HÂREZMÎ, İBN TÜRK, VE LIBER MENSURATIONUM: İSLÂM CEBİRİNİN KÖKENLERİ ÜZERİNE

JENS HØYRUP*

Türkçe'ye Çeviren: MELEK DOSAY**

İÇİNDEKİLER

* Bu makale, İbn Türk, Hârezmî, Fârâbî, Beyrûnî, ve İbn Sînâ Ankara, 9-12 Eylül 1985 sempozyumunda sunduğum tebliğimin biraz değiştirilmiş (tashih edilmiş) bir versiyonudur. Bu makalenin özeti sempozyum tebliğler cildinde bulunacaktır. Beni Sempozyuma davet eden, ve makalenin tamamının bu dergide yayınlanmasını isteyen Profesör Aydın Sayılı'ya içten teşekkürlerimi sunarım.

Jens Høyrup, Roskilde Üniversite Merkezi ögretim üyesi, Kopenhag, Danimarka.

** Dil ve Tarih Coğrafya Fakültesi, Felsefe Bölümü, Bilim Tarihi Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi.

Bu tercüme sırasında, gerek tercümede karşılaştığım güçlüklerde, gerekse konu bakımından anlayamadığım noktalarda değerli yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Ord. Prof. Dr. Aydın Sayılı'ya teşekkür ederim. (Çevirenin notu).

Genel Notlar:

Kelimelerle ilgili bütün sorunlarda ve Samî diline ilişkin bütün problemlerde aşağıdaki sözlüklere baş vurdum:

Hans Wehr, *A Dictionary of Modern Written Arabic.* Editörü: J. Milton Cowan. Üçüncü baskı, Wiesbaden: Otto Harrassowitz, 1971.

Wolfram von Soden, *Akkadisches Handwörterbuch.* I-III. Wiesbaden: Otto Harrassowitz, 1965–1981.

Wilhelm Gesenius, *Hebräisches und Aramäisches Handwörterbuch über das Alte Testament.* Hazırlayan Frants Buhl yayını, 16. edisyon, F. C. W. Vogel, Leipzig 1915.

Hiç Arapça ve İbranîce metin okumadığım, sadece Akadca matematik metinleri okuduğum için, filolojik hatalar yapmış olabilirim.

Bu konuda ve diğer konularda tashihler için müteşekkir olacağım.

Matbaa özellikleri nedeniyle, Arapça cümlelerde uzun seslileri – yerine ^ işareti ile gösteriyorum. Gereksiz yanlışlardan sakınmak için İbranîce kelimeler seslendirilmeden verilmişlerdir.

Özet:

Eski Babil'in* ikinci derece denklemlerini ele alan cebiri üzerinde ayrıntılı bir inceleme, bu cebirin metodunun ve kavramcılığının aritmetiksel ve retorik olmadığını, kabaca, Hârezmî tarafından sunulan cebir gibi olduğunu gösterir. Mezopotamya cebiri, ikinci derece katışık denklemlerin temel tiplerinin çözümünde Hârezmî ve İbn Türk'ün *el-cebr*'inde işe karışan hesaplamaları kanıtlamalarında kullandıklarına çok benzer, "yeltensel" (naive) bir alanlar geometrisi üzerine dayandırılmıştır.

Bu durum yeni bir ışık altında şöyle bir probleme yol açar: Erken İslâm Dünyasının kullandığı kanıtlamalar çoğu kez iddia edildiği gibi, bir "bilimsel öncesi" matematiksel gelenek üzerine bir Yunan aşısı mıydı, yoksa erken İslâm cebirinin kaynakları ile ilişkisi farklı mı farzedilmeliydi?

Abû Bekr adlı bir kimsenin bir XII. yüzyıl Latince tercümeden bilinen *Liber Mensurationum* adlı eseri ikinci dereceden cebirsel prob-

* Genellikle, Eski Babil Sülâlesi anlamına geldiği anlaşılmaktadır. (Çevirenin notu)

lemlerin çözümü için farklı iki metoda sık sık atıflar yapar: "Ekleme ve çıkarma" (*el-cem' ve'l tefrîk*) olarak adlandırılan temel metot, diğeri de Hârezmî'nin standard sayısal hesaplamaları ve retorik indirgemeleri kullanması ile başlayan *el-cebr*'dir. *Liber Mensurationum*'un cümle kurma yolları ve gramatik biçimlerin seçimi bakımından Eski Babil metinleri ile uyuşmakta olduğuna bakılırsa, ve yine metinin terminolojisindeki ve matematiksel muhteviyattaki özel ayrıntılar arasındaki benzerlikler dikkate alınınca, bu eser, bizce Geç-Babil (Selökid) cebiri olarak adlandırılan cebiri olduğu gibi, Yunan'ı da atlayan (yani bunlardan etki almaksızın sürüp gelen), Eski Babil'in yeltensel geometrik cebirinin bilimsel öncesi bir devamını, intikal etmiş bir şeklini gösterir. Bu, Hârezmî'nin *Cebir*'inden ve Şâbit ibn Kurra'nın Euclid tipi ispatından gelen içsel kanıtlamalarla birlikte, İbn Türk ve Hârezmî'nin, bilimsel matematiksel bir disiplin olarak bu konunun yeniden kurulmasına katkıda bulunarak, matematiğin tabiatına ilişkin olarak bir Yunan anlayışı ile var olan iki matematiksel geleneği (yani el-cem' ve'l tefrîk ile el cebr'i) birleştirdiklerini gösterir.

Makalenin sonunda I. Ek bölümü, *el-cebr* ve *el-mukâbele* terimlerinin tarih öncesini bu yeni kanıtın temelleri üzerinde tartışır. II. Ekde, Eski Babil'in 2^n serisine ilişkin metotlarının ve formüllendirmelerinin Ortaçağların bilimsel öncesi matematiğine aynen geçişinin başka örneği sunulmuştur. III. Ek bölümü Hârezmî'nin *Cebir*'inin Rosen tercümesinden bazı anahtar pasajları kapsar.

I. Cebirin Doğuşu Probleminin Geleneksel Durumu

Aşağı yukarı elli yıl kadar önce, bazı çivi yazılı tabletlerde ikinci derece denklemlerin[1] çözümünün verildiğinin keşfinden bu yana Hârezmî'den ve onun çağdaşı İbn Türk'den bilinen erken İslâm[2]

[1] Kısa olması için, "denklem", "ikinci derece", vb. gibi bazı modern terimleri kullanmanın sakıncalı olmayacağına karar verdim. Buradaki anakronizm problemini bir başka yazımda (1985a) ele aldım.

[2] Buradaki "İslâm" terimini "(Ortaçağ) İslâm kültürüne ve topluluğuna ait olan" anlamında kullanıyorum. Bu anlamda, Al-Samaw'al gibi Şâbit İbn Kurra da müslüman olmamalarına rağmen İslâm matematikçileridir. "Arap matematikçileri" alternatifi yerine bu terimi seçtim, çünkü söz konusu kültürün birleştirici gücünün Arap dili değil, İslâm olduğunu kabul ediyorum. (Bakınız, Høyrup 1984, özellikle sayfa 29 ve devamı).

cebirinin eski bir geleneği devam ettirdiği ve sistematize ettiği sarih bir şekilde anlaşılmıştır. Daha yakın bir tarihte Anbouba (1978: s. 76 vd. d) da bu iki araştırıcının, onların günümüzde mevcut olan eserlerinden doğrudan görülebilenden daha zengin bir çağdaş zemin üzerinde çalıştıklarını göstermiştir.[3] Gerçekte bu daha zengin olan gelenek örneğin, Abû Kâmil'in *Cebir*'inde şuraya buraya dağıtılmış bulunan bazı ifadelerden görülebilir (aşağıda bölüm VI ya bakınız).

Şimdiye kadar, sürekliliğin kabulü için bir ana argümen, Babil tabletlerinin Hârezmî tarafından verilen kurallara benzer salt sayısal hesaplama biçimlerinin betimlenmesi olarak bir tesbit edilmiş biçiminden güç alabilir. Bu benzerliği örneklendirmek için, ilkin Hârezmî'nin "kökler ve kareler[4] toplamının sayıya eşit" olması durumu için verdiği kurala bakabiliriz, bu tipin bir misali, "Kare ve on kök toplamı otuzdokuz dirheme eşittir":

> Kök sayısını ikiye bölersiniz, ki bu örnekte beş olur. Bulduğunuz sonucu kendi kendisiyle çarparsınız, sonuç yirmibeştir. Buna otuzdokuzu ekleyin, toplam altmışdörttür. Şimdi, bunun kare kökünü alın, ki bu da sekizdir, ve bundan kök sayısının yarısı olan beş'i çıkarın, üç kalır. Bu, aradığınız karenin kökidür, karenin kendisi ise dokuz'dur.
>
> (Rosen 1831:8)

Benzer bir Babil problemi (BM 13901 No 1) Thureau-Dangin tarafından aşağıda gösterildiği şekilde tercüme edilmişti (Altmış tabanlı sayıları halihazırdaki rakam sistemi ile gösteriyorum):

> "Yüzeyi ve kare kenarını topladım: 3/4 * etti. Birimi alırsın, ikiye bölersin: 1/2 eder. 1/2 yi 1/2 ye bağlarsın (bir kare yaparsın), 1/4 eder. 1/4 ü 3/4 e eklersin: 1 eder. Bu ise 1 in karesidir (1 eşkenarıdır). Bağladığın 1/2 yi 1'in (karenin) içinden söküp çıkarırsın, bu 1/2 dir, yani karenin kenarıdır.
>
> (TMB, 1)

[3] Bu sonuç, Sahl ibn Bişr'e bir *Kitâb el-cebr ve'l Mukâbele*'nin atıfı (İbn Nedim'in *Fihrist*'inin Flügel edisyonu, s. 79) çok muhtemel olarak yanlış bile olsa geçerliğini korur. Bakınız, Saidan 1978: s. 23, GAS V, s. 245, ya da Suter 1892: s. 62 vd, 166.

[4] "Kare", kelime anlamı "zenginlik" ya da "servet" olan *mâl* için Rosen'in tercüme ettiği bir terimdir (aşağıya bakınız).

* Bu sayı ve daha sonraki sayfalarda karşılaşılacak benzer misâller bir âdî kesir (ya da, bir tamsayı ve ekinde bir âdî kesir biçiminde bir nicelik) olarak okunacaktır

Hârezmî'nin hesaplamada kullandığı rakamları problemin vaz edilişine göre belirlemesine karşılık, Eski Babilli yazarın işlem sürecinde 1/2 nin ikinci kez ortaya çıkışını ilk defa ortaya çıkışına atıf yaparak belirlemesi dışında, her iki davranış tarzı da gerçekten çok benzer görünüyor. Bu yöntem, doğru fakat ispatlanmamış ve açıklanmamış sayısal hesaplama geleneği örneği gibi görünüyor, bu iki erken İslâm cebircisinin (yani Hârezmî ve Abdülhamid İbn Türk) geleneksel standard işlem süreçleri için, daha önce "yeltensel-geometrik" kanıtlama olarak adlandırdığımız yöntemi yenilik olarak bu daha eski geleneğe eklemeleri onların başlıca önemli katkılarını teşkil etmişe benziyor.

Aşağıda sık sık sözkonusu edeceğim mülâhazalar açısından, benim bir örneğini TMB den verdiğim geleneksel tercümelerden anlaşılıyor ki, bu işlemlerin temel kavramsallaştırma (yani, ister ters sayı cetvellerinde verilen sayılar olsun, ister tarla alanları, ister fiyatlar olsun gerçek veya yapay pratik problemler ile ilgili çeşitli somut nicelikleri eskiden temsil eden temel varlıklar için verilen ontolojik konum) süreci aritmetikseldi: Bu geleneksel yorumda karenin "alanı" ve "kenarı", bilinmeyen üsler arasındaki aritmetiksel ilişkileri gösteren sayılardan başka bir şey değildir, tıpkı Diophantos'un *Arithmetica*'sında olduğu gibi. Buna benzer biçimde, *İşlem süreci* de aritmetiksel görünür — tıpkı Diophantos'da ve İslâm'ın normal olarak bilinen cebri, ve Batı'nın "retorik" cebrinde olduğu gibi —. (Bunun aksi olarak Hârezmî ve İbn Türk'ün yukarıda söz edilen kanıtlamaları [justification, haklı çıkarma], kare ve kenarını *mâl* ve *cezr*, "zenginlik" ve "kök", yani bilinmeyen ve onun kare kökü, sayılarını temsil etmek şartı ile *kavramsallaşma süreci* burada aritmetiksel olmasına rağmen, *işlem süreci* geometrikdir.)

II. Eski Babil Cebirinin Yeni Bir Yorumu

Cebirin Babilden Erken İslâma uzanan süre içindeki gelişimi konusunda yukarda sunulan senaryoyu, birkaç yıldan beri benim de meşgul olageldiğim Eski Babil cebirinin işlem süreçlerinin ve temel kavram anlayışının ayrıntılı bir araştırmasının [5], [6] sonuçları şüpheli

[5] İlkin (1982) Danimarkaca olarak kısaca anlatılmıştır. Daha sonra bibliyografyada (1984a) da verilen eserimde başlangıç mahiyetinde bir araştırma, (1985) de yeniden gözden geçirilmiş olarak sunulmuştur. Halen üzerinde çalışmaktayım (1985a).

[6] İlk örnekte yalnızca MÖ. 1800'den MÖ. 1600'e kadar tarihlenen Eski Babil cebir metinlerini söz konusu ediyorum. Üçüncü bölümde, Mezopotamya cebiri-

ve tartışmaya açık hale getirmiştir. Çeşitli başka farazîyelerle birlikte, yapıya ve terminolojinin kullanımına titiz bir yaklaşma, metinlerin alışılagelmiş deşifre ediliş biçiminin bizi matematiksel bir şekil benzerliği olan fakat doğru olmayan bir zihinsel görüntü ile donattığını gösterir: Bu metinlerdeki uzunluk ve alanların geometrik bir kavram anlayışına uygun olarak, herhangi bir yoruma baş vurmadan sadece taşıdıkları değere sahip oldukları kabul edilmelidir. Aynı şekilde, işlem süreci de, Hârezmî ve İbn Türk'de bulunan kanıtlamalara çok benzer, ama onlardan daha ilkel olan "yeltensel" (naive) çizimsel alanlar geometrisinin işlemlerini ortaya çıkarıyor.[7]

Bu ifadeleri desteklemek amacıyla benim araştırmamın ortaya koyduğu terimlerin daha kesin anlamlarını kullanarak üç tane Eski Babil problemini tercüme edeceğim ve açıklayacağım.

İlkin, yukarda Thureau-Dangin'den alınan metne ikinci kez bakalım (BM 13901 — MKT III, 1 deki çeviri yazı metinden tercüme edilmiştir):

> Bir yüzey ve kare kenarını topladım: 3/4 etti. 1'i alırsın, ikiye bölersin, 1/2 eder, 1/2 yi 1/2 ye bağlarsın (bir kare yaparsın), 1/4 eder, 1/4 ü 3/4 e eklersin: 1 eder, bu ise 1'in karesidir (1 eşkenarıdır). Bağladığın 1/2 yi 1'in (karenin) içinden söküp çıkarırsın: Bu 1/2 dir, yani karenin kenarıdır*.

Terminoloji pek o kadar kullanışlı görünmüyor, ve bizimkilerden farklı olan bu kavramların ve işlemlerin yapısını noksan da olsa ifade etmesi söz konusu olduğuna göre, terminoloji esasen de çok kullanışlı olamaz. "Kare kenarı" (*mithartum*) kenarının uzunluğu ile belirlenen bir kareyi gösterir (biz Yunanlılardan beri kareyi alanı ile belirliyoruz). Bu terim "karşılayan (dengi)" anlamına gelir ve anlamlarının kapsamının tümüyle Arapça *ḳabîla*'ya yakın bir kelime olan *maḫârum*'dan türer.

---

nin ikinci belgelenen dönemine, yani Selökid dönemi metinlerine tekrar döneceğim. (M.Ö. 3. – 2. yüzyıllar).

[7] O halde, bu metinler dört farklı "çarpma" işlemi ve iki farklı "toplama" işlemi ayırt etmektedir. Aritmetiksel yorumda bu ayırımlar hem amaçsız hem de anlamsızdır; geometrik bir yorumda ise bu işlemler farklıdır.

* Høyrup'un çevirisi, bir önceki bölümdeki Thureau-Dangin tercümesinden anlam bakımından farklı değilse de, ifade bakımından bazı farklılıklar göstermektedir. Burada, Türkçe çevirisinde, serbest olduğu anlaşılan her iki tercüme birleştirilmiştir (Çevirenin notu).

