h u_f\|_{L^2} - \|\tilde{L}_h{}^* u_f\|_{L^2} = 0 \geq 0$$

eşiliğinden $\tilde{L}_h$ genişlemesi hiponormal olur ki bu ise L_h lineer operatörünün maksimal hiponormal olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $Im(L_h)$ maksimal simetrik operatördür. Ayrıca bu simetrik genişleme

$$\dim Ker(Im(L)-i) = \dim Ker(Im(L)+i) = \dim H$$

olduğundan selfadjointtir (von Neumann, 1929).

Şimdi bu selfadjoint genişlemelerin sınır değerleri dilinde ifadesini verelim.

$$\mathcal{H} \coloneqq H, \gamma_1(u) \coloneqq \frac{u(a)+u(b)}{\sqrt{2}} \text{ ve } \gamma_2(u) \coloneqq \frac{u(a)-u(b)}{i\sqrt{2}}$$

şeklinde tanımlanan $(\mathcal{H}, \gamma_1, \gamma_2)$ üçlüsü Hilbert uzayında $Im(L_0)$ minimal operatörü için bir sınır değerler uzayıdır.

Böylece $Im(L_0)$ minimal operatörünün $Im(L_h)$ selfadjoint genişlemesi ve bu genişleme tarafından tek türlü belirlenen $W: H \to H$ üniter operatör mevcuttur öyle ki $Im(L_h)$ selfadjoint genişlemesi

$$(W-E)\gamma_1(u) + i(W+E)\gamma_2(u) = 0$$

yani

$$u(b) = Wu(a), u \in D(L_h)$$
sınır koşuluyla belirlenir.

L_h hiponormal operatör olduğundan her $u \in D(L_h)$ için

$$\|L_h u\|_{L^2}^2 - \|L_h^* u\|_{L^2}^2 = 2\left[\big(u(b), A(b)u(b)\big)_H - \big(u(a), A(a)u(a)\big)_H - \big(A'(t)u(t), u(t)\big)_{L^2}\right] \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuncu ve $\overset{0}{W}{}_2^1\big(H,(a,b)\big) \subset D(L_h)$ olduğundan her $v \in \overset{0}{W}{}_2^1\big(H,(a,b)\big)$ için

$$\big(u(b), A(b)u(b)\big)_H - \big(u(a), A(a)u(a)\big)_H - \big(A'(t)(u-v)(t), (u-v)(t)\big)_{L^2} \geq 0$$

olduğu elde edilir. Üstelik $\overset{0}{W}{}_2^1\big(H,(a,b)\big)$, $L^2\big(H,(a,b)\big)$ Hilbert uzayında yoğun olduğundan her $u \in D(L_h)$ için bir $(v_n) \subset \overset{0}{W}{}_2^1\big(H,(a,b)\big)$ dizi bulunabilir ki bu dizi $u \in D(L_h)$ fonksiyonuna yakınsaktır. Hipotezden $\|A'(t)\| \epsilon L^2(a,b)$ olup yukarıdaki eşitsizlikten her $u \in D(L_h)$ için

$$\big(u(b), A(b)u(b)\big)_H - \big(u(a), A(a)u(a)\big)_H \geq 0$$

olup sınır koşulları yerine yazılırsa,

$$\Big(W^*\big(A(b)W - WA(a)\big)u(a), u(a)\Big)_H \geq 0$$

olup $W^*\big(A(b)W - WA(a)\big)$ operatörünün pozitif olduğu elde edilir.

$W: H \to H$ üniter operatörü $W^*\big(A(b)W - WA(a)\big) \geq 0$ koşulu sağlamak üzere

$$L_W u = l(u),$$
$$D(L_W) = \big\{u \epsilon W_2^1\big(H,(a,b)\big) : u(b) = Wu(a)\big\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda L_W^*, $l^+(u) = -u'(t) + A(t)u(t)$ diferensiyel ifadenin ürettiği $v(a) = W^* v(b)$, $v \in D(L_W^*)$ sınır koşullarını sağlayan adjoint operatördür. W üniter operatör olduğundan $D(L_W) = D(L_W^*)$ olup, L_W (1) ifadesinin ürettiği bir maksimal hiponormal genişlemedir.

3.Maksimal Hiponormal Genişlemelerin Spektrumu

Bu bölümde (1) ifadesinin ürettiği L_0 minimal operatörün $L^2\big(H,(a,b)\big)$ Hilbert uzayında, $W: H \to H$ üniter operatör ve $W^*\big(A(b)W - WA(a)\big) \geq 0$ koşulunun sağlanması durumunda (3) sınır değerleriyle verilen L_W maksimal hiponormal genişlemesinin spektrumu incelenecektir.

$U(t,s)$, $t, s \epsilon [a,b]$ lineer operatörlerin bir ailesi ve bu aile için

$$\begin{cases} U_t(t,s)f + A(t)U(t,s)f = 0, & t, s\epsilon[a,b] \\ U(s,s)f = f, & f \epsilon H \end{cases}$$

koşulları sağlansın (Krein, 1971; Daleckii ve Krein, 1974).

