Türkiye Teknoloji ve Uygulamalı Bilimler Dergisi
Turkish Journal of Applied Sciences and Technology
dergipark.gov.tr/tubid

Turk J App Sci Tech
© TUBİD
ISSN: 2528-8652

Araştırma Makalesi/Research Article
2019, 2(1): 11-19

Nonlineer Schrödinger Denkleminin Tam Çözümleri*

Halide GÜMÜŞ, Halis YILMAZ**
Dicle Üniversitesi, Matematik Bölümü 21280 Diyarbakır, TÜRKİYE

MAKALE BİLGİSİ / ARTICLE INFO
Geliş Tarihi / Received: 19.12.2018
Kabul Tarihi / Accepted: 30.04.2019
Anahtar Kelimeler:
İlerleyen dalga
Nonlineer Schrödinger (NLS) Denklemi
Hirota Metodu.

ÖZET

Bu makalede Nonlineer Schrödinger denklemi incelenmiştir. Öncelikle denklem hakkında bilgiler verilmiş ve daha sonra denklem 'enerji korumalı yöntem' ile elde edilmiştir. Ayrıca ilerleyen dalga çözümü elde edilmiş ve daha sonra Hirota metodu kullanılarak NLS denkleminin 1-soliton ve 2-soliton çözümü verilmiştir.

Exact Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation

Keywords:
Travelling wave,
Nonlineer Schrödinger (NLS) Equation
Hirota's Direct Method

ABSTRACT

This article is devoted to NLS Equation. Firstly, we give some information about NLS then we obtain the equation by energy preserving method. Furthermore we construct a travelling wave solution for the NLS equation. Finally, by using Hirota's direct method we present one-soliton and two soliton solutions for the NLS.

**Sorumlu Yazar / Corresponding Author: halidegumus@hotmail.com

1. Giriş

Klasik Fizikte kullanılan Newton yasaları ışık ve atom davranışlarını açıklamada yetersiz kalmış ve yeni bir Fizik alanı olan kuantum fiziği doğmuştur. Bu alana 1900 yılında kuanta denilen ışık paketlerinin transferi üzerine çalışmalar yürüten Max Planck öncülük etmiştir. 1923 yılında De Broglie madde dalgası kavramını üretmiş ve sadece foton değil maddenin de dalga özelliği gösterdiği varsayımında bulunmuştur. 1926 yılında Erwin Schrödinger dalga denklemini ve dalga mekaniğini açıklamıştır. Aynı yıllarda Heisenberg 'Belirsizlik İlkesi'ni açıkladı (Karaoğlu 2008). Bir taneciğin yerini ve momentumunu aynı anda doğru ölçmenin imkansız olduğunu ve bu ilkesi ile ölçümlerde yapılan hataların bir alt limiti olabileceğini göstermiştir. Bütün bu çalışmalar daha sonraki yıllarda NLS için bulunan çözümlere kaynaklık etmiştir.

1967 yılında Benney ve Neweel NLS denklemini zayıf dalga paketlerinde kullanılan bir yöntem olarak verdiler. 1968 yılında Zakharov, Beney ve Neweel'den bağımsız yürüttüğü bir çalışma ile NLS denklemini tekrar üretti (Dias ve Bridges 2004). Hirota (1971) integrallenebilir nonlineer evolüsyon denklemlerine çoklu soliton çözüm öneren metodunu üretti. Bu metod ile değişkenlere bağlı olarak dönüşüm uygulandığında oluşan yeni değişkenli denklemlerde çoklu soliton çözüm daha rahat görülebiliyordu. Metodun zamanla KdV (Hirota 1972), NLS (Hirota 1973) tarzı denklemlerde çok etkili olduğu ve N-Soliton çözümlerin genelleştirilerek elde edilebildiği görüldü. Zakharov ve Shabat (1972)

NLS için 'Ters Saçılım Yöntemi (Inverse Scattering Transform (IST))' ni geliştirdi. IST güçlü ve zorlu bir yöntem olmasına karşın Hirota metodu soliton çözüm bulma konusunda daha kullanışlı olmuştur. Bu metodu kullanışlı kılan diğer bir özelliği de analitik olmasından çok cebirsel olmasıdır. Bu da denklemin çözümünde bireye hız kazandırır.