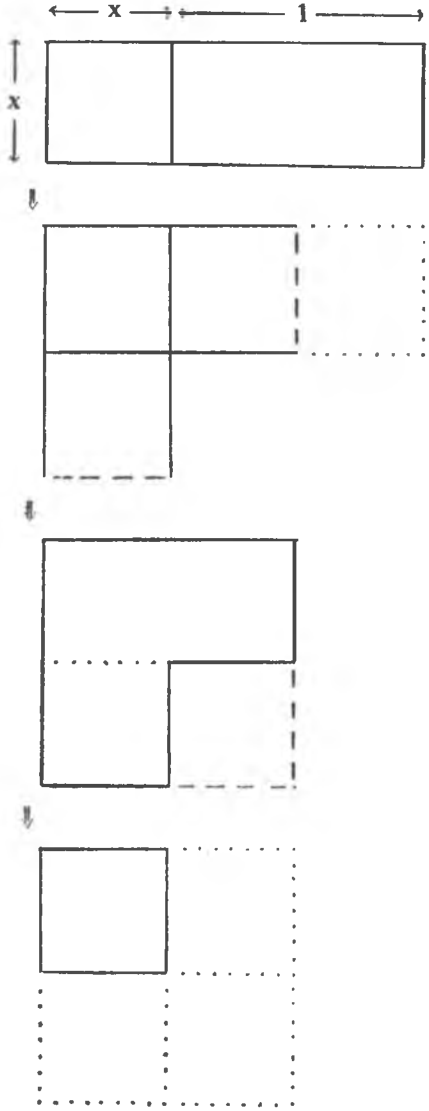
X'in kimliğini koruduğu (tıpkı bankanın yıllık faizleri eklemesine rağmen bir sermayenin kendi kimliğini koruması gibi) somut (soyut-aritmetiksel değil) bir toplam yapılırken X'i Y'ye "eklersiniz" (*waṣâbum*), halbuki toplananların her ikisinin de kimliğini kaybettikleri daha soyut bir toplamda onları "kümeleştirirsiniz" (*kamârum*) (öyle anlaşılıyorki "kümeleştirme" ölçen rakamların gerçek bir toplamını gösteriyor). "Uzantı eki (projection)" (*wâṣîtum*) X uzunluğundaki bir doğru parçasını alanı $x \cdot 1 = x$ olan bir dörtgene dönüştüren 1 enidir. *Šakânum*'un çevirisi olan "bilinmeyen yerine bir değer koymak", İngilizcede "bilinmeyen için verilen bir değeri denemek", "bilinmeyene bir sayı vermek", Arapça'da *waḍa'a*'ya yakın olan çok yönlü bir ifadedir. "Bölmek" (*ḫepûm*) geometrik bir orantıya sahip ikiye bölmedir (fakat eşit olarak ikiye bölme değildir). Bir dörtgen oluşturulduğunda, iki doğru "enlendirilmiştir (made span)" (*šutâkulum*) ("bina etme" Babil açıklamasıdır — *banûm*, Arapça *benâ* ile aynı köktendir). "Eşkenar", dörtgen şekil için kullanılan (Sümerceleştirilmiş) diğer bir terimdir ("eşit olmak" anlamında bir fiil, ve "x y'yi eşkenar yapar" cümlesi, alanı X olan bir karenin kenarının y olduğunu anlatmak için kullanılmaktadır. "Koparıp ayırma" (*nasâḫum*), "ekleme"nin tersi, çıkan parçanın kimliğini koruyan somut bir işlemdir.

Bu açıklamalarla şekil 1'deki sürecin anlaşılması kolaylaşmış olsa gerektir. İlkin, "uzantı eki" karenin kenarlarından birinin uzatılmasıyla elde edilmektedir. Bundan sonra, bu şekil "geometrik orana sahip iki kısma bölünmektedir" (bütün bağlı dörtgen ile birlikte), ve dıştaki parça alanı $1/2.1/2 = 1/4$ olan bir karenin (üçüncü adımdaki noktalı çizgi ile gösterilen kare) iki "eki (span)" olacak şekilde hareket ettirilmektedir, ki bu kare, kesilmiş olan dörtgenin çıkarılması ile oluşan L biçimindeki şekle (gnomona) eklenmiştir. Bu daha büyük karenin alanı böylece $1/4 + 3/4 = 1$ olur, ve böylece kenarlarının değeri de 1 olmuş olur. Bölünüp çıkarılan ve yeri değiştirilen, kenarı $1/2$ olan kare (yani küçük kare) kenarı 1 olan büyük karenin parçasıdır, ve bu küçük kare büyük kareden, istenen "kare-kenarını" geriye bırakarak "koparılıp alınmıştır".

Eğer bununla Hârezmî'nin "bir kare ve on kök toplamı otuzdokuz dirheme eşittir" (Ek III'e bakınız) durumu için verdiği ikinci çeşit kanıtlamasını karşılaştırırsak, aralarında çok yakın bir uyuşma olduğunu görürüz. Aynı Eski Babil tabletinin 23 numaralı problemi, Hârezmî'nin 10x'in x·x karesinin dört kenarı boyunca eşit olarak uzandığı ilk kanıtlama çeşitinin bir paralelini bize vermiş olur. (MKT III, sayfa 4; 60 tabanlı sayılar değiştirilmeksizin çevrilmiştir):

Yüzeyi ve dört yanal eki topladım: 0;41,40. Dört yanal eki ifade etmek üzere 4 yazılır. 4'ün ters sayısı 0;15 dir.

0;15'i 0;41,40 ile çarparsınız (*nasûm*), sonuç olan 0;10,25 elde edilmiş olur. 1 uzantı ekini ilâve edin; sonuç, 1;5'in üzerine çizilen eşkenar dörtgenin yüzölçümü olan 1;10,25'tir. Kenar olan 1;5'dan daha önce eklediğiniz 1 uzantı ekini koparıp ayırınız: Elde edilen 0;5'i iki katı 0;10 olana kadar katlayınız (yani kendisi üzerine ekleyiniz), böylece 0;10 elde edilir. 0;10 *nindan* ortaya atılır.

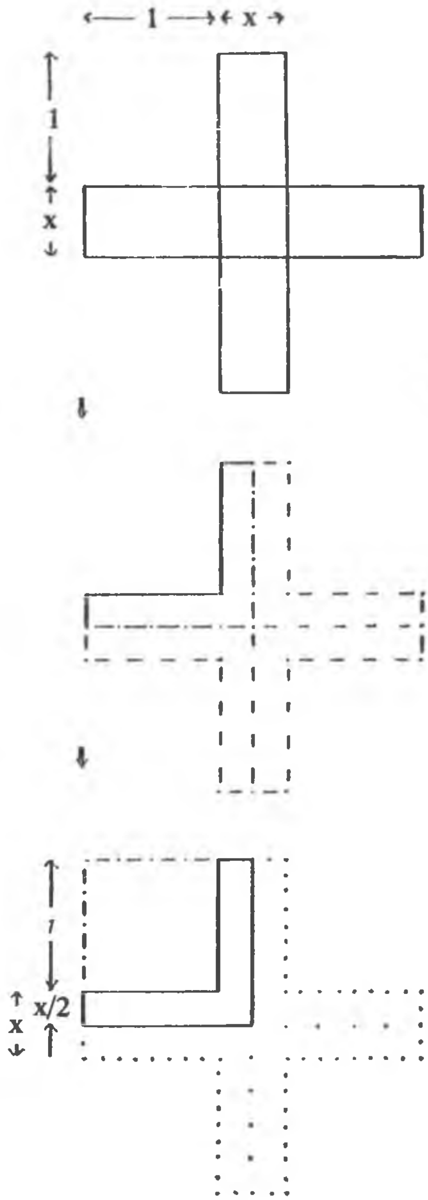


Şekil 1. BM 13901 No 1'in Geometrik yorumu. Sayılı 1962: 62 de İbn Türk'ün şekli ile ve Rosen 1831:16'da Hârezmî'nin şekli ile karşılaştırın

Bu tercüme fazladan bazı açıklamalar gerektirmektedir. "Yükseltme" (*nasûm*), somut, bir sayı çarpma ile hesaplanması gerektiğinde kullanılan bir terimdir (öyle anlaşılıyor ki, bir argümana orantılı atıfı gösteriyor). "İki kat yapma" (*eşēpum*) iki veya daha fazla defalar katlamayı işe karıştırır (aynı kökten gelen Arapça ḍi'f'ın paralelidir). *Nindan*, temel uzunluk birimidir (değeri yaklaşık 6 m.). Bu tek tek kelimelerden başka, şu da vurgulanmalıdır ki, başlangıçta kullanılan gramatik yapı dört yanal ek olduğunu, her zaman dört kenar kastedilmediğini açıkça ortaya koyar.

Şimdi de ikinci şeklin metnini inceleyelim. Aşağıdaki "yanal ekli yüzey" ve "uzantı eki" tepede gösterildiği gibi, haç biçiminde bir şekil ile başlamak zorunda olduğumuzu açık bir şekilde gösterir. Sonra, 1/4 ile çarpım gösterilmiştir. Çaprazlama şeklin dörtte biri tek başına göz önüne alınmıştır. "Uzantı" üzerindeki kare (kenarı "uzantı"nın kendisi olan bir geometrik şekil olarak tahayyül edilmiştir), alanı 1;10, 25 olarak bulunan ve gnomonu bir kareye dönüştürerek oluşan kareye "eklenmiştir". Buradan da, kenar 1;5 olmalıdır (1;10,25 eşkenarıdır). Bu kenar, "uzantı"nın yanal cephesinin yarısına "eklenerek" oluşturulmuştu, böylece, "eklenen" 1 koparılıp alınmış oluyor, ve geriye kalan 0;5 iki katına çıkarılır (somut olarak tekrarlanmış oluyor, "2'ye çıkarılmış" değil), ki bu da orijinal karede "kendini ortaya koyan" (yani, hesap sonucu elde edilen) kenar değerini verir.

Şunu da ilave etmeliyiz ki, bu problem yayınlanan Babil metinleri içinde tekdir. Bu



Şekil 2. BM 13901, No 23'ün geometrik yorumu. Rosen 1831 : s. 15'teki Hârezmî'nin şekli ile karşılaştırınız.

problem, tabletin sonlarına doğru, başlangıçtaki standard tiplerden uzakta, ve karmaşık çeşitlemeler arasında yer alır. Ben şahsen, bu problemin Eski Babil'de bile eskimiş bir tip olduğu düşüncesindeyim: Bir bilimsel-öncesi pratisyenler çevresi bu tip hobi türü problemi kolayca önerebilirdi, ve bu problem daha sonra sistemli bir okul çevresinde[8] daha genel ikinci derece denklemlerin formüle edilmesini etkilemiş olabilirdi; bunun tersi imkânsız değildir, ama çok az olasılıklıdır — özellikle bu bakımdan, aynı problem tipi ile Ortaçağ İslâm'da hep mesaha metinlerinde karşılaşılır.

Bir üçüncü problem (AO 8862, No 1; MKT I de, sayfa 108) daha karmaşıktır. Referans kolaylığı için problemi bölümlere ayıracağım.

A Uzunluk, genişlik. Uzunluk ve genişliği bağladım: Bir yüzey kurdum. Uzunluğun genişliği geçme miktarını yüzeyin içine ekledim: Sonuç 183. şekli döndürdüm. Şekli eski haline döndürdüm. Uzunluk ve genişlik toplandı: 27. Uzunluk, genişlik ve yüzeyin değeri nedir?

B	27	183	Toplam
	15	uzunluk	180 yüzey
	12	genişlik	

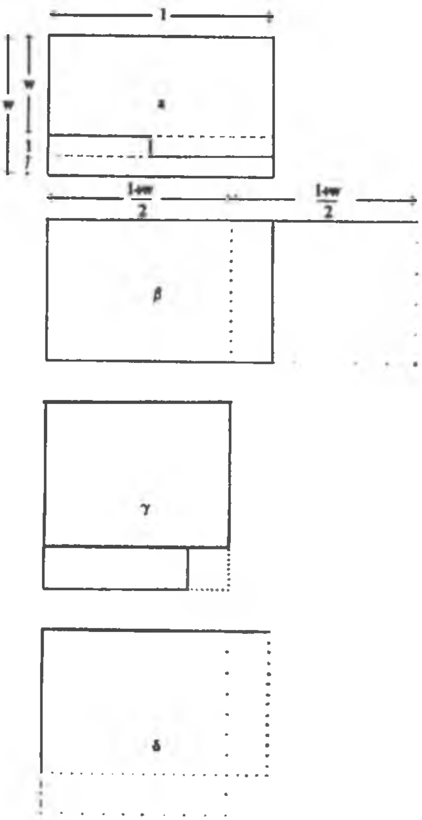
C Uzunluk ve genişliğin toplamı olan 27'yi 193'in içine ekleyin: Sonuç 210 olur. 2'yi 27'ye ekleyin: 29 olur.

D 29'u yarıya bölün: 14 1/2 elde edilir. <14 1/2'yi 14 1/2 ye bağlarsın (bir kare yaparsın)>. 14 1/2 kere 14 1/2, 210 1/4 eder. 210 1/4'ün içinden 210'u koparıp alırsın, geriye 1/4 kalır. 1/4 1/2 eşkenarını yapar. 1/2'yi ilk 14 1/2 ye ekle: Elde edilen 15 uzunluktur. 1/2'yi ikinci 14 1/2'den koparıp ayırırsın: Elde edilen 14 genişliktir.

E 27'ye eklediğiniz 2'yi 14'den koparıp alırsın gerçek genişlik olan 12 kalır.

F 15 olan uzunluk ile 12 olan genişlik bağlanır: 15 kere 12, 180 yüzeyidir. Uzunluk olan 15'in genişlik olan 12'yi geçme miktarı olan 3'ü 180'in içine ekleyin, 183 yüzeyi elde edilir.

[8] Mezopotamya matematiğinin inkişâfı ve karakteri üzerinde okul'un rolünü bibliyografyada 1985b'de verilen eserimin 7-17 sayfaları arasında ele aldım.



Şekil 3. AO 8862 No 1'in geometrik yorumu. Sayılı 1962:s. 164'teki İbn Türk'ün aynı şekli ile, ve Rosen 1831:s. 18'deki Hârezmî'nin şekli ile mukayese ediniz.

Başlangıçta söz edilen "uzunluk, genişlik", problemin bir dikdörtgenle ilgili olduğunu gösterir. A bölümündeki "çevirme" ve "geri çevirme" cümleleri bu problemin bölümlerini göstermektedir. B bölümü, bu şeklin boyutları hakkında bize ön bilgi verir (ve böylece, süreç kısmı öğrenciye, peşin olarak bilinen bu sonuçların *nasıl elde edildiğini* anlatır). D (ve F) bölümünde geçen, a-rà'nın tercümesi olan "kere" ifadesi çarpım cetvelinin (kelimesi kelimesine anlamı "adımlar") çarpan terimidir. D bölümündeki < > işaretli ilave, paralel pasajlara dayanarak yapılmıştır (ki bunlardan biri F bölümünde bulunmaktadır).

Şimdi şekil 3'ün metnini izleyebiliriz. Sürecin ilk bölümünde (C), uzunluk (l) ve genişliğin (w) bilinen toplamı (yani 27), uzunluğu $l = 15$, genişliği $W = w + 2 = 4$, ve alanı 210 (α) olan bir dikdörtgeni (bir boyutlu uzunluklar tam bir "uzantı-eki" sağladıkları zaman) oluşturarak, 183'ün içine eklenmiştir.

Bu problem, bu geometrik "değişken değişmesi" aracılığıyla Babil cebirinin standart problemlerinden birine dönüşmüştür ki, bu problem D bölümünde çözümlenmektedir: Uzunluk ve genişliğin toplamı ikiye bölünmüştür (β), ve bu yarım parçalar alanı $14\ 1/2 . 14\ 1/2 = 210\ 1/4$ (γ) olan bir kareyi "enlendirmektedirler." Tamamı bu karenin içinde bulunan ve değeri 210 olan dikdörtgene eşit gnomon, geriye alanı 1/4 ve kenarı 1/2 olan küçük kareyi (sağ alt köşedeki) bırakarak "koparılıp alınmaktadır". En son olarak, bu 1/2 büyük karenin yatay kenarına "eklenmektedir", böylece dikdörtgenin l uzunluğunu veriyor, ve bu 1/2 büyük karenin düşey kenarından "koparılıp çıkarıldığında" W genişliğini (δ) veriyor — yani büyütülmüş dikdörtgenin genişliği.

E bölümünde, orijinal (hakiki) w genişliği çıkarma işlemi ile bulunmuştur. Son olarak, F bölümü sonuçların doğruluğunu kontrol etmektedir.

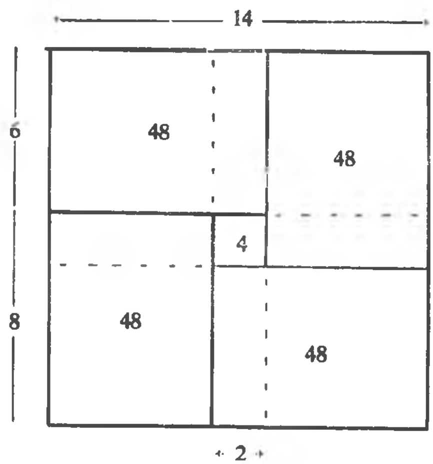
Hârezmî'nin *Cebir*'i ile karşılaştırıldığında, D bölümündeki sürecin "bir kare ve yirmibir dirhem toplamının on köke eşit" olduğu durumun ispatı (Rosen 1831:16–18) için verilen hesaplamaya aynen uyduğu görülmektedir.