Teorem 3.1: L_W maksimal hiponormal genişlemesinin spektrumu

$$\sigma(L_W) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \lambda_0 + \tfrac{2k\pi i}{b-a},\ e^{-\lambda_0(b-a)} - \mu = 0 \textit{ denkleminin } \text{çözümü}, \mu \in \sigma\big(W^* U(a,b)\big),\ k \in \mathbb{Z}\Big\}$$

şeklindedir.

İspat: L_W maksimal hiponormal genişlemesinin spektrumu için

$$L_W u(t) = u'(t) + A(t)u(t) = \lambda u(t) + f(t),$$
$$u \in D(L_W),\ f(t) \in L^2\big(H,(a,b)\big)$$

problemini ele alalım. $L^2\big(H,(a,b)\big)$ Hilbert uzayında bu diferensiyel denkleminin çözümleri

$$u_\lambda(t) = e^{\lambda(t-a)}U(t,a)f_0 + \int_a^t e^{\lambda(t-s)}U(t,s)f(s)ds,\ f_0 \in H$$

formundadır (Ismailov ve Erol, 2012). Bu durumda, $u(b) = Wu(a)$ sınır değeri sağlandığından,

$$e^{\lambda(b-a)}U(b,a)f_0 + \int_a^b e^{\lambda(t-s)}U(b,s)f(s)ds = Wf_0$$

olup $W: H \to H$ üniter operatör olduğundan

$$\big(W^*U(b,a) - e^{-\lambda(b-a)}\big)f_0 = -W^*\int_a^b e^{\lambda(a-s)}U(b,s)f(s)ds$$

eşitliği bulunur. $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı L_W maksimal hiponormal operatörünün spektrumunda olması için

$$e^{-\lambda(b-a)} = \mu \in \sigma\big(W^*U(a,b)\big)$$

bağıntısının sağlanması gerekli ve yeterlidir. Böylece $\lambda \in \sigma(L_W)$ için

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{2k\pi i}{b-a},\ e^{-\lambda_0(b-a)} \in \sigma\big(W^*U(a,b)\big),\ k \in \mathbb{Z}$$

şeklindeki genel yapı elde edilir.

Sonuç 3.2: L_W maksimal hiponormal genişlemesinin spektrumu boştan farklı ve sonsuzdur.

Kaynaklar

Berezansky, Y.M., 1968. Expansions in Eigenfunctions of Self-adjoint operators. Providence, RI: Amer. Math. Soc..

Daleckii, J.U. and Krein, M.G., 1974. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space. Providence, RI: Amer. Math. Soc..

Dunford, N. ve Schwartz, J.T., 1963. Linear Operators , vol. II. New York, Interscience.

Giaquinta, M. ve Hildebrand, S., 2004. Calculus of Variations I. Springer-Verlang Berlin, Heidelberg, Germany.

Gorbachuk,V.I. ve Gorbachuk, M.L., 1991. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations. Dordrecht, Kluwer Academic.

Ismailov, Z. ve Erol, M., 2012. Normal Differential Operators of First-order with Smooth Coefficients. Rocky Mt. J. Math., 42, 633-642.

Ismailov, Z. ve Unluyol, E., 2010. Hyponormal Differential Operators with Discrete Spectrum. Opuscula Math., 30, 79-94.

Ismailov, Z.I., 1998. Discreteness of the Spectrum of the First Order Normal Differential Operators. Doklady Mathematics, Birmingham, USA, 57, 32-33.

Ismailov, Z.I., 2003. On the Normality of first-order differential operators. Bull. Pol. Acad. Sci, 51, 139-145.

Ismailov, Z.I., 2006. Compact Inverses of First-order Normal Differential Operators. J. Math. Anal. Appl., 320: 266-278.

Janas, J., 1989. On Unbounded Hyponormal Operators, Ark. Mat., 27, 273-281.

Jin, K.H., 1993. On unbounded Subnormal Operators. Bull. Korean Math. Soc., 30, 65-70.

Krein, S.G., 1971. Linear Differential Equations in Banach Space, Providence, RI: Amer. Math. Soc..

Ota, S. ve Schmüdgen, K., 1989. On Some Classes of Unbounded Operators, Integr. Equat. Oper. Th, 12, 211-226.

Putnam, C.R., 1972. The Spectra of Unbounded Hyponormal Operators. Proc. Amer. Math. Soc.,31, 458-464.

Smüdgen, K., 2012. Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space. Springer Dordrecht Heidelberg New York London.

Stochel, J. ve Szafraniec, F.H., 1989. The Normal Part of an Unbounded Operator, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 92, 495-503.

Von Neumann, J., 1929. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktional-operatoren. Math. Ann., 102, 49-131.