Ablowitz ve Ladik (1975) NLS için 'Sonlu Fark Yöntemi'ni geliştirdi. Hirota (1980) bilineer forma dönüştürme ile ilgili detaylı çalışmalarda bulunmuştur. 2004 yılında da yayımladığı kitapta Direct metodunun keşif sürecini anlatmış ve soliton teorisinde nasıl kullanılabildiğine açıklık getirmiştir. Herbst ve Weideman (1986) NLS denklemi için parçalara ayırma yönteminin analizini yaptı. Overnman ve arkadaşları da (1986) denklemin spektrumunu hesaplayabilecek bilgisayar kodları ürettiler.

Klasik Fizikte sistemler konum ve momentum üzerine kurulu ve sistemle ilgili diğer değişkenler de (örneğin; hız, açısal hız, enerji...) bu ikilinin ilişkisinden doğar. Ancak kuantum mekaniğinde sabit bir konumdan bahsetmek çok da mümkün değildir. Böylece bu verileri kullanarak doğru sonuçlara ulaşmak zorlaşır. Kuantum mekaniği bir parçacığın belirli bir konumdaki olasılığını veya belirli bir momentuma sahip olma olasılığını hesaplar. Bu olasılığı bir dalga fonksiyonu yardımıyla gerçekleştirir. Bu fonksiyonun amacı konumu bulmak değil konumun olasılığını hesaplamaktır. Kimyada elektronların bulunma olasılığını anlatan orbitaller buna örnektir. Atomun içinde hareket halinde bulunan elektronların konumlarını tam olarak ifade etmek mümkün değildi ancak elektronların bulunma ihtimalinin en fazla olduğu yerler bulunabilir. Schrödinger denklemi bu şekilde oluşturulan denklemlerden biridir.

Bu makalenin birinci kısmı giriş kısmı oluşturmaktadır. Bu kısımda Schrödinger denklemi hakkında bilgiler ve tarihsel süreci verilmiştir. İkinci kısımda Schrödinger denkleminin enerji korumalı yöntemle elde edilişi verilmiştir. Üçüncü kısımda Nonlineer Schrödinger Denkleminin ilerleyen dalga çözümü verilmiştir. Dördüncü kısımda Nonlineer Schrödinger Denkleminin Hirota metodu ile 1-soliton ve 2-soliton çözümüne yer verilmiştir. Sonuç ve tartışma kısmı da beşinci kısımda verilmiştir.

2 Schrödinger Denkleminin Elde Edilişi

Schrödinger denklemi ilk olarak Avusturyalı Fizikçi Erwin Schrödinger tarafından bulunan bir dalga fonksiyonudur. Bu yüzden bu denklem Scrödinger denklemi olarak bilinir. Uzay ve zamana bağlı yazılan bu fonksiyon kuantum sistemi hakkında çözümlemeler yapabilmeye yarayan, sonuçlar üretmemize ve enerjinin korunumu ile hesaplanmasına aracılık eden bir fonksiyondur.
Bu fonksiyonun enerji korumalı çözümünün kapalı formu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$\psi(x,t)$ uzay ve zamana bağlı dalga fonksiyonu, p momentum, m kütle , λ dalga boyu , h Planck sabiti, $\hbar$ indirgenmiş Planck sabitini , v hız, k dalga sayısı , w grup fazı ve f frekansı göstermek üzere toplam enerji (E) kinetik enerji(KE) ile potansiyel enerjinin (PE) toplamından oluşur. Yani ;

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv^2 + V \tag{1}$$

dir. $p = mv \Rightarrow v = \dfrac{p}{m}$ enerji denkleminde yerine yazılırsa

$$\mathrm{E} = \frac{p^2}{2m} + V \tag{2}$$

bulunur. $\psi = \cos(kx - wt) + i\sin(kx - wt)$ formundadır. $\theta = kx - wt$ için $\psi = e^{i\theta}$ yazılabilir. Dalga fonksiyonundan

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = ike^{\theta} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = (ik)^2 e^{\theta} = -k^2\psi \tag{3}$$

elde edilir. $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, De Broglie dalga boyu da $\lambda = \dfrac{h}{p}$, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ eşitliklerinden elde edilen $k = \dfrac{p}{\hbar}$ yerine yazılırsa

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = p^2\psi \tag{4}$$

elde edilir. (2) enerji denklemi ψ ile çarpılırsa

$$\mathrm{E}\psi = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)\psi \tag{5}$$

elde edilir. Bu denkleme Schrödinger denkleminin zamandan bağımsız enerji korumalı denklemi denir.