Aynı süreç İbn Türk tarafından da verilmektedir (Sayılı 1962: s. 163), halbuki Abû Kâmil, anlaşıldığına göre *Elementler* II.5'den etkilenerek biraz farklı bir şekil kullanmaktadır (Levey 1966: 44-46) — Ve aynı konu için S̱âbit ibn Ḳurra'nın verdiği ispatta atıf yaptığı önerme (Luckey 1941: s. 106 vd.).

III. Selökid Çağında Bir Tablet Misâlinin Sağladığı Kanıtlama

Yukarda belirtildiği gibi, Babil cebrinin belgelenen ikinci dönemi Selökid çağına aittir. Bu döneme ait metinlerde Eski Babil döneminden o zamana kadar geçen süre içinde bir çok değişikliklerin olması dolayısıyla ve, bu değişikliklerin erken İslâm cebirine kadarki süreklilik sorunu ile ilişkisi bulunduğundan, bu dönemin kendine özgü tarzını basit bir problemi tercüme ederek göstereceğim (BM 34568 No. 9; Soden tarafından tashih edilmiş şekli ile MKT III, 15'teki metin tercüme edilmiştir):

Uzunluk ve genişlik toplandı, 14 elde edildi, ve 48 de yüzey olur. Adını bil-



Şekil 4. BM 34568 No 9'daki hesaplama adımları için "yeltensel" kanıtlama olarak hizmet edecek, (ve, bu dikdörtgenler içine köşegenler çizildiği zaman Pitagor teoremini ispat edecek, ve basit sayma işlemi aracılığı ile özdeşlikler türeten bir çeşit) bir geometrik şekil

miyorum. 14 kere 14 196 eder. 4 kere 48 192 eder. 192'den 196'ya çık, 4 kalır. 4 elde etmek için 2 kere 2'yi çarpmak gerekir. 2'den 14'e çık, 12 kalır, 12 kere 1/2 6 eder. 6 genişliktir, 8 de uzunluk olur. En göze çarpan değişiklik, geometrik olarak sunulan bir problemin bütünüyle aritmetiksel kavranmasıdır. Karşılıklı aritmetiksel ilişkilerde sayılar, işe karışan geometrik varlıkları temsil etmek için kullanılıyorlardı; çıkarma ve çarpma sayma süreçleri olarak düşünülmektedir ("X'den Y'ye çık"; "Y'den X adım git"), ve bir karekök $x \cdot x = A$ aritmetiksel denklemi için çözüm olarak anlaşılmaktadır.

Bir başka değişiklik, sürecin yapısında görülmektedir. Sürecin yine de geometrik olması mümkün, ve hatta daha akla yakındır— fakat durum ne olursa olsun Eski Babil sürecinden farklıdır. Eski Babil süreci uzunluk ve genişlik arasındaki farkın yarısını bulurdu ve bunu onların toplamının yarısına eklerdi ve çıkarırdı. Burada ise, farkın *bütünü* bulunur, ve toplamlarına eklenir, uzunluğu elde etmek için de bu sonuç ikiye bölünür, vs. Öyle anlaşılıyor ki, mümkün olan geometrik akıl yürütme de hazırlanmış bir şekil üzerinde (Şekil 4'de bakınız) sunuluyor — Metin, yapısal süreçlerden iz ihtiva etmemektedir. (Mamafi şu nokta da dikkate alınmalıdır ki, aynı şeklin yapısal bir tavsîfi de YBC 6504 No 2 Eski Babil probleminin çözümü için kullanıldığı tahmin edilebilir (Benim 1985'deki yayınımın 42 ve takip eden sayfalarına bakınız), eğer gerçekten bu maksatla kullanılmışsa, bunun Selökidler tarafından getirilmiş bir yenilik olmaması gerekir).

IV. Liber Mensurationum

Bir MS 11. yüzyıl (?) yazması (Bibliotheca Amplonianae No 362) Cantor'a göre (1875:104) Latince tercümesinde MS dördüncü yüzyıla kadar geri gidebilen, ve bir İskenderiye kaynağından tercüme edilmiş olduğu anlaşılan bir problem ihtiva etmektedir. Bu problem, hipotenüsü ve alanı bilinen bir dik üçgenle ilgilidir. Bu problem, Selökid metodu ile çözülmüş olan bir ikinci derece denklemine yol açmaktadır, — Ve gerçekten, bu problem, Selökid tabletinden az önce aktarılan problem çeşitleri ile yakından ilişkilidir. Böylece, ikinci derece denklemleriyle ilgili İskenderiye bilgisinin (Heron'un *Geometrica*'sında da belgelendiği üzere, Heiberg 1912:380) Eski Babil matematiğinden çok Selökid matematiği ile daha yakından ilişkili olduğu anlaşılmaktadır (ve bunun tersine Selökid pratik geometrisi Eski Babil mesâhasından çok "Heron tipi" geometriye yakın gibi görünmektedir, VAT 7848 No 3, MCT'de s. 141'e bakınız). Bu durum, gelişimin, Eski Babil metinlerinden Selökid ve İskenderiye uygulamalı matematiği yoluyla, erken Ortaçağlara süreklilik gösterdiği fikrine yol açabilir.

MS 12. yüzyılda Cremona'lı Gherardo tarafından Arapça'dan Latinceye "tercüme edilen ve özetlenen", ve orijinali kimliği meçhul bir Abû Bekr tarafından yazılmış olan bir *Liber Mensurationum*, "ʿilm el-mesâha üzerine kitap"ın muhtevası daha şaşırtıcıdır. (Bakınız, GAS V, s. 389; Busard'ın bibliyografyada 1968 de geçen eseri kritik bir edisyonu ihtiva eder).

Bu eserin muhtevası karmadır. Yamuk, üçgenler, daire, ve daire dilimleri, ve üç boyutlu cisimlerle ilgili olan ikinci yarısı kuvvetli bir İskenderiye çeşnisidir. Kare, dikdörtgen ve eşkenar dörtgen ile ilgili olan ilk yarı (1-64 arası problemler) çeşitli nedenlerle göze çarpmaktadır. Bu bölüm daha arkaik gibi görünmektedir ve burada ele alacağım kısım işte bu bölümdür.

Kitabın şurasında burasında karşılaşılan "daha öncesine" atıflardan, bu eserin *el-cebr* konusundaki bir eserin, ki Latince metinde *cebir* yerine *aliabra* (No 5, 9, 25, 26, vb. problemler), bir refakatçisi olarak kullanıldığı anlaşılmaktadır. Temel katışık denklemlerin numaralandırılışı, Hârezmî geleneğindeki benzerliği göstermektedir[9].

Bu eser, hem "retorik olarak" düzenlenmesi bakımından, hem de matematiksel özü bakımından önemlidir. Bunu göstermek için bazı

[9] Hârezmî'nin 4,5, ve 6. durumları Şâbit ibn Ḳurra'nın *Rectification of the Cases of Algebra* (Cebir'in Durumlarının Tashihi) adlı kitabında "birinci", "ikinci", ve "üçüncü" olarak numaralandırılmıştır, İbn Türk ise sadece tanımlamıştır, hiç numara vermemiştir. Tercümenin diğer üslupsal özellikleri açısından bakıldığın da (Tanrıya iyi niyet refaransları yerinde bırakılmıştır), Gherardo'nun başka bir yerden bildiği bir numaralandırmayı araya sokmuş olduğu düşüncesi hariç tutulmasa da, buna inanılması güç gibi görünmektedir (meğer ki, kitabın başlığında yaptığını iddia ettiği anlaşılan kısaltma bu nokta da yapılmış olsun); fakat bu eserin İslâm'dan nakli boyunca Hârezmî'ye ait özellikler ile karışması, bu hariç tutmayı güçleştirmektedir, özellikle metindeki sarih hataların çeşitliliği açısından bakıldığında (No 38 hemen öncesinde geliyormuş gibi No 32'ye atıf yapmaktadır ve ayrıca başka bir problemden alınmış unsurlara sahiptir; No 62 olarak tekrarlanmış olan No 57 kendinden önce geliyormuş gibi No 58'e atıf yapmaktadır; No 16 No 18 olarak tekrarlanmıştır). Chasles'i aktaran ve ele alan Busard (1968: s. 71)'a da bakınız.

Hârezmî etkisinin hakiki karakterine karşılık, *el-mukâbele* teriminin bu anlamda kullanımı Hârezmî'nin kullanımından tamamen farklıdır (Aşağıda Ek I'e bakınız).

problemlerini tercüme edeceğim (Roma ve Hint rakamları ile karma bir durumda bulunan Latin harflerinin orijinal olması hemen hemen imkânsız olduğundan, "Hint" rakamları denilen, günümüzde kullanılan rakam sistemini kullanacağım):

No 3 Eğer bir kimse (yani problem 1'de sözkonusu edilen "bir kimse") size şunu söylemişse: (Bir karenin) kenarını ve alanını topladım, sonuç 110 oldu. Buradan, her bir kenarının değeri ne kadardır?

Bunun yöntemi, kenarın yarısını alırsın, ve bunu kendi kendisiyle çarparsın. Sonuç 1/4 dür, bunu 110'a eklersin, 110 1/4 eder. Sonra, bunun kare kökünü alırsın, 10 1/2 eder, bundan yarımı çıkarırsın, geriye kalan 10, kenardır. Anla!

Bunun, *el-cebr*'e uygun olan bir başka metodu daha vardır, bu yönteme göre, kenarı bir şey (yani x) olarak alırsın, ve kendi kendisiyle çarparsın, bulduğun sonuç mâl, yani alan (x^2) olacaktır. Sonra, bunu söylediğim gibi kenara ekle, ve elde edeceğin sonuç, 110'a eşit olan mâl ve bir şey toplamı olacak. Sonra, *el-cebr*'de önce yaptığın gibi yap, ki şey'in (katsayısının) yarısını alırsın ve kendi kendisiyle çarparsın, ve sonucu 110'a eklersin, ve bulduğun sonucun kare kökünü alırsın, ve bundan kök (katsayısının) yarısını çıkarırsın. Geriye kalan, kenar olacak.

No 26 Eğer bir kimse şunu söylemişse: Bir dikdörtgenin alanı 48, uzun kenar kısa kenarın 2 fazlasıdır; buradan, kenarların her biri nedir?

Bunu bulma yöntemi, 2'yi yarıya bölersin, bu bulacağın sonuç 1 dir, bu değeri kendi kendisiyle çarparsın, ve sonuç yine 1 dir. Sonra bunu 48'e katarsın, ve elde ettiğin 49'un kare kökünü alırsın, ki bu 7 dir, bundan 1'i çıkarırsın, ve geriye kalan 6 kısa kenardır. Sonra, bu değere 2'yi katarsın, çünkü bir kenarın diğerini 2 geçtiği söylenmişti (çünkü onun dediği buydu), ve sonuçta 8 bulunur, bu da uzun kenardır.

Fakat *el'cebr*'e göre bunun metodu şöyledir, kısa kenarı bir "şey" olarak alırsın. Buradan, uzun kenar bir "şey" ve 2 toplamı olacak, "şey"i "şey" ve 2 toplamı ile çarp, mâl ve "şey" toplamı, alan olan 48'e eşit olacak ($x^2+2x=48$). Sonra, (*el-cebr*'in) dördüncü sorusunda önce yapmış olduğuna göre yap, ve eğer tanrı isterse sonucu bulacaksın.

No 38 Fakat, bir kimse sana şöyle demişse: (Bir dikdörtgenin) uzun ve kısa kenarı ve alanı topladım, ve 62 buldum, uzun kenar kısa kenarın 2 fazlasıdır; buradan her kenar nedir?
Bunu bulmak için izlenecek yöntem, 62'den 2'yi çıkarırsın, geriye 60 kalır, kenarların sayısının yarısına 2'yi kat, sonuç 4 dür. (...)

No 45 Fakat, bir kimse sana şöyle demişse: (Bir dikdörtgenin) alanından uzun kenarını çıkardım, ve 40 kaldı, uzun kenar kısa kenarın 2 fazlasıdır; buradan, her kenar nedir?

Bunu bulmanın yöntemi, 2'yi 40'a eklersin, ve 42 olacak, ki bu akılda tutulacak; sonra, 2'den 1'i çıkarırsın, 1 kalır. Bunun yarısını al, ki o 1/2 dir, ve bunu kendi kendisiyle çarp; bulacağın 1/4'ü 42'ye katacaksın, ve sonuç 42 1/4 olacak, bunun kare kökünü alırsın, 6 1/2 dir, ve bundan 1/2 çıkarıldığında kalan 6, kısa kenardır, uzun kenar da bunun 2 fazlasıdır.

Aynı şeyi *el-cebr* ile bulma yöntemi basittir.

İlkin bu problemlerin "retorik" görünümünü ele alalım. İfadeler birinci şahıs ve geçmiş zaman kipinde, bir "bir kimse" ibaresi ile kurulmuştur. Aynı şahıs ve zaman Eski Babil metinlerinin ifade (beyan) kısmında kullanılmaktadır,[10] ve gerçekten birkaç süreç *šumma kîam išâl-ka umma šû-ma* "eğer bir kimse sana şöyle derse:" cümlesi ile başlamaktadır.[11] Süreç kısmının "bunu bulmanın yöntemi" vb. ifadelerle başlayan başlangıçı, Eski Babildeki *atta ina epēšika* "sen yaparsın, senin metoduna göre," ve benzeri açıklamalarla paralellik göstermektedir; ikinci şahısa, şimdiki zamana, ve ard arda gelen emir kipine doğru birbirini takip eden değişim de sabit bir Eski Babil modelinin bir tekerrürüdür,— Ve böylece, ifadeyi beyan eden konuşmacıya geri giden atıflar üçüncü şahıstadır.

[10] Fakat, bir taraftaki fazlalığın öbür tarafa geçirilmesi, Eski Babil'de olduğu şekilde Abû Bekr tarafından da şimdiki zamanda anlatılmaktadır.

[11] Mesela, bibliyografyada verdiğim Baqir'in makalesinde yayınlanan 11 problemin hepsinde bunu görmekteyiz. Diğer metinler daha kısa olan *summa* "eğer" kelimesini taşımaktadır, fakat, problemin süreç kısmındaki bu ifadeye yapılan sonraki atıflar, bu kelimenin bütün yapı için cümleden atılmış bir kelime olduğunu göstermektedir. Diğer metinler "eğer" kelimesini taşımasalar da, hepsi, yapmış olduğu her şeyi anlatan bir öğretmen ya da "bir kimse" olarak birinci şahıs geçmiş zaman kipindeki bu ifadeye sahiptir.

Daha spesifik olarak ele alındığında, az veya çok kelimesi kelimesine bir alıntı ile izlenen "çünkü onun sözüydü" şeklindeki atıflar, yine bir alıntı tarafından izlenen Eski Babil'de *aššum iqbû* ("çünkü o dedi") ya tekabül eder. Ve son olarak, problem 45 (ve başka problemler) deki "ki bu akılda tutulacak" ibaresi Eski Babil'de *rēš-ka likil* "aklınızda tutmanızı dilerim"e tekabbül etmektedir.

Bu özelliklerin hiç biri Selökid metinlerinde bulunmamaktadır. Münferit olarak alındığında, bunların her biri rastgele bir tesadüf olarak açıklanabilir. Mamafi, bu denli çok yapısal özelliğin de tesadüfen tekrarlanmış olması gerektiği, hiç makul bir düşünce değildir. Eski Babil döneminin sonları yani aşağı yukarı MÖ 1600'ler ile *Liber Mensurationum* arasındaki zaman fasılasından, benzer yapıda metinlerin olmadığı bilinmesine rağmen, bu büyük zaman fasılası boyunca sürekli bir geleneğin var olduğunu kabul etmeye zorlanmaktayız (ve hatta, söz ile intikalin bütün teferruatında kip ve gramer açısından şahıs farklarını tam olarak koruyamaması nedeniyle, yazılmış bir geleneğin varlığına inanma durumundayız). Ayrıca, anlaşıldığına göre, Selökid metinleri bu geleneğin ana gövdesine dahil değildir.[12]

Bu eserin retorik iskeletinin bir unsuru, yani problem 3 ve eserin bir çok diğer süreç-betimlemelerini sona erdiren "anla!" (gör) kelimesi Eski Babil'de karşılığa sahip değildir. Bu kelimenin Latince karşılığı "Anla"/"gör" anlamına gelen *intellige*'dir, fakat, bu metin gösteriyor ki, bu kelime anlamaya yöneliş göstermemektedir, — Gherardo, açıklama veya kanıtlama değil yalınızca talimatlar vermektedir. Mamafi, iki tane neden, bu orijinal terimin anlamayı görerek desteklemede işe karışan bir öge olduğunu önermektedir.

İlki, Gherardo tarafından tercüme edilen eşkenar çokgenlerin çizilmesinde bir Hint yöntemini tavsif eden başka bir metin bize şunu söylemektedir: "Onların elinde bunun ispatı yoktu, fakat *Intellige ergo* (öyleyse anla)[13] şeklinde kalıplaşmış bir ifade tarzı vardı." Bununla beraber, bu durum, "Anla" kelimesi ve bir çizim ile son bulan

[12] Selökid matematik öğretimi (ve buradan da Selökid matematiksel metinleri) muhtemelen, aynı dönemin ileri derecede ihtisaslaşmış metamatiksel astronomisinin bir yan ürünü olarak kabul edilebileceğinden (hiç değilse, tahminen, astronominin ana merkezi Uruk'dan gelen tabletler için), Selökid matematiğinin bu cebirsel geleneğin ana gövdesi üzerinde olmaması, bir yan dalı üzerinde olması gerçekten şaşırtıcı değildir.

[13] Bütün fragment bibliyografyada verdiğim Clagett'in eserinde s. 600'dedir. Clagett, *mevcud* ya da *vecede*'den türeyen başka bazı kelimeleri tercüme etmek için verdiği bir haşiye notuna dayanarak *inventio*'nun tercümesinin "bu kalıplaşmış cümle" olduğunu farzetmektedir (Clagett'in aynı eseri, s. 474 vd. n. 12).

bir metod için Hint yaklaşımına yalınızca bir atıf olabilir.[14] Böylece, hiç olmazsa bir yerde, Gherardo Arapça "gör" (anla) için bir (yanlış) tercüme olarak *intelligere*'yi kullanmıştır.

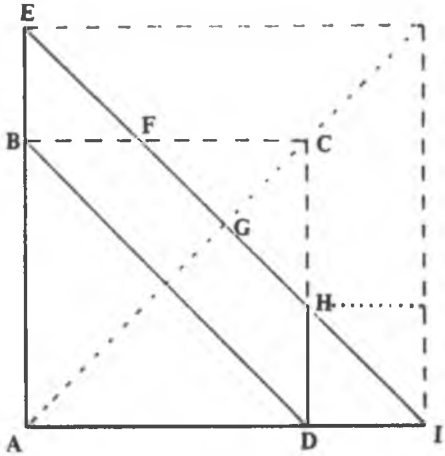
İkinci olarak, bu kelime (intelligere) daima temel sürecin betimlenmesinin peşi sıra yer almaktadır, anlaşıldığına göre Eski Babil'in yeltensel geometrisinden doğrudan intikal etmiş olan bir süreç (aşağıya bakınız), "*el-cebr*'e göre" süreçler ile birlikte kesinlikle mevcut değildir.[15] Ayrıca, problem 2'deki bir *intellige, Liber Mensurationum*'un burada ele alınan (ilk) yarısındaki bir kaç şekilden birine karşılık gelmektedir. Son olarak, orijinal esere ait diğer şekiller intikal sürecinde kaybolmuş görünmektedir.[16]

[14] Colebrooke (1817) tarafından tercüme edilen metinlerin ve şerhlerin birkaçında böyledir.

[15] Problem 50'nin en sonunda (ve buradaki *el-cebr* sürecinden sonra) bir "*intellige ergo et invenies*" şeklindeki cümleyi iki nedenle ihmal ettim. İlki, "O halde anla, ve bulacaksın" ifadesi italik yazılan Latince cümleden farklı kabul edilmelidir. İkincisi, söz konusu problemin tamamı şaka niteliğindedir, ve bu sebeple bu sözkonusu cümle, biraz alaylı bir anlam taşımaktadır. Önceki problem şunu sarih ve apaçık bir şekilde göstermektedir: (d) köşegeni ve (l) uzun kenarı arasındaki fark, uzun kenar ve (w) kısa kenarı arasındaki farka eşit olan bir dikdörtgen (d,l,w) = (5,4,3) dikdörtgeni ile orantılıdır. Bundan sonra, d = 10 köşegenli bir dikdörtgen ile ilgili olan problem 50 gelmektedir, ve buradaki bütün işlemler basit olmalıdır. Fakat bu basit süreç yerine, w, $w = \sqrt{(d^2 - (d/2)^2).\ (1 - 1/5) + [1/2\ (1 - 1/5).\ (d/2)]^2} - 1/2.4/5\ d/2$ olarak ifade edilen gerçekten göz kamaştırıcı bir süreçle bulunmaktadır (yalmızca kareköklü kısım l'yi temsil etmektedir), halbuki, l sonra 1/2 (d–w)'nın eklenmesiyle bulunmaktadır. Gerçekten, "muktedir olan bunu anlasın".

[16] Dikdörtgenlerle ilgili bölümün bitiminde, problem 52'den sonra, açıkça bir çizime atıf olan, "bu, <ilgili> şekildir" biçiminde bir cümle gelmektedir (Busard'ın edisyonunda şekil 12, s. 90). Eşkenar dörtgenlerle ilgili bölümün bitiş cümlesi de aynıdır (buradaki pasaj anlaşıldığına göre aslına kıyasla bozulmuş olmasına rağmen), ve şekil 3'e işaret etmektedir (s. 99). Fakat, s kenarlı ve d köşegenli bir karenin $s = (d - s) + \sqrt{2.\ (d - s)^2}$ koşulunu niçin sağladığını göstermek için bir şekle şiddetle ihtiyaç duyulan problem 17'de aynı cümle vardır, fakat çizim bulunmamaktadır.

Buradaki kayıp şekil Babil'in yeltensel geometrisinden bilinenlere tekabül etmiyor gibi görünmektedir; bunun yerine, bu kayıp şekil, karenin kenarı ve köşegeni arasındaki orana ilişkin Yunanlılarda tekrar tekrar karşılaşılan dizilere yol açabilen şekillerden bir tanesi ile ilişkili olabilir, şekil 5'e bakınız. Hatta, bu kayıp şekil, tıpatıp aynı dizilere bile yol açabilir. Söz konusu problemdeki şeklin bir Yunan menşei, *intellige* kelimesine atıf yapılmamasının nedeni olabilir; gerçekten, *Liber Mensurationum*'un "İskenderiye" etkisini taşıyan ikinci yarısındaki şekillere yapılan bütün atıflar "ve bu ilgili şekildir" cümlesini kullanmaktadır, "*intellige*, ve bu ilgili şekildir" cümlesinin karıştırıldığı (sokulduğu) daire ve daire dilimlerinin Heron tarzı ele alınışı bunun dışındadır.

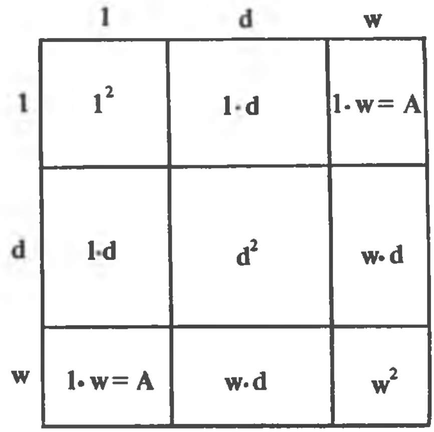


Şekil 5. *Liber Mensurationum*'da problem 16-17'de kullanılan karenin $s = (d-s) + \sqrt{2. (d-s)^2}$ özelliğinin mümkün bir geometrik ispatı. Daha büyük olan karenin kenarı daha küçük karenin (d) köşegenine eşit yapılmaktadır, ve böylece büyük karenin köşegeni küçük karenin (s) kenarının iki katı olacak. Şu halde, $EI = 2s = EH + HI = BD + HI = d + \sqrt{2.\ DI^2} = d + \sqrt{2\ (d-s)^2}$ ve işte bu istenen özdeşlikdir.

Bu şekil, kenar ve köşegen değerlerinin Yunan kaynaklarında bulunan orantıyı veren diğer özdeşliklerle ilişkilidir (Bakınız, Kroll 1899: II de Hultsch, s. 393-400, ve Bergh 1886). Gerçekten, aynı orantı ile, yani, eğer $S = d-s$, $D = 2s-d$ ise $S:D = S+D : 2S+D$ alışılmış orantısına denk olan $DI : HI = AD : BD$, $d-s : 2s-d = s:d$ orantısı ile yukarıdaki örnekte karşılaşılmaktadır.

Retorik ile matematiksel öz arasındaki sınırda, biz matematiksel vokabüleri bulmaktayız. Burada, kareden *quadratum equilaterum et orthogonium*, "eşkenarlı ve dik açılı dörtgen" olarak söz edilmesi ilginçdir, halbuki dikdörtgen *quadratum altera parte longius*, "bir kenarı daha uzun olan dörtgen" olarak düşünülmüştür. Açıkça anlaşıldığına göre, bunun Arapça orijinali, hâlâ dikdörtgenin genel, kuramsal-öncesi anlamında anlaşılmakta devam eden *kare* (yani *murabba'*) olarak onikinci yüzyılda normal olarak tercüme edilen bu söz konusu kelimenin bulunduğu bir bağlamda yazılıydı (Aşağıda bölüm VII'ye de bakınız). Bu kullanım kendi içinde Hârezmî'nin bu ayırımı yapmasına rağmen (Khwârizmîan numbering of cases), eserin (ilk yarısının) ana iskeleti için bilimsel-öncesi kökenlerin oldukça arkaik olduğunu göstermektedir.

Şimdi, biz, eğer gerçek matematiksel öze dönersek, üç tane soru ortaya çıkar: Problemlerin seçimi ve formüle edilmesi; normal olarak kullanılagelen ve anlaşıldığına göre herhangi bir isim verilmemiş olan metot ile *el-cebr* metotları arasındaki fark; ve bu normal metot (ya da metotların) karakteri. *El-cebr* metotları Hârezmî'den ve başka kaynaklardan biliniyor ve bunlar temel sorular doğurmamaktadır.



Şekil 6. Uzunluğu l, genişliği w, köşegeni d, ve alanı A ($d^2 = l^2+w^2$ olduğu kabul edildiği zaman) olan bir dikdörtgende $(l+w+d)^2-2A=2d.(l+w+d)$ eşitliğinin görülebildiği şekil. Bu özdeşlik *Liber Mensurationum* (problem 47) için temeldir, bu şekil, problem 36 için temel olan $(l+d)^2+(w+d)^2 = (l+w+d)^2 + (l-w)^2$ özdeşliğini göstermek için de kullanılabilir.

Problemlerin seçimine gelince, bir kaç problemin (bazen rakamların işe karıştığı problemler dahil) Eski Babil veya Selökid (çoğu yazar gibi, Busard da bu ikisini ayırt etmez) problemleri ile uyuştuğu Busard tarafından gösterilmişti. Sınırlı sayıda basit ikinci derece cebirsel denklemi ve meselâ basit Pitagor triyadları (triples) (dikdörtgen ve eşkenar dörtgenler üzerinde problemlerin kuruluşu için önemli) olduğundan, doğrudan ilişkiler için bu argümanı çok inandırıcı bulmuyorum — Burada istatistik bilgisi ışığında gelişigüzel örnek seçimi sonucunda elde edilmesi gereken rastlantı sayısından daha büyük bir sayıda benzerlik misalleriyle karşılaşılmakta olduğu iddiasını ileri sürmek kesin olarak imkân-sızdır. Mamafi, burada karşılaşılan tesadüfî sayılabilecek birkaç misale başka anlam verilmesi güç gibi görünmektedir; böylece, $(l+w+d)^2 - 2A=2d.(l+w+d)$ özdeşliği ile karşılaşan ve Pitagor teoremini bilen herkes için bu özdeşlik sarih olmaktan uzaktır, bu özdeşlik gerçekten, hem Selökid tableti BM 34568'de (No. 14, 17, ve 18 — MKT III, s. 16 vd. ve 21'e bakınız), ve hem de *Liber Mensurationum*'da (No 47) bir dörtgen üzerine olan benzer problemlerde kullanılmaktadır.[17]

Yalnız problemlerden hareket ederek şu düşünceyi ifade edebiliriz: *Liber Mensurationum*'un ilk yarısı cebirsel metotları kullanma özelliği ile sadece bir *mesâha* elkitabı değildir. Problemlerinin büyük çoğunluğu ile pratik ölçümde karşılaşılmaz — bunun yerine,

[17] Şekil 4'de gösterilen şekil parçalarının birbirine birleştirilmesi misalinden (tahminen YBC 6504 No 2 Eski Babil probleminde ve muhtemelen BM 34568 No 9 Selökid probleminde kullanılmıştı) söz konusu bilgiye kolayca yol açabileceği sarihtir — Şekil 6'ya bakınız.

bunlar bilinen ve bilinmeyen niceliklerin aralarında yer değişimi ile bu tür problemlerden elde edilebiliyordu; bunlar, bu anlamda, ölçü kıyafetine bürünmüş cebirsel problemlerdir.

Yine, şu da büyük bir kesinlikle ifade edilebilir ki, bu problemlerin hiç birisi Babil kaynaklarından türetilemez. $d/l = l/b$ oranında ve anlaşıldığına göre yan ve orta oranında bir bölüme referansla çözülen problem 51, Babil matematiğinin bu kavramsal çatısı içinde hemen hemen formüle edilememiştir. Öyle anlaşılıyor ki, bu problem Erken Yunan geometrisi (Pitagor'a özgü geometri farz ediliyor) ile ilişkilidir. Aynı durum problem 16-17 için de söz konusu edilebilir (not 16'ya bakınız).

Mamafi, eserin bütünü üzerinde düşünüldüğünde, *Liber Mensurationum*'un ilk yarısındaki problemler Eski Babil ve Selökid matematiğini çok hatırlatan bir karakterdedirler, ve Heron ve başka eskiçağ materyali ile müşterek noktaları azdır (ve Hint problem kolleksiyonları ile de benzer şekilde zayıf bir bağı vardır). Bu özellikler, eşkenar dörtgenin herhangi bir dönemde Babillilerin cebirsel ilgisini uyandırdığı bilinmemesine rağmen, eşkenar bir dörtgen ile usulen ilgilenen problemler (No. 53-64) için bile doğrudur.

Liber Mensurationum'un kendine özgü bir özelliği, bir karenin veya bir dikdörtgenin alanı ve dört kenarının toplamı ya da farkı ile ilgilenmesidir. Hiç değilse, altı problemde (No. 4, 5, 6, 9, 12, 43, ve 46) bu ifade edilmektedir. Daha erken matematiksel geleneklerde bunu sadece Eski Babil'den (BM 13901 No 23, yukarıya bakınız), ve Hârezmî'nin *Cebir*'indeki muhtemel etkisinden (eğer bu daha erken ise) biliyoruz.

Çözümlere gelince, en göze çarpan özellik, "onu bulmak için yöntem"in ilk açıklaması bir çok problemde, "*aliabra* (*el-cebr*) metodu" ile başlayan bir ikinci açıklama tarafından izlenmesidir. Anlaşıldığına göre, her iki süreç de, bu kelimenin daha modern anlamlarında cebirsel olarak aynı derecede doğru (ya da doğruluğu noksan) olarak kabul edilebilir, *aliabra* (ve buradan da *el-cebr*), daha sınırlı bir anlama sahip olmalıdır,[18] ki Abû Bekir'in bunun aksi olan durumu bir anahtar vazifesi görebilir.

[18] Bu sınırlamanın kabulü, Gherardo'nun *cebir* için alışılmış Latince tercümesi yerine, Arapça terimin (*el-cebr*) fonetik bir tercümesini kullanmasına yol açabilirdi (bu imlanın, yazmayı yazan kâtibin olmadığını telkin eden problem 8'deki bir yanlışlık hariç) (Boncompagni 1851: s. 439 vd.'na da bakınız).

Birkaç durumda (yukarda tercüme edilen problem 3 dahil) temel sayısal adımlar ve *el-cebr* metodu aynıdır. Bu yüzden, bu ikisi arasındaki fark kavramsallaşma yada metot anlayışı bakımından olmalıdır, hesaplama tarzı bakımından değil (çoğu durumlarda hesaplama tarzları da farklı olsa bile). Problem 2 (ve başka problemlerde) deki, "mâl (kare)" ile alanın özdeş olduğu şeklindeki îzâh bize açıkça, "kare" ve "kök"ün onlar tarafından geometrik nicelikler olarak anlaşılmadıklarını göstermektedir. *El-Cebr*, *Liber Mensurationum*'un bu tanıklığına göre, aritmetiksel olarak bağlanmış olan "kare", "kök", ve bilinen sayı nicelikleri ile ilişkilidir (Hârezmî tarafından da açıklanmış olduğu gibi — Bakınız, Rosen 1831:6). Problemleri aritmetiksel-retorik metodlarla formüle edilmekte ve temel durumlara indirgenmektedir (başlangıçda "şey"in bulunduğu yerde sonradan "kök", betimleme-sürecinde yerini almakta); ve temel durumlar kanıt lama, ispat ya da ara adımların kavramlaştırılmasını işe karıştırmayan otomatik hesaplama tarzları ile çözülmektedir. Gerçekten, eğer biz *Liber Mensurationum*'un yeltensel-geometrik kanıtlamalarını ihmal edersek, kesinlikle *el-cebr* Hârezmî'den bilinmektedir.