Şimdi de zamana bağlı denklemi yazmak için foton enerjisi $E = hf$ denkleminden faydalanalım. w açısal frekansı göstermek üzere ve $w = 2\pi f$ enerji denkleminden elde edilirse bu denklemi aynı zamanda $E = \hbar w$ olarak da yazabiliriz. Burada

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -iw\psi \tag{6}$$

dir. Bu eşitliğin her tarafı $i\hbar$ ile çarpılırsa

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathrm{E}\psi \tag{7}$$

elde edilir. (5) ve (7) denklemlerinden Schrödinger denkleminin zamana bağlı kapalı formu elde edilmiş olur.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)\psi \tag{8}$$

NLS denkleminin farklı gösterimleri vardır.
Non-rölativistik kuantum mekaniğinde

$$i\partial t\psi = \frac{1}{2}\partial x\psi + K|\psi^2|\psi$$

şeklinde gösterilir.

3 Nonlineer Schrödinger Denkleminin İlerleyen Dalga Çözümü

r, θ reel fonksiyonlar ve c, n reel sabitler olmak üzere $r(x-ct), \theta(x-ct)$ ve $u = re^{i(\theta+nt)}$ dönüşümü yardımıyla

$$iu_t + u_{xx} + u|u|^2 = 0$$

denkleminin çözümünü elde edelim (Drazin ve Johnson 1989).

Çözüm

$u = re^{i\alpha}, \quad \alpha = \theta(\xi) + nt, \quad r = r(\xi), \quad \xi = x - ct$ olsun. Bu durumda

$$u_t = (r_t + ir\alpha_t)e^{i\alpha}, \quad u_x = (r_x + ir\alpha_x)e^{i\alpha}, \quad u_{xx} = [r_{xx} - r{\alpha^2}_x + i(r\alpha_{xx} + 2r_x\alpha_x)]e^{i\alpha}$$

ve

$$r_t = -cr^{'}, \quad r_x = r^{'}, \quad r_{xx} = r^{''}$$

ve

$$\alpha_t = -c\theta^{'} + n, \quad \alpha_x = \theta^{'}, \quad \alpha_{xx} = \theta^{''}$$

olur. Böylece

$$iu_t + u_{xx} + u|u|^2 = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$(ir_t - r\alpha_t)e^{i\alpha} + [r_{xx} - r{\alpha^2}_x + i(r\alpha_{xx} + 2r_x\alpha_x)]e^{i\alpha} + re^{i\alpha}re^{i\alpha}re^{-i\alpha} = 0$$

olur. Buradan

$$-r\alpha_t + r_{xx} - r{\alpha^2}_x + r^3 + i(r_t + r\alpha_{xx} + 2r_x\alpha_x) = 0$$

olur. Burada

$$-r\alpha_t + r_{xx} - r\alpha^2 x + r^3 = 0$$

ve

$$r_t + r\alpha_{xx} + 2r_x\alpha_x = 0$$

yazılır. Bulunan kısmi türevler yerine yazılırsa

$$-cr' + 2r'\theta' + r\theta'' = 0 \tag{9}$$

ve

$$r^3 + r(c\theta' - n) + r'' - r\theta'^2 = 0 \tag{10}$$

elde edilir. (9) denklemi çözülürse

$$r^2\theta'' + 2rr'\theta' - crr' = 0 \Rightarrow (r^2\theta')' - c\left(\frac{r^2}{2}\right)' = 0$$

olur. Bu denklem integre edilirse

$$r^2\left(\theta' - \frac{c}{2}\right) = \frac{A}{2}$$

elde edilir. Buradan

$$\theta' = \frac{1}{2}\left(c + \frac{A}{r^2}\right)$$

olur. Bu değer (10) denkleminde yerine yazılırsa

$$r^3 + r\left(\frac{c^2}{4} - n\right) + r'' - \frac{1}{4}\frac{A^2}{r^3} = 0 \tag{11}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem r' ile çarpılır ve integre edilirse