O halde temel metot biraz farklılaşmış olmalıdır. Betimlemelerin ifade ettiği gibi, öyle anlaşılıyor ki, herhangi bir anlama şekline sanki daha da az bir yöneliş sözkonusudur; *Intellige* kelimesinin manası ister "bak", ister "anla" olsun, hâlâ bu terim (anlamaya) yönelmeyi işe karıştırmaktadır. Yukarda, anlamanın görerek desteklenmesi lehinde olan bir delil ele alınmıştı.

38 ve 45 numaralı problemler incelenerek bu sorunun aç k-lanmasına bazı ilaveler yapılabilir. 38 numaralı problemin Eski Babil'in AO 8862 problem 1'e (yukarda, bölüm II de tercüme edilmiştir) çok yakın bir paralellik gösterdiğini, bu ikisi arasındaki farkın, toplama ve çıkarma işlemlerinin sıra değiştirmesi olduğunu görmekteyiz. "Kenarların sayısına" yapılan atıf, bu metnin, bir dikdörtgen ve onun dört kenarı ile ilgili olan problemlerden (No 43 ve 46) bir tanesi ile karıştırıldığını göstermektedir, ki bu birbirini takip eden sayısal hesaplardan da açıkça ortaya çıkan bir hatadır (bu problemin sonunu atlamamın nedeni budur). Fakat zaten bu sürecin başlangıcı, bu Eski Babil problemine benzer şekilde bir değişken değiştirilmesi amaçlanmış olduğunu, ve bu problemin $L.w=60$, $L-w=4$ ($L=l+2$) biçimine dönüştüğünü göstermektedir. Benzer bir dönüşüm, bütün sürecin bozulmadan durduğu problem 45'de yapılmaktadır.

Eski Babil metinlerinin, toplam ve farkın yarısını kullandığı kesinlikle ortaya çıkmaktadır.

Bu, (yani toplam ve farkın yarısını kullanma), *Liber Mensurationum*'un ilk yarısının genel bir özelliğidir. Bunun aksine, Selökid standart metotu toplam ve farkın tamamını kullanmaktadır (yukarıda bölüm III'e bakınız). Bu, problemlerin (ve "dört kenarı ile" verilen problemlerin) bu retorik yapısından gelen tesiri desteklemektedir, yani, *Liber Mensurationum*'un ilk yarısı, Selökid matemetikçilerini atlayarak, hem retorik ve pedagojik gelişme süreci, hem de matematiksel muhteva ve metot bakımından esasen Eski Babil geleneği ile doğrudan sıkıca münasebetlidir.

Quadratus teriminin şaşırtıcı kullanımı, *Liber Mensurationum*'un bu tercümesinin çok dikkatli ve kelimesi kelimesine yapıldığını göstermektedir.[19] Bu nedenle, Gherardo'nun metnini terminolojik analize tabi tutmak, Eski Babil'in kavramsal anlam inceliklerinin ne dereceye kadar bu metinde (*Liber Mensiurationum*'da) korunduğunu görmek bakımından yararlı olmalıdır.

Bu analiz, çarpma işlemleri için kullanılan "yükselme (çıkma)", "bağlama (kare yapma) (making span), ve "kere (defa)" arasındaki anlam inceliklerinin yüzyıllar boyunca kaybolmuş olduğunu ortaya çıkarmaktadır. Hatta toplamalar durumunda, çok disiplinli olan bu dilin belirli bir gevşeyişi görülmektedir (problem 3'te sayıya "eklenen" [Latince *addare*] kare, başka çoğu durumlarda "bağlanmış"tır [Latince *adjungare*]. *Liber Mensurationum*'da hâlâ, Eski Babil usullerine tamamen uyan ifade biçimleri bulunmaktadır. *Waṣâbum* için kullanılan *adjungare* ("ilâve etme") bunlardan bir tanesidir, *kamârum*'-un karşılığı olarak kullanılan *aggregare* ("kümeleme") bir diğeridir (bu Latince kelime toplamsal olmayan başka süreçler için de kul-

[19] *Elementler*'in 12. yüzyıl bütün tercümeleri gibi, Boethius geleneğinde, *quadratus* daima eşkenarlı ve dik açılı bir dörtgen olarak tanımlanmaktadır; Boethius geleneği için, bakınız, Folkerts 1970: s. 116, ve van Ryzin 1960: s. 81 (Adelard I), s. 148 (Adelard II), s. 199 (Adelard III), s. 274 ("Hermann"), s. 327 (Gherardo). Dikdörtgenin adı olarak *quadratum altera parte longius*'a en yakın yaklaşma, Boethius'-un (*quadrilaterus*) *altera parte longius* ifadesidir (Folkerts 1970: s. 116), halbuki Adelard I *quadratum longum* cümlesine sahiptir (van Ryzin 1960: s. 81). Gherardo'nun Abû Bekr'i tercüme ederken, normal Arapça-Latince tekabüller, ve normal vokabülerin koşullarında, mümkün olduğu kadar sadık kalarak Arapça metnini göstermeye çalışmış olduğundan şüphe duyulamaz.

lanılmış olmasına rağmen). "... üzerine ilâve et", şeklindeki ibare, bölüm II'de "... kadar aş" olarak serbestçe tercüme edilen bir ifadenin, *eli... watârum*'un tamamen benzeridir. Birkaç yerde, Eski Babil metinlerinde *šakânum* fiilinin bulunduğu yerde, bununla tamamen aynı anlama gelen *ponare* ("değer verme, bilinmeyen yerine bir sayı koyma") fiili bulunmaktadır. Bir sürecin geometrik bir yorumu somut bir ekleme gerektirdiği zaman (meselâ, şekil 6'daki iki dikdörtgen yüzey durumunda olduğu gibi), *duplare* terimi (anlaşıldığına göre *ḍa'ufa*'nın tercümesi) bulunmaktadır, halbuki Eski Babil metinleri *eṣēpum* terimine sahipti (problem 47 ve 48'de böyledir). Problem 57'de, bir dört kat yapma (*raba'a*?) sürecinin sonucunu bulmak için 4 ile çarpma yapmak zorunda olduğunuz anlatılmaktadır; bazı Eski Babil metinleri benzer şekilde iki kat yapmalar ihtiva etmektedir (AO 8862 No 1'de "kereler" ile izlenen "bağlama" durumu bulunmuşdu). Demek oluyor ki, dört kat yapma süreci aritmetiksel çarpma işleminden biraz farklı olarak anlaşılmalıdır — nitekim söz konusu problemde aşikar olarak önümüzde bulunan durumda somut geometrik ekleme (repetition) olanağı söz konusudur.

Belirli münasebetlerde belirli terimlerin istatistiksel, fakat her zaman mutlak olmayan hakimiyeti, bu eski yeltensel-geometrik süreçlerin biraz değişmiş bir şeklinin bu eserde hâlâ kullanıldığını, fakat terminolojik yapının bu yöntemin somut süreçlerini ifadeye tamamen uyarlanmış olan (ya da artık uyarlanmış durumda bulunmayan) bir dilde sözsel olarak açıklandığını telkin etmektedir. Gerçekten, diğer dillerde olduğu gibi Arapça'da da aslen somut işlemleri gösteren bu terimlerin, soyut aritmetiksel işlemler için kullanılan teknik terimlere tedrici olarak inkişaf ettiği sarihtir.

Abû Bekr'in problemlerinin bazılarının yayınlanan Eski Babil metinlerinde karşılığı yoktur, fakat Selökid tablesi BM 34568'de (Şekil 6 ile ilişkili olarak sözkonusu edilmiş olan problem 47 bu bakımından dikkate değer) karşılığı vardır. Fakat bu terminoloji az önce betimlenen bu özellikleri tamamiyle taşıyan bu problemlerde dahi kullanılmaktadır, ve bu Selökid tableti tam manasıyla aritmetikselleşmekten uzaktır. O halde, Eski Babil'e ait olan ya da olmayan bu problemler de Eski Babil'den Abû Bekr'e uzanan bu geleneğin ana gövdesi içinde inkişaf etmiştir, çok muhtemel olarak daha önce (yani, bu gelenek Abû Bekr'e ulaşmazdan önce) Selökid dalı bu gelenekten ayrılmıştır; her hâlûkârda bu problemler, Yunan ilhamı olan birkaç problemin ele geçirilmesi gibi görünen bir yoldan, dışardan ödünç alınmamışlardır.

Yukarıda açıklandığı gibi, *Liber Mensurationum* "gör" (anla) kelimesini bir çok Hint metni ile paylaşmaktadır. Aynı zamanda şu da aşikârdır ki, hem problemler hem de süreçler, kompleksleşmiş olan kısaltmalı Hint cebirinden farklıdır. "Gör" kelimesi *Liber Mensurationum*'un ilk yarısında çok fazla tekrarlandığı (tekerrür ettiği), fakat "İskenderiye" çeşnisi olan ikinci yarıda görülmemesi nedeniyle, bu kullanımın Hint'den bir ödünçleme olabileceği düşüncesi makul değildir. Bu düşüncenin yerine, bu kullanımın ana inkişaf akımı ile ilgili olması gerektiği düşüncesi makuldur.[20] Bu kullanımın Eski Babil metinlerinde hiç mevcut olmaması nedeniyle, bu kullanımın, olabilir ki geleneğin ana gövdesinde Eski Babil zamanlarından sonra vuku bulan bir değişmeyi (değişimi) gösterdiğini farzedebiliriz.[21, 22]

[20] Bu terimin Hint'de mevcudiyeti, ya tecrit edilmiş ödünçleme bir kullanımın neticesi olarak, ya da, Hint cebirinin gelişiminin başlangıçlarında (gelişmiş durumundan çok farklıydı) Babil geleneği tarafından etkilendiğinin bir belirtisi olarak yorumlanabilir. $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$ denkleminin çözümü için Brahmagupta'nın *Kuttaka* adlı eserinde (Colebrooke 1817: s. 347'den aktarılmıştır) buna benzer bir kural (bu gelişmiş şekle atıf olan bu ilk kuralın bir alternatifi olarak sunulmuştur) gerçekten Eski Babil'den bir ödünçleme'ye benzer görünmektedir; düşüncenin yaygın aritmetik yollarla birbirini etkilemesi sonucu aritmetikselleşmişdir, fakat gene de tanınabilir:

> Kare (katsayısı) ile çarpılan soyut sayıyı bilinmeyenin (katsayısının) yarısına ekle, toplamın kare kökünü al, bilinmeyenin (katsayısının) yarısını çıkar, bilinmeyen olan, karenin katsayısı ile böl.

Bu, bu tür denklemlerin çözümü için Eski Babil matematikçilerinin kullandığı standart metodun tamamen aynıdır, ve geometrik ele alış için, Ortaçağ cebircilerinin geçerli olan $x^2 + (\beta/\alpha)\ x = \gamma/\alpha$ şekline dönüştürme metodundan daha uygundur — Bakınız, Høyrup 1985: s. 14 vd.

[21] Muhtemelen, yeni materyalin takdim edilmesi hususu çizimler için destek sağlamaktadır. Eski Babil öğretiminde çizimler okul bahçesindeki kum içine ya da üzeri toz kaplı bir tahta (gubar) üzerine çizilmiş olabilir (Bakınız, Høyrup 1985: s. 29); bunlar her nasılsa şekilleri adım adım dönüşüme uygun olmayan fakat, metinleri yapıcı yönergeler olarak okunmaya elverişli kil tabletler üzerinde değildir. Eğer, bu geleneğin daha sonraki gelişmeleri papirüs ya da benzer başka materyale geçirilmiş olsaydı, ve eğer çizimler de metinlerle uygun düzenlenmiş olsaydı, metinlerin "gör!" ya da "işte ilgili şekil" gibi daha az yapıcı formüllendirme biçimlerinin okuyucuyu çizime göndermesi normal karşılanacak bir durum olurdu.

[22] Abû Bekr'in eseri ile bir eski matematiksel gelenek arasındaki başka bir şaşırtıcı ilişki, alanı 48 olan, ayrıca, $l/w = 1\ 1/3$ ya da $w/l = 3/4$ orantısı olan bir

Her şeyi göz önünde bulundurarak (hesaba katarak) biz, şu sonuca ulaşabiliriz : *Liber Mensurationum*'un burada ele alınan ilk yarısı, Eski Babil matematiğine geri giden; Eski Babil metinlerinin "retorik" yapısının ana özelliklerini devam ettiren; ve Arapça aslı formüle edildiği zaman Babillilerin yeltensel geometrisine benzer metodları hâlâ kullanan (fakat muhtemelen, Gherardo'nun tercümesini yaptığı zaman artık kullanmayan) bir gelenek sunmaktadır. Aynı zamanda, bu eser bize, Hârezmî'nin *el-cebr*'i ile isim ve muhteva bakımından aynı olan başka, farklı, geometrik olmayan bir gelenek sunmaktadır.

V. Arttırma ve Eksiltme

Bir defa *Liber Mensurationum* bilindikten sonra, Abraham bar Ḥiyya'nın (Savasorda'nın) *Collection on Mensuration and Partition* (*Ḥibbur ha-m^e sîhah w^{e}ha - tišboret*, Latincesi *Liber Embadorum*, Curtze'-un 1902 edisyonuna bakınız) adlı kitabının kare ve dikdörtgenlerle ilgili kısmı için aynı geleneğe borçlu olduğu açıklık kazanmaktadır (her iki eserin de diğer bölümleri için İskenderiye gelenelenleneğine dayanması gibi). Abraham, Abû Bekr gibi aynı süreçleri kullandığından ve bunların doğruluğunu, "ve ilgili şekil de budur" gibi cümlelerle ve bir çizimle izlenen geometrik bir açıklama ile ispatladığından, Abraham'ın eseri *intellige* kelimesi için yukarda verilen yorumu desteklemek için bize biraz dayanak vermektedir. Fakat Abraham, alanları ilkel bir şekilde elle işleyerek kullanma

dikdörtgenin kenarlarını soran problem 33-34 tarafından ileri sürülmektedir (ve eşkenar bir dörtgen için benzer problemler meydana koyan problem 62-63 tarafından da). Alanın değeri bir tarafa bırakılırsa, problem 34 Moskova papirüsünün 6 numaralı problemine tamamen uymaktadır (Bakınız, Struve 1930: s. 125), ve bu papirüsün bazı başka problemleri ile bağlantı kurulmuştur (No 7 ve 17, aynı eserin 128. vd. ve 133. vd. sayfaları). Bundan başka, süreç, esasen iki metinde de aynıdır. Öte yandan, eğer problemin kendisi yalın değilse, söz konusu süreç ile, normal şekillerine indirgenmemiş katışık ikinci derece denklemlerin çözümüne hizmet eden Eski Babil metinlerinden de aşinalık vardır. Ayrıca, Moskova Papirüsü problemlerinin kendileri Babil ödünçlemeleri olabilir — Mısır matematiğinin normal sürecinin tersine, Moskova Papirüsünün 6 ve 17 numaralı problemleri bölmelerini ters sayı ile bir çarpma aracılığı ile Babil yolundan yapmaktadır (Fakat, bağımsız icat olması pekâla mümkündür; ve böyle bir icat süreci elverişli bir kare ile dikdörtgenin sezgi ile ulaşılabilecek basitlikte bir kıyaslamadan müteşekkil olmaktadır).

Daha titiz bir incelemede, Abû Bekr'in 33-34 üncü problemlerinin Eski Babil nevinden birkaç formüllendirmeyi ihtiva ettiği ortaya çıkmaktadır. Bu yüzden, Mısır etkisi izini teredütsüz bir yanıltıcı ipucu olarak kabul etmek eğilimindeyim.

yerine, ispatları hususunda doğrudan doğruya *Elementler*'e yaklaşmaktadır. (II. 5'in muhtevası Curtze 1902 s. 40, satır 7 ve devamında cüzi bilgi olarak alıntılanmıştır, II. 6'in muhtevesı s. 36, satır 10 ve devamında, II. 7,nin muhtevası s. 42, ve devamında, 18 ve devamında). Bu yüzden, onun yaptığı ispat, erken İslâm, bilimsel-öncesi matematiksel gelenekleri ile ılişkili sorunlara dayanan yalnızca kuramsal bir iddia olabilir.

Aynı şey kare ve dikdörtgenlerle ilgili bölümlerde aynı problemlerin çoğunu ihtiva eden, Leonardo Fibonacci'nin *Practica Geometriae* adlı kitabı için de söz konusu edilebilir (Boncompagni 1862 : 56-77). Leonardo, eski problemleri hem Euclid prensipleri ile ve hem de *el-cebr*'in vokabüleri ile karıştırarak birleştirmesi bakımından Abraham'dan bir adım daha ileri gider.

Bu gelenek soyunun sürüden ayrılmış bu iki mensubu hakkında en önemli gerçek, onların hem birbirlerinden bağımsız hem de Abû Bekr'den bağımsız gözükmeleridir. Eğer böyle ise, *Liber Mensurationum*, Abraham ve Leonardo zamanlarında yaygın olan bir geleneğin bir temsilcisi olarak göz önünde bulundurulmalıdır, yoksa ölmekte olan bir çevrenin en son temsilcisi olarak değil (Bu konu için, bundan sonra Abû Kâmil üzerine olan bölüme de bakınız).

Muhtemelen, *Liber Mensurationum*, benzer eserlerde bulunan üstü kapalı bir ibare ihtiva etmektedir. Gerçekten, yukarda, "*el-cebr* ile metot" un aksine, bu eserin temel metodunun isimlendirilmemiş olduğunu iddia ederken yanılmış olabilirim. No 9'da temel sürecin sonunda, bu "*augmentum et diminucionem* (artırma ve eksiltme) ile"dir, denmektedir. Muhtemelen, bu kelimeler, $s \pm 2 = \sqrt{2^2\text{-}3}$ şeklinde çözümlenen problemlerin çift köküne atıf yapmaktadır (Eski Babil AO 8862 No. 1 de olduğu gibi alınmıştır. Bölüm II ile karşılaştırınız). Fakat, bu ifadenin hemen arkasından, *el-cebr* ile *artırma ve eksiltme* arasında bir karşıtlık telkin eden şu cümle gelmektedir: "Mamafi, *el-cebr*'e göre onun metotu şöyledir ...". Eğer böyle bir karşıtlık tasarlanmıyorsa, "mamafi" (*vero*), metinin başka hiç bir yerinde bulunmayan beceriksiz bir ifade çeşitidir. Bu nedenle, temel yeltensel-geometrik metodun "artırma ve eksiltme" adını taşıması makul bir tahmin (fakat daha fazlası değil) gibi görünmektedir.

Bu, kötü bir ad değildir. Bu ad, Eski Babil'in alanlar dönüşümünü belirlemek için sık sık kullandığım sevdiğim bir ad olan "kes ve üstüne yapıştır" (veya daha iyisi "üstüne yapıştır ve kes")'e benzerdir. Fakat, böyle olunca buna tekabül eden Arapça ad ne olacaktır?

Açıkça anlaşılıyor ki, Abû Bekr'in ifadesi, çift yanlış yoluyla çözümü açıklayan bir eser olan *Liber Augmenti et Diminutionis*'in adıyla karıştırılmamaktadır (Libri 1838: I, s. 304-371). Fakat, Woepcke'nin bununla *Kitâb fi'l-cem' ve'l-tefrîk* adlı kayıp kitabın aynı olduğuna dair eski faraziyesi (1863: 514), Ruska tarafından (1917: s. 15) inandırıcı bir şekilde reddedildiğinden, tekrar tekrar ortaya çıkan bu başlığın Abû Bekr geleneğindeki kitapları kapladığı farz olunabilir. Nihayet, *cem'a*'nın orijinal anlamı; somut toplama, bütün haline getirme, tamamlama (İbranîce 'm', "festigen", "(Kind, großziehen", (Haus) restaurieren"??) olarak gözükmektedir, halbuki *faraka*'nın anlamı "ayırmak"dır (Akadca *parâqum*, a "btrennen", ve İbranîce prq, "ablösen", "wegnehmen" ile ilişkilidir).

Sezgin, *el-cem' ve'l-tafrîk* ile ilgili bir kaç eser listelemektedir.[23] Ne yazık ki bütün bu söz konusu eserler yalnızca İbn Nedîm'in *Fihrist*'inden bilinmektedirler; bu nedenle bu konunun *el-cebr*, Hint hesabı (*hisâb*) ile ilgilenen kimseler tarafından da işlenmiş olduğu, ve bunun 4. (H.)/10. yüzyıl başlangıcında bağımsız eserler için bir konu olarak kaybolduğu görülebilmektedir.

Ruska'nın, Woepcke'nin konuyu tehşisine karşı çıkmak için kullandığı tezi, şimdi onun kendi, "Hint hesabı" ile ilgili teşhisine karşı kullanılabilmektedir; gerçekten, Abû Hanîfa'nın bu iki konu üzerinde ayrı ayrı eserler yazmış olduğu İbn Nedîm tarafından söylenmektedir.

Liber Mensurationum'un ilkel terminolojisi, onu oldukça erken bir döneme, sanıyorum Abû Kâmil, El-Şaidanânî ve Sinân ibn el-Feth'in epey önce olduğu, 3 (H.)/9. yüzyılın en sonuna yerleştirecektir. Böylece, *Fihrist*'in, Abû Bekr'in metodu ile *el-cem' ve'l tefrîk* in kuramsal olarak aynılığına hiç değilse karşıt olmadığı iddia edilebilir; fakat, bu hipotez için dayanak oldukça belirsiz ve işlenme-

[23] Bakınız, GAS V, s. 227, 1. satır (Ahmad ibn Muhammad al-Hâsib, "hesapçı"); s. 243, 10. satır (*Fihrist*'in Flügel neşrinde Sened İbn 'Alî başlığı altına yanlış konmuştur, muhtemelen Hârezmî'ye aittir, not 3 ile karşılaştırın); s. 263, 1. satır (Abû Hanîfa al-Dînawarî); s. 281[6] (Abû Kâmil); s. 301, 12. satır (Hârezmî'nin eseri üzerine Al-Şaidanânî tarafından yazılmış bir şerh); ve s. 301 $_{11,9}$ (Sinân ibn al-Fath tarafından yazılmış bağımsız bir eser ve başka bir eser üzerine bir şerh).

miştir. Kabul veya reddetmek için, metinlerde veya kütüphanelerde tesadüfi bulguların bulunmasını beklemek gerekmektedir.[24]

VI. Bu Geleneğe Tanıklık Eden Diğer Kaynaklar: S̱âbit ibn Ḳurra ve Abû Kâmil:

İnce veya hiç mevcut olmayan buz üzerindeki bu yürüyüşten sonra, tekrar daha sağlam zemine döneceğiz, ilkin S̱âbit ibn Ḳurra'nın "*el-cebr*'in durumlarının tashihi üzerine" (*fî tasḥîḥ mesâ'il el-cebr*; Luckey 1941 de) adlı eserine bakalım.

"*el-cebr*'in durumları", Hârezmî'nin 4., 5., ve 6. durumuna tekabül eden fakat 1 den 3'e kadar numaralandırılan üç "elemanı" (*uṣûl*) ile konu edilmektedir. Geometrik ispatlar da Hârezmî'nin kanıtlamalarından (gerçek veya sahte) habersizce yapılmaktadırlar. Ayrıca, konu *el-cebr ve'l-muḳâbele* olarak değil, belirtildiği gibi (*el-cebr* olarak) adlandırılmıştır. Nihayet, anlaşıldığına göre, bu konu bir kitabın konusu değil, fakat bir grup pratisyenin, yani "*el-cebr* ile meşgul olanlar" (*ehl el-cebr* ya da "el-cebr'in izleyicileri" *eshâb el-cebr*)'ın konusudur. Hârezmî ve S̱âbit ibn Ḳurra'yı ayıran kısa zaman bağını düşünürsek, (cebiri sıfırdan başlatıp geliştirmesi için değil, daha ziyade cebirin kurucu babasının anısını bastırması için böyle bir topluluğa zaman bırakmadan) bu *el-cebr* topluluğunun, Hârezmî tarafından etkilenmeyen, bunun yerine etkisi ile Hârezmî'ye destek sağlayan bir grup olması gerektiği açıktır.

Bu metni ayrıca bir inceleme, S̱âbit ibn Ḳurra tarafından bilindiği şekliyle *el-cebr*'in, Abû Bekr tarafından aynı ad altında bilinen disiplin ile tam manasıyla aynı olduğunu açıkça gösterir. O halde, *Liber Mensurationum*'da temel durumların Hârezmî'deki gibi numaralandırılması, Abû Bekr'in Hârezmî'den etkilenmesinin kanıtı olarak alınamaz.

Abû Kâmil'in *Cebir*'inde, *el-cebr* ile uğraşan insanların özel bir grup olduğu fikri kaybolmuş gibi görünmektedir. Bunun yerine, bu konu şimdi Ḥârezmî'nin *Kitâb fî el-cebr ve'l-Muḳâbele* adlı eserinin disiplini olarak anlaşılmaktadır (Levey 1966: s. 28 deki metne ve not 1-2 ye bakınız). Mamafi, ayrı ayrı geleneklerin çeşitliliğinden söz eden pasajlar vardır. Problem 7 ve 8'de (Levey'nin numaralan-

[24] Bu sempozyum tebliğinde Ahmad Selim Saidan, *el-cem' ve'l-tefrîk'in*, parmak hesabı üzerine dayanan gelişmiş aritmetiği gösterdiği alternatifini önerdi.

dırması) bunu görmekteyiz. Problem 7'de (Levey 1966: s. 92-95), 10 sayısı, biri *şey* olarak alınan, ve diğeri de 10 eksi *şey* olan iki kısma bölünmektedir, bu, hem Hârezmî'den hem de Abû Bekr'in *el-cebr* metotlarından iyi bilinmektedir. Bir başka şık, iki sayı arasındaki farkın yarısı şey olarak alınmaktadır, ve bu yol "sayının sahipleri"ne atfedilmektedir. (İbranîce metinde b'ly h-mspr). Bu şık, Eski Babil metodunun adımlarının bir *el-cebr* yorumu olarak görünmektedir[25] ("şey" ve ona tekabül eden, tartışmanın aritmetiksel-retorik açılması nedeniyle). Buradan Abû Kâmil'in, kendi kavramsal çatısında, Abû Bekr'in temel metodunun yorumu olarak alınması makul olurdu.

Yine 10 sayısının ikiye bölündüğü Problem 8'de (Levey 1966: s. 94-103), metot, "hesaplama yapmayı öğrenmeye çalışanlar"a (ynhgw h-ḥšbnys) özel bir gruba atfedilen *el-cebr* metodudur (bir sayı "şey" olarak alınmıştır). İbranîce ḥšb ve Arapça *ḥisâb*'ın yakınlığı, Abû Kâmil'in *ḥesâb* ile, pratik ticari aritmetik ile, sayma ile, v.s., meşgul olan insanlardan söz ettiğini açıkça gösterir. Astronomlar veya diğer bilimsel pratisyenler burada söz konusu edilemezler.

Geleneksel bilimsel-öncesi matematiksel pratisyen gruplarına yapılan bu iki atıf, kaynağını göstermeksizin başka yerlerdeki bu tür çevrelerin metotlarına Abû Kâmil'in yaklaştığı görülebilmesine rağmen, Abû Kâmil'in eserinde yalnızca bu ikisi ile karşılaşılmaktadır. (Bakınız, Anbouba 1978, s. 76, 82). Bu konu Hârezmî'ye atfedilmektedir, ve onun *el-cebr ve'l-muḳâbele* adıyla sunduğu konuya ad olarak bu başlığın tamamı verilmiştir. Aynı zamanda, bu terimin anlamı, *Liber Mensurationum*'un *el-cebr*'inden bizim bugün anladığımız anlamdeki *cebir*'e genişletilmiştir. Abû Kâmil yazdığı zaman (4H./10. yüzyılın başı?), Abû Kâmil'in bakış açısından bakıldığında, yüksek seviyeli bilimden alçak seviyeli fakat yine de mantıklı ve doğru uygulamaları olan bilime doğru sıralanan birlikli bir alan olarak anlaşılan *matematik* ile bütünleşme ve onu özümleme sürecinin sonunda hiç değilse birbirinden ayrı bilimsel-öncesi gelenekler vardı.[26] İslâm Dünyasının matematiksel pratisyenleri cebirci olarak düşünül-

[25] Bu Diophantos'un da metodudur. Fakat, bu yazar Abû Kâmil tarafından bilinmediği için, Abû Kâmil'in bulunduğu ortamdaki başka matematikçilerden büyük bir grubun Diophantos'dan etki almış olduğunu beklememeliyiz.

[26] İslâm matematiğinin bu genel birleştirimi ve onun kültürel zemini bibliyografyada 1984'de verilen eserimin ana konusudur. Hakikatte, bu süreç 4. (H.)/10. yüzyılda devam etmekteydi fakat neredeyse tamamlanmak üzereydi.

düğünde bile, "Kitaba bağlı insanlar" haline geliyorlardı, — Ve böylece, Abû Kâmil'den daha sonra gelen tanıkların, Hârezmî ve *yine bu konuda Kitap yazmış* olan İbn Türk'de karşılaşılana benzer bir durumla artık karşılaşmaları beklenemez. [27]

VII. Hârezmî ve İbn Türk

Cebirin bu kurucu babalarına tekrar geri gönelim, — ilk olarak mufassal eseri, analiz için İbn Türk'ün kısa bir fragmenti mevcut olan eserinden daha elverişli olan Hârezmî'yi ele alalım.

[27] Eğer *el-cebr*'in sınırlarını aşmak istiyorsak, kitabın ithafına bakılırsa MS. 990'dan sonra yazılmış olan Abû' l-Vefâ'nın *Zanaatçı'nın Geometrik Çizim Konusunda İhtiyaç Duyduğu Şey Üzerine Kitap*'ından (*Kitâb fî mâ yahtac el-şâni' min el-a'mâl el-hendesiyye*) bazı ilgınç bilgiler elde edilebilir. 10. bölümde, 13. önermede, yazar, kendisinin, öyle anlaşılıyor ki az çok uygun meslekler olarak kabul edilen "zanaatkârlar" (*şunnâ'*) ve "geometriciler" arasındaki bazı tartışmalara katıldığını söylemektedir. Üç tane geometrik karenin toplamı (toplam da bir kare oluyor) problemi ile karşılaşılmaktadır, zanaatkârlar birkaç çözüm teklif ettiler, "bu çözümlerin bazısı için ispat verilmişti", —ki bu ispatlar kes-ve-yapıştır (böl ve ekle) karakterini ortaya koymaktadır. Geometriciler de bir çözüm (Yunan tarzında) teklif ettiler, fakat bu çözüm, ilk durumdaki (orijinal) karelerin bölünebildiği parçaların yeni bir düzen içinde ve somut bir şekilde birbirleriyle birleştirilmesini iddia eden zanaarkârlar tarafından kabul edilemezdi. Böylece, Abû'l-Vefâ bu *el-cebr* metinlerinden birkaç dolaylı sonucu doğrudan doğruya tespit etmektedir : Bu pratisyenler çevresi kendi matematiksel geleneğini devam ettirmekteydi; bu gelenek hiç değilse kısmen geometrik ispatlarla desteklenmekteydi; fakat bu tarz ve bu esas prensip hem ispatları hem de birkaç süreç bakımından açıkça Yunan geometrisininkilerden farklıdır, ve Eski Babil metinlerinde tavsif edilenlerle ilişkilidir. (Bakınız; S.A. Krasnova'nın bu kitabı tercümesinde sayfa 115 ve devamı, A.T. Grigor'jan ve A.P. Juškevič (eds), *Fiziko-matematičeskie nauki v stranax Vostoka* I (IV), s. 42-140 (Moskova 1966), İstanbul yazmasının (Ayasofya, 2753) varak 53 ve devamının tercümesi. Ayrıca Woepcke'de sayfa 348 ve devamına da bakınız, "Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ", *Journal Asiatique*, 5e série, *5* (1855), s. 218-256, 309-359, Farsça Paris yazmasını (BN, pers. anc., 169) aynı ile alıntılaması ve ifade tarzı değiştirilmiş alıntı).

Şu da gözlemlenebilir ki, Abû'l-Vefâ'nın problemlerinin çoğu Eski Babil'e özgü olan "eğer o derse" ibaresi ile başlamaktadır (halbuki bu eserin derleme olma özelliği, talimatlarda "biz" şeklindeki Yunan tarzı sonraki kullanımı ile açığa vurulmaktadır). Şuna da dikkat edilmelidir ki, bu talimatlar "işte ilgili şekil" şeklinde her zaman aynı olan bir cümle ile sona ermektedir.

1969'da Kubesov ve Rosenfeld, Abû'l-Vefâ'nın metninin büyük kısmının doğrudan doğruya, Fârâbî'nin *Geometrik Şekillerin İncelikleri Hakkında Tinsel Hünerler ve Doğal Sırlar Üzerine* adlı kitabından alınmış olduğuna işaret etmektedirler (*Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 22*, s. 50). MS. 933'den önce bitirilmiş olan bu eserin ihtiva ettiği süreçleri ve formüllendirmeleri ayrıntılı bir incelemeye tabi tutmak kesinlikle ilginç sonuçlar verirdi.

Hârezmî'nin hareket noktası *Liber Mensurationum*'un temel metodu değil, *el-cebr*'dir. Bu, onun "durumlar"ı kullanımından, *mâl* ("kare") ve *cezr* ("kök") terimlerini kullanmasından, ve savını *şey* etrafında daha sonraki aritmetiksel-retorik düzenlemesinden zaten anlaşılmaktadır. Yunan ile karışık yeltensel geometrik kanıtlamalar, kendi formüle edilişleri ve ortaya çıkışları bakımından, bu kitabın ana çizgisi üzerine aşılanmışlardır (ve ilkel geometrik bir geleneğin varlığının tasdik edilmiş olduğu şu anda biz, bunların oradan alınmış olduklarını tam bir kesinlikle farzedebiliriz). Geometrik kanıtlamaların ikinci derecede önemli özelliği (100+kare+20 kök) ve (50+10 kök+2 kare) toplamı tartışıldığı (Rosen 1831:33 vd) zaman daha da net olmalarıdır. Burada yazar, "bu durum için de bir şekil çizme yolunu başardığını, fakat bunun yeteri kadar açık olmadığını" halbuki "kelimelerle açıklamanın çok kolay" olduğunu ve retorik olarak verdiğini itiraf etmektedir.

İbn Türk'ün eserinin fragmetinde de, *el-cebr* modeline uygun olarak, düşüncenin aynı temel yönelişi görülmektedir. Burada da aynı standart durumları bulmaktayız, ve bu durumların, birbirini izleyen geometrik kanıtlamaların temel taşları olan "alan" ve "ke nar" ile değil, yine *mâl* ve *cezr* terimleri ile tayin edildiğini görmekteyiz.

Mâmafi, İbn Türk'de biz, *Liber Mensurationum*'da düşünüldüğü şekliyle bu yeltensel-geometrik gelenek ile Hârezmî'nin durumundan daha yakın bir paralellik bulmaktayız. İbn Türk'e göre bir kare sadece bir *murabba*ʿ değildir, fakat "eşkenarlı ve eş açılı murabbaʿ" dır. Çoğu yerde sadece *murabba*ʿ yazan Hârezmî'de aynı kullanım yalınızca arasıra bulunmaktadır (Bakınız, Sayılı 1962:84).[28]

[28] Bu gözlem öncelik meselesini etkilemekte ve bu meseleye dayanmaktadır. İbn Türk yeltensel-geometrik gelenekdeki bir merkezil terimin orijinal kullanımına Hârezmî'den o denli yakındır ki, İbn Türk'ün fikirlerini Hârezmî'den almış olabilmesi çok uzak bir ihtimaldir. Öte yandan, iki tane yaşayan geleneğin varlığı bağımsız bir tertib oluşturduğundan, muhtemelen Hârezmî'nin İbn Türk'ü kopya ettiği sonucuna varamayız. Hârezmî'nin yazılarının (eserlerinin) daha sonra olduğundan da emin olamayız. Çok muhtemel olarak, *murabba*ʿ 'ın manası, Yunan etkisinin başka etkilerden daha güçlü olduğu bir yer olan ve Hârezmî'nin kitabım yazdığı çevre olan Memun zamanı saray matematikçileri çevresinde değişiyordu. Bütün bunlardan sonra, Yunanca τετράγωνον "kare"nin en iyi kelimesi kelimesine tercümesi *murabba*ʿ'dan başka bir şey değildir.

Liber Mensurationum ile bir başka benzerlik ikisi (yani İbn Türk ve Hârezmî) arasında daha eşit bir şekilde paylaşılmaktadır. Her iki yazar da geometrik açıklamalarını "ilgili şekil de budur" (Hârezmî) veya "ilgili şeklin görünüşü de şöyledir" (İbn Türk) cümleleri ile bitirirler, — Aynı ibâreler Abraham bar Hiyya'nın *Collection*'unda da aynen bulunmuştu.

Böylece, biz, her iki yazarın da eserlerini, başka bilimsel-öncesi gelenekten ödünç aldıkları materyal ile "*cebr i*le uğraşan insanlar"ın metodları üzerine eklemiş oldukları sonucuna varmaktayız. Onlar, her iki bilimsel-öncesi geleneğe de yabancı olan bir matematik fikrinden, (elde bulunan dolaylı kanıttan karar verilebildiği kadarıyla), yani, matematiğin ispatlarla tatmin edilmesi gerektiği fikrinden hareket ederek böyle yaptılar.[29] Yalınızca geometrik varlıkları belirlemek için harflerin kullanımı değil, ve geometrik bir şeklin çizimini açıklama yolu da değil, aynı zamanda bu (ve özellikle bu?) düşünce de Yunanlılar tarafından başlatılmış olan bilimsel matematiksel gelenek içindeydi. Her iki yazarın temel değişikler getiren büyük başarısı, birbirlerini karşılıklı yararlandırmaları maksadıyla, matematiksel faaliyetdeki bu iki düzeyi bir arada getirmiş olmalarıydı.

EK I: El-Cebr:

Ortaçağlardan beri *el-cebr* ve *el-mukâbele* terimlerinin anlamı üzerinde çok yazılıp çizilmiştir. Babil matematiğinin yeniden yorumu ve *Liber Mensurationum*'un erken İslâm matematiği için bir kaynak olarak kabul edilmesi bu meseleyi yeniden gündeme getirmekte ve bize bu terimlerin menşeleri için yeni bir delil temin etmekte, ve böylece, belki de cebirin tarihine ilişkin bilgi ile de bizi donatmaktadır (fakat, hiç şüphesiz olgunlaşmış İslâm matematiğinde[30] bu terimlerin

---

Bu bağlamda, bir dikdörtgen için Adelard I terimi (yukarda not 15'e bakınız) ilginç olabilir. Bu, *murabba'* 'ın anlamının değişme sürecinin tamamlanmadığı bir zamanın mevcudiyetinin tanıklığını yapıyor gibi görünmektedir (fakat, *quadratus* teriminin tanımı, bu sürecin devam ettiğini telkin etmektedir). Şimdi, anlaşıldığına göre, Adelard I'in tercümesi Memun'un sarayında yapılan Haccâc'ın ikinci tercümesinin bir versiyonuna dayanmaktadır (Bakınız, Busard 1983 s, 18, ve Murdoch 1971; s. 445).

[29] Bu, tamamiyle kanıta sarih ve müstakil ilginin noksanlığı (pratik ve yalınızca zımnî anlama'dan farklı olarak), beni bilimsel - öncesi gelenekden söz etmeye zorlayan nedendir.

[30] Bu soru için, yalınızca, çeşitli İslâm yazarlarında bu terimlerin karışık kullanımlarını ve birbirine zıt tanımlarını ele alan Saliba'nın eserine (bibliyografyada 1972'de gösterilen) atıf yapacağım.

yorumu için delil ile donatmaz, ki bu, "artık geçerli olmayan anlamların bilimi" olarak etimolojinin tanımı ile uygundur).

Babil'in ikinci derece denklemleri ele alan cebirinin keşfinden bir kaç yıl önce Gandz (1926), mukâbele'nin "mukabil", "denk" anlamına gelen Akadca *gabrûm* teriminden türeyen bir Ârâmî kelimenin Arapça'da tekrarı olan, ikincil bir terim olarak görülmesi gerektiğini önermiştir. Gandz'ın görüşüne göre, cebirin Asurca menşeinde, bu terim eşit olma durumunu, ve buradan da "denklem"i göstermek için kullanılabilmişti.

Gabrûm, menşe olarak Sümerce gabari'den ödünç alınmış bir kelimedir; Sümercedeki ideogram *mahârum* fiili ve ondan türemiş kelimeleri resim yazısı yoluyla ifade etmek için kullanılabilir. Gerçekten, *mahârum* Eski Babil'in ikinci derece denklemlerini ele alan cebirinde önemli bir unsurdur — yukarda, II. bölüme bakınız. Ama, Bu terimin fonksiyonu Gandz tarafından farz edildiği gibi değildir, bunun yerine, eşit kenarlarından bir kare oluşturulmasıyla ilgilidir. Erken İslâm *el-cebr'i* gerçekte ikinci derece aritmetiksel-retorik cebir olduğundan, bu terimin çağlar boyunca bu sanata (bilim dalına) eşlik ettiği, makul bir düşünce değildir. Kavram anlayışının aritmetikselleştiği bir zamanda sahanın pratisyenleri bu terimi yeniden yorumlamış olabilirler[31] — Başka dilden aktarılan bu kelime Ârâmî dili ve İbranîce de dahil olmak üzere diğer Semitik dillere geçtiğinden bu kolay olabilir (İbrânî'ce gbr İngilizcede *peer* (akran veya denk, soy ya da kıdemli kişi) gibi çift anlama sahiptir). Böyle olunca, sonradan *mukâbele*, bir açıklama olarak bu ada eklenmiş olabilir (ki İslâm Dünyasına intikali safhasında buna ihtiyaç yok; aynı kökle yakından ilişkili anlamlar Akadca ve Ârâmî dilinden Habeş diline kadar diğer Semitik dillerde bulunmaktadır).

Bu noktada *Liber Mensurationum* işe karışır. Gerçekte "*el-cebr'*e göre" açıklamalarının bir kaçı *el-cebr* ve *el-mukâbele* işlemlerinin tam tanımlarını ihtiva eder ki, bu işlemlerin adı Latinceye *restauratio* ve *oppositio* olarak tercüme edilmişlerdir. Meselâ, "kare eksi şey" (*census excepta re*) 90'a eşit olan 5 numaralı problemi ele alalım. Böyle olunca, "cebr ve mukabele işlemlerini yaparsınız, yani kareden çıkartılan şey'i eşitliğin öbür tarafına alırsınız, ve bunu 90'a eklersiniz,

[31] O taktirde "Restoration" (aşağıya bakınız) ikinci bir kez yeniden yorumlanacakdır.

şey ve 90 dirheme eşit olan bir kare elde edersiniz". Problem 7'de "1 in 2/5 ini 1 elde edecek şekilde "nasıl cebr işlemi yapılacağı sorulmaktadır, ve cevap, 2 1/2 ile çarpma yapılmasıdır. Böylece, *el-cebr*, başka metinlerde açığa çıkan anlamları ile de uygun olarak, hem toplama ve hem de çarpma ile cebr işlemini (restoration) kapsar. *El-mukâbele* ise, daha sonraki bir çok metinde geçen normal anlamından farklıdır (ki, bu metinlerde, eşitliğin her iki tarafındaki benzer terimlerin sadeleştirilmesini ifade eder); aynı büyüklüğün farklı iki niceliğinin eşitliğin iki tarafında bulunmasını, yani ("retorik") bir denklem şeklini gösterir. (Bu problem 7'deki, sadece mukâbele (opposition) nin yapıldığı, cebr'in (restaration) yapılmadığı bir pasajda daha bile aşikardır). Bu konuda, bu nedenle Gandz'ın düşüncesinin tam olarak doğru olduğu ispatlanmıştır[32] (*gabrûm* teriminin tahmin edilen bir tercümesinin doğruluğunu dikkate almaksızın). Öte yandan, cebr ("restoration") ve mukâbele ("opposition") Hârezmî ve diğerlerinde olduğu gibi *Liber Mensurationum*'da da *farklı* işlemlere verilen isimlerdir. Eğer *kabila*, belli bir zamanda *gabrûm*'un bir türevinin açıklaması olarak getirildiyse, bu Abû Bekr'in zamanından çok önce olmalıdır — Ve, ilkel terminolojisi nedeniyle, her ihtimale karşılık Arapça'nın bu sanatın (yani cebirin) taşıyıcı dili olmasından önce olmuş olmalıdır.[33]

EK II: Ardıl (Ardışık) İkikatlar

Bir Eski Babil çağı katiplik okulundan *Liber Mensurationum*'a giden direkt bir geleneğin keşfinden çok ilginç sonuçlar çıkmaktadır.

[32] Tesadüfen, bu terim bir başka Abû Bekr tarafından, yani Abû Bekr Muhammed İbn el-Hasan el-Kereci tarafından, Badi' ve Kâfî de olduğu gibi (Saliba (1972: s. 199 vd.)'ya göre; Kâfî'deki tanım Hârezmî'ninki gibi görünmektedir; bakınız, Hochheim 1878: III, s. 10) *Fahrî* adlı kitabında (Woepcke 1853: s. 64) kullanılmaktadır.

[33] Bu problemin bundan başka ele almış biçimleri *mâl* (birinci dereceden bir problemin bilinmeyen niceliği olarak kullanıldığında, Yunan-Mısır Akhmîm papirüsündeki θησαυρός'ye tekabül etmektedir— Bakınız, Baillet 1892: s. 70-72) ve *cezr* terimlerinin menşelerini gözönünde bulundurmalıdır. *Cezr* (x, x^2'nin "nedeni", ya da daha iyisi $\sqrt{x}$, x'in "nedeni" farz edilmektedir) MÖ birinci yüzyılda zaten Hint'de bulunmaktadır (Bakınız, Datta ve Singh, 1962: s. 169 vd.). Bu düşüncenin İran yolu ile yayılması makûldur — ve bu hususda, İbn Türk ve Hârezmî'nin her ikisinin de Türkistan kökenli olmaları dikkate değer olabilir (Sayılı 1962: s. 87 vd. da zaten belirtildiği gibi).

Farklı farklı deliller tek bir doğrultuda ve tek yönlü olmaktan ziyade, karşılıklı geçişler olduğunu önermektedir.

Fakat bir taraftan da ihtiyattan doğma bazı şüpheler kalabilir: Birkaç bin yıllık bir zaman dilimi üzerinden geçerek gelen, böyle kendini hiç açığa vurmayan bir geleneğin varlığı, ifadelerin ve retorik yapıların tamamen tesadüfi bir tekerrüründen daha ihtimal dışında değil midir?

Aynı zaman dilimi üzerinden gelen başka sürekli bir bilimsel-öncesi matematiksel geleneğin varlığı konusunda bu şüphe lüzumsuz bırakılabilir.

El-Uklîdîsî, Hint hesabını geniş şekilde açıkladığı son kitabının son bölümünde bunun "bir çok insanın sorduğu bir soru, bazılarının bir'in 30 defa iki kat yapılmasını, ve başka bazılarının da bir'in 64 kere iki kat yapılmasını sordukları bir soru" olduğunu belirtir (Saidan 1978:337). 341 (H.)/952 yılından biraz sonra bu metinde 10'un iki katları, bir Selökid metni ve daha geç İslâm aritmetik metinlerinin her ikisinde de bulunana çok benzer bir yoldan tartışılmaktadır.

Açıkça anlaşılmaktadır ki, 64 kere iki kat yapma, klasik Hint satranç-tahtası problemi ile aynıdır. 30 kere iki kat yapma, 8. yüzyıl sonu veya 9. yüzyıl başlarında Alcuin'e atfedilen problem kolleksiyonunda No 13'de bulunmuştur (Folkerts'de sayfa 51 vd), şöyle formüle edilmiştir.

> Bir kral uşağına, her kentten getirebileceği en fazla adamı alarak 30 kentten bir ordu toplamasını emretti. Fakat uşak ilk kentten yalnız geldi, ikinci kentten kendisiyle birlikte başka birisini getirdi; üçüncü kentten (kendisi ile) üç kişi geldi. kim söyleyebiliyorsa bu 30 kentten kaç adam toplandığını saysın.

Bu tür iki katları, Çin'den Batı Avrupa'ya uzanan İpek Yolu boyunca geç Antik Çağda ve erken Ortaçağlarda paylaşılan bilimsel-öncesi ticaret ve boş zaman değerlendirme matematiksel geleneğine bir örnek olarak, bibliyografyada 1984 tarihi ile gösterilen eserimde (s. 10) geniş ölçüde ele almıştım. Yakın zamanda, bu meseleye şaşırtıcı yeni bir ışık tutan Mari menşeli bir Eski Babil metni yayınlanmıştır (Soubeyran 1984 de, s. 30).

Bu metindeki iki katlar aşağıdaki gibidir:

1 tohum 1 tohuma ilâve olmuştur.
İlk gün 2 tohum olur.
İkinci gün 4 tohum olur.

Üçüncü gün 8 tohum olur.
Dördüncü gün 16 tohum olur.
......
ve böylece 30 gün oluncaya kadar devam eder.

İlkin iki katların sayısı, 4 (H.)/10. yüzyılda Şam'da "bir çok kişi tarafından" ve Carolingian problem koleksiyonunda sorulan sorulardan bir tanesidir. İkinci olarak, iki katlar, Carolingian problem koleksiyonunda olduğu gibi aynı toplamsal yoldan betimlenmektedirler. Üçüncü olarak, bunlar buğday ve arpa tohumları ile ilgilidir. Daha önce iki farklı fakat benzer olarak düşünülmesi mümkün görülebilen Şam'daki boş zaman değerlendirme problemleri, şimdi aynı eski ailenin üyeleri gibi görünmektedirler. Her halukârda, Mari problemi ile Carolingian problemi arasında (aralarında 2500 yıllık bir zaman fasılası vardır) ilişki kurulmuş gibi görünmektedir.

Eski Babil ve Hint probleminin bu akrabalığı başka bir gözlemle de desteklenmektedir. Oyun tahtaları ve ayın 30 gününe tekabül eden 3×10 luk alanları ile zaman tayin etmeye yarayan (takvim mahiyetinde) tahtalar Ortadoğuda bulunan, Eskiçağ'ın izlerini taşıyan bir kaç yerde yapılan kazılarda çakarılmıştır. Bunlardan bir tanesi, Habuba Kabira (Mari'ye çok yakın)'dan çıkarılanı ve MÖ. 4000 yılının sonları olarak tarihleneni, 1980 ve 1981'de Fedaral Alman Cumhuriyetin de bir sergide gösterilmişti. Diğerleri, Susa ve Filistin'den çıkarılan ve MÖ. 2000 yılına ait olanlar de Kainlis tarafından yayınlanmıştı (1942: s. 27 vd. tartışma 33 ve arkasından gelen sayfada). [34] Bunlar, 30 gün ve oyun tahtası arasında makul bir bağ kurmaktadırlar, ve böylece Mari ile satranç tahtası arasında başka bir bağ kurulmuş oluyor.

Ek: III Hârezmî'nin, Rosen tarafından neşredilen (1831:13-16) *şekliyle "Kareler ve kökler toplamı sayılara eşittir" durumunun geometrik Kanıtlaması*

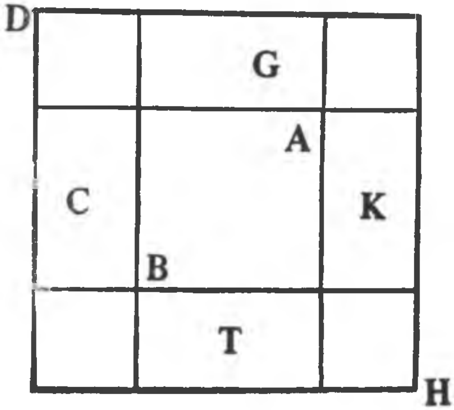
"Bir kare ve on kök toplamının otuzdokuz dirheme eşit"* olması durumunun ispatı.

[34] Dr. Peter Damerow, Habuba Kabira tahtası hakkında bana bilgi verdi; profesör von Soden bana de Kainlis'i işaret etti. Her ikisine de yardımları için müteşekkirim.

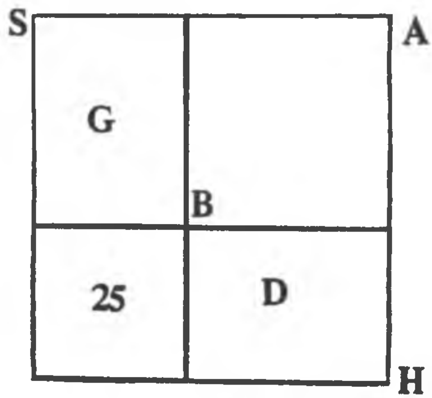
* $x^2 + 10x = 39$ durumunun geometrik gösterimi.

Bu durumu açıklamak için verilecek şekil, kenarları bilinmeyen olan bir dörtgendir. Bu dörtgen, bilmek istediğiniz kareyi, veya kökü temsil eder. Bu şekil, kenarlarından her biri köklerinin bir tanesi olarak düşünülebilen AB şeklidir; eğer bu kenarların bir tanesini herhangi bir sayı ile çarparsanız, bulunan sayının miktarına kareye eklenen köklerin sayısı olarak bakabilirsiniz. Dörtgenin her kenarı karenin kökünü temsil eder; ve, bu örnekte olduğu gibi, kökler kare ile ilişkilidirler, on'un dörtte birini alabiliriz, yani 2,5 buluruz, ve bunu şeklin dört kenarının her birine birleştiririz. Böylece, her biri uzunluk olarak dörtgenin bir kenarına sahip olan ve genişlik olarak da 2,5 değerine sahip olan dört tane yeni paralelkenar ile orijinal AB dörtgeni birleştirilmiştir; bu dört yeni paralelkenar C,G,T ve K paralelkenarlarıdır. Şimdi biz, kenarları bilinmeyen, fakat dört köşesinde 2,5 ile 2,5 un çarpımından oluşan bir kare parçası kadar noksanlı eşkenar bir dörtgene sahibiz. Bu noksanı telâfi etmek ve dörtgeni tamalamak için 2,5'un karesinin dört katını, yani yirmibeş'i (zaten bizim sahip olduğumuz niceliğe) eklememiz gerekir. İlk şeklin, yani kareyi temsil eden dörtgenin, onu çevreleyen ve on kökü temsil eden paralelkenarla birlikte otuzdokuz sayısına eşit olduğunu (problemin sunuluşundan) biliyoruz. Eğer buna, AB şeklinin köşelerinde bulunan dört eşkenar dörtgenin eşiti olan yirmibeş'i eklersek, büyük DH şekli tamamlanır, bu durumda bunların altmışdört ettiğini biliriz. Bu büyük karenin bir kenarı kendisinin köküdür, yani sekizdir. Eğer biz, on'un dörtte birinin iki katı olan beş'i büyük DH karesinin kenarının iki ucundan başlayarak sekizden çıkarırsak, geriye kalan kenar üç olacaktır, ve bu, karenin köküdür, veya orijinal AB şeklinin kenarıdır. Şuna dikkat edilmelidir ki, kök sayısını ikiye böldük, ve büyük şekli dört köşesinde tamamlamak için, bu bölümün kendi kendisiyle çarpımını otuzdokuz sayısına ilâve ettik; çünkü herhangi bir sayının dörtte birinin kendi kendisiyle çarpımı ve sonra da dört ile çarpımı, bu sayının yarısının kendi kendisiyle çarpımına eşittir.* Binâenaleyh, biz kök sayısının dörtte birini önce kendi kendisiyle çarpıp sonra dört ile çarpmak yerine, sadece kök sayısının yarısını kendi kendisiyle çarptık. İlgili şekil de şöyledir:

* $4 \cdot (b/4)^2 = (b/2)^2$



Aynı durum başka bir şekil ile de açıklanabilir. Kareyi temsil eden AB eşkenar dörtgeninden işe başlayalım. Bundan sonraki işimiz, bu kareye aynı on kök'ü eklemektir. Bu amaçla on'u ikiye böleriz, beş eder, ve AB karesinin iki kenarı üzerine iki dörtgen, yani G ve D dörtgenlerini kurarız, bu dörtgenlerin genişliği, AB karesinin bir kenarına eşit iken, uzunlukları on kök'ün yarı parçası olarak beş olur. Sonra, AB karesinin dörtgenlerle kesiştiği köşede bir kare geriye kalır. Bu kare beş ile beş'in çarpımına eşittir; ki bu beş ilk karenin iki kenarının her birine eklediğimiz kök sayısının yarısı oluyor. Böylece, biz, kare olan ilk dörtgenin, ve onun kenarları üzerindeki, on kök olan iki dörtgenin birlikte otuzdokuz ettiğini biliyoruz. Büyük dörtgeni tamamlamak için, sadece, beş ile beş'in çarpımı veya yirmibeş olan kareye ihtiyaç vardır. Büyük SH karesini tamamlamak için bunu (25'i) otuzdokuza ekleriz. Toplam altmışdört'tür. Bunun kökünü alırız, ki bu, büyük karenin kenarlarından biri olan sekiz'dir. Bundan, daha önce eklediğimiz aynı niceliği yani beş'i çıkararak geriye kalan üç'ü elde ederiz. Bu, kareyi temsil eden AB dörtgeninin kenarıdır; bu karenin kökü'dür, ve karenin kendisi ise dokuz'dur. İlgili şekilde şöyledir:



KISALTMALAR VE BİBLİYOGRAFYA

Anbouba, Adel, 1978. "Acquisition de l'algèbre par les Arabes et premiers développements. Aperçu général". *Journal for the History of Arabic Science*, **2**, 66-100.

Baillet, J., 1892. "Le papyrus mathématique d'Akhmîm". *Mission Archéologique Française au Caire, Mémoires 9:* 1, Paris s. 1-89.

Baqir, Taha, 1951. "Some More Mathematical Texts from Tell Harmal". *Sumer*, 7, s. 28-45.

Bergh, Paul, 1886. "Seiten-und Diametralzahlen bei den Griechen". *Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-literarische Abtheilung 31*, s. 136.

Boncompagni, Baldassare, 1851. "Della vita e delle opere di Gherardo cremonese, traduttore del secolo duodecimo, e di Gherardo da Sabionetta astronomo del secolo decimoterzo". *Atti dell'Accademia pontificia de'Nuovi Lincei 4* (1850-51), s. 387-493.

Boncompagni, Baldassare, ed., 1862. *Scritti di Leonardo Pisano.* II. Leonardi Pisani *Practica geometriae* ed *Opusculi.* Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Busard, H.L.L., 1968. "L'algèbre au moyen âge: Le 'Liber mensurationum' d'Abû Bekr", *Journal des Savants,* Nisan-Haziran 1968, s. 65-125.

Busard, H.L.L., ed., 1883. *The First Latin Translation of Euclid's Elements Commonly Ascribed to Adelard of Bath.* (Studies ve Metinler, 64). Toronto: Pontifical Institute of Medieval Studies.

Cantor, Moritz, 1875. *Die römische Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst.* Leipzig: Teubner, 1875.

Clagett, Marshall, 1984. *Archimedes in the Middle Ages.* V. *Quasi-Archimedean Geometry in the Thirteenth Century.* (Amerikan Felsefe Cemiyeti'nin Raporları, 157 A+B). Philadelphia: Amerikan Felsefe Cemiyeti.

(Colebrooke, H.T.) 1817. *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhascara,* Henry Thomas Colebrooke tarafından tercüme edilmiştir. London: John Murray. Yeni baskı Wiesbaden: Martin Sandig, 1973.

Curtze, Maximilian, ed., 1902. *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance.* (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, 12-13). Leipzig: Teubner.

Datta, Dibhutibhusan, ve Avadhesh Narayan Singh, 1962. *History of Hindu Mathematics. A Source Book. Parts I and II.* Bombay: Asia Publihing House. İlk edisyonun bir ciltte yeni baskısı, Lahore 1935-38.

Folkerts, Menso, 1970. *"Boethius" Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters.* Wiesbaden: Franz Steiner.

Folkerts, M., 1978. "Die älteste mathamatische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen *Propositiones ad acuendos iuvenes.* Überliefrung, Inhalt, kritische Edition". *Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschatliche Klasse. Denkschriften,* 116. Cilt. 6. Makale.

Gandz, Solomon, 1926. "The Origin of the Term 'Algebra'". *American Mathematical Monthly 33,* s. 437-440.

GAS: Fuat Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums.* I-IX (to date). Leiden: Brill, 1967 –

(Heiberg, J.L.) 1912. Heronis *Definitiones* cum collectionibus. Heronis quae feruntur *Geometrica,* ed., J.L. Heiberg. Leipzig: Teubner.

Hochheim, Adof, ed., çev., 1878. *Kâfî fî'l Hisâb* (Aritmetik üzerine yetkin olma) des Abû Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî. Halle: Louis Nebert.

Høyrup, Jens, 1982. "Oldbabylonisk algebra og geometrisk heuristik. En undersøgelse af en uventet begrebsverden". Roskilde Universitetscenter, Institut for Uddannelsesforskning, medieforskining og Videnskabsteori, Aralık 1982.

Høyrup, Jens, 1984. *Formative Conditions for the Development of Mathematics in Medieval Islâm.* George Sarton'a Doğumunun Yüzüncü Yıldönümü Armağanı, Ghent Üniversitesi, 14-17 Kasım 1984. Hazırlık versiyonu, Roskilde Universite Merkezi, Institute of Educational Research, Media Studies and Theory of Science..

Høyrup, Jens, 1984a. *Babylonian Algebra from the View-Point of Geometrical Heuristics. An Investigation of Terminology, Methods, and Patterns of Thought.* Roskilde Üniversite Merkezi, Institute of Educational Research, Media Studies, and Theory of Science, 1984.

Høyrup, Jens, 1985. *Babylonian Algebra from the View-Point...* Düzeltilmiş ikinci baskı. Roskilde Üniversite Merkezi, Institite of Educational Research, Medeia Studies and Theory of Science.

Høyrup, Jens, 1985a. "Algebra and Naive Geometry. An Inversigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought". Basılmamış, yazma halinde.

Høyrup, Jens, 1985b. "Varieties of Mathematical Discourse in Pre-Modern Socio-Cultural Contexts: Mesopotamia, Greece, and the Latin Middle Ages", *Science and Society 49,* s. 4-41.

Kainlis, Andrée de, 1942. "Un jeu assyrien du musée de Louvre". *Revue d'Assyriologie 39,* 1942-44, s. 19-34.

Kroll, Wilhelm, ed., 1899. Procli Diaochi *in Platonis Rem Publicam Commentarii.* I-II. Leipzig: Teubner, 1899, 1901.

Levey, Martin, ed., 1966. The *Algebra* of Abû Kâmil, *Kitâb fî al-jabr wa'l-muqâbala,* Mordechai Finzi tarafından yapılan bir şerh içinde. İbrânîce metin, tercüme, ve Arapça metin'e özel referansla şerh. Madison, Milwaukee ve London: Wisconsin Üniversitesi basımevi, 1966.

Libri, Guillaume, 1838. *Histoire des sciences mathématiques en Italie.* cilt 1-4, Paris 1838-41. Yeni baskı Hildesheim: Georg Olms, 1967.

Luckey, Paul, 1941. "Tâbit b.Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen". *Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematischnaturwissenschaftliche Klasse. Berichte 93*, s. 93-114.

MCT: O. Neugebauer ve A. Sachs, ed.ler, 1945. *Mathematical Cuneiform Texts.* (American Oriental series, cilt 29). New Haven, Connecticutt: Amerikan Oriental Society.

MKT: *Mathematische Keilschrift-Texte*, yayınlayan ve inceleyen O. Neugebauer. I-III. (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Bölüm A: Quellel, 3. cild). Berlin: Julius Springer, 1935-1938.

Murdoch, John, 1971. "Euclid: Transmission of the Elements", *Dictionary of Scientific Biography,* cilt 4, s. 437-459. New York: Scribner.

Rosen, Frederic, ed., çev., 1831. The *Algebra* of Muhammad ben Musa. London, The Oriental Society.

Ruska, Julius, 1917. "Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst". *Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Klasse. Sitzungsberichte,* Yıl 1917, 2. Makale.

Saidan, A.S., ed., çev., 1978. The *Arithmetic* of Al-Uqlîdîsî. 341 (M. 952/3) yılında Şam'da, Abû al-Hasan Ahmad ibn İbrâhîm al-Uqlîdîsî tarafından yazılmış olan *Kitâb fî al-Hisâb al-Hindî* de söylendiği gibi, Hint-Arap Aritmetiğinin Hikâyesi. Dordrecht: Reidel.

Saliba, George A., 1972. "The Meaning of al-Jabr wa'l-muqâbala". *Centaurus 17* (1972-73), s. 189-204.

Sayılı, Aydın, ed., çev., 1962. *Abdülhamid Ibn Türk'ün Katışık Denklemlerde Mantıkî Zaruretler Adlı Yazısı ve Zamanın Cebri,* (Türk Tarih Kurumu Yayınlarından, VII. Seri, No 41). Ankara: Türk Tarih Kurumu Basımevi.

Soubeyran, Denis, 1984. "Textes mathématiques de Mari". *Revue d'Assyriologie 78,* s. 19-48.

Struve, W.W., ed., 1930. *Mathematischer Papyrus des Staatlichen Museums der schönen Kunste in Moskau.* (Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik. Bölüm A: Quellen, 1. cilt). Berlin: Julius Springer.

Suter, Heinrich, ed., çev., 1892. "Das Mathematiker-Verzeichniss im Gihrist des Ibn Abî Ja'kûb an-Nadîm". *Zeitschift für Mathematik 37*, Ek, s.1-87.

TMB: F. Thureau-Dangin, ed., çev., *Textes mathématiques babyloniens.* (Ex Oriente Lux, Deel 1). Leiden: Brill, 1938.

van Ryzin, Sister Mary St. Martin, 1960. "The Arabic-Latin Tradition of Euclid's *Elements* in the Twelfth Century". *Dissertation,* Wisconsin Üniversitesi.

von Soden, Wolfram (E.M. Bruins ve M. Rutten'in tanıtma yazısı, *Textes mathématiques de Suse,* Paris 1961). *Bibliotheca Orientalis 21,* s. 44-50.

Woepcke, Franz, ed., çev., 1853. Abû Bekr Muhammed bin el-Hasan el-Kerhi'nin cebir eseri, *Fahri*'den Alıntılar. Paris: Imprimerie Impériale.

Woepcke, Franz, 1863. "Mémoires sur la propagation des chiffres indiens". *Journal asiatique,* 6ieme série *1*, s. 27-79, 234-290, 442-529.