$$\frac{r'^2}{2} + \frac{r^4}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{4} - n\right)r^2 + \frac{A^2}{8}\frac{1}{r^2} = -\frac{B}{4}$$

elde edilir. Bu ifadeyi r^2 ile çarpar ve düzenlersek

$$2r^6 + 4\left(\frac{c^2}{4} - n\right)r^4 + 2Br^2 + A^2 + 4r^2{r'}^2 = 0$$

elde edilir. Bu denklem r^2 ye bağlı bir denkleme dönüştürülür ve $r^2 = S$ alınırsa $2rr' = S'$ olur. Buradan

$$2(r^2)^3 - 4\left(n - \frac{c^2}{4}\right)(r^2)^2 + 2Br^2 + A^2 + (2rr')^2 = 0$$

olur. Böylece

$$2S^3 - 4\left(n - \frac{c^2}{4}\right)S^2 + 2BS + A^2 + S'^2 = 0$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} S'^2 &= -2\left[S^3 - 2\left(n - \frac{c^2}{4}\right)S^2 + BS + \frac{A^2}{2}\right] \\ &= -2F(S) \end{aligned}$$

ve

$$F(S) = S^3 - 2\left(n - \frac{c^2}{4}\right)S^2 + BS + \frac{A^2}{2}$$

olur.

4 Nonlineer Schrödinger Denkleminin Hirota Metodu İle Çözümü

Bu bölümde $\varepsilon = \pm 1$ ve

$$iu_t + u_{xx} + \varepsilon u|u|^2 = 0 \tag{12}$$

ile verilen Nonlineer Schrödinger denklemini ele alacağız. $\varepsilon = 1$ için focusing NLS (NLS+) ve $\varepsilon = -1$ için defocusing NLS (NLS-) olarak adlandırılır. NLS tamamen integrallenebilir bir denklemdir. Soliton çözümünü Hirota ile elde etmek için focusing NLS denklemini alacağız (Hirota 1973).
Çözüm g kompleks , f reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $u = \dfrac{g}{f}$ rasyonel dönüşüm yardımıyla

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{g_t f - g f_t}{f^2} \\ u_{xx} &= \frac{g_{xx} f - 2 f_x g_x - g f_{xx}}{f^2} + 2\frac{f_x^2 g}{f^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Bunlar (12) denkleminde yerine yazılırsa

$$i\frac{g_t f - g f_t}{f^2} + \frac{g_{xx} f - 2 f_x g_x - g f_{xx}}{f^2} + 2\frac{f_x^2 g}{f^3} + 2\frac{|g|^2 g}{f^3} = 0 \tag{13}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılır ve Hirota metodundan elde edilen genel sonuçlar kullanılırsa

$$(iD_t + D_x^2)(g.f) = 0 \tag{14}$$

ve

$$D_x^2(f.f) = |g|^2 \tag{15}$$

bilineer form elde edilmiş olur. Şimdi $f = 1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \ldots$ ve $g = \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \epsilon^3 g_3 + \ldots$ olarak alalım.

$$\begin{aligned} g.f &= (\epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \epsilon^3 g_3 + \ldots)(1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \ldots) \\ &= (g_1.1)\epsilon + (g_1.f_1 + g_2.1)\epsilon^2 + (g_1.f_2 + g_2.f_1 + g_3.1)\epsilon^3 + \ldots \end{aligned}$$

bulunur. $B = iD_t + D_x^2$ alalım ve $B(g.f) = 0$ denklemninde yerine yazarak ϵ nun kuvvetlerine göre bir araya getirelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \epsilon^1 &: B(g_1.1) = 0 \\ \epsilon^2 &: B(g_1.f_1 + g_2.1) = 0 \\ \epsilon^3 &: B(g_1.f_2 + g_2.f_1 + g_3.1) = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{16}$$

elde edilir. $(iD_t + D_x^2)(g_1.1) = ig_{1,t} + g_{1,xx}$ ve benzer şekilde diğerleri (16) sonuçlarında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} ig_{1,t} + g_{1,xx} &= 0 \\ ig_{2,t} + g_{2,xx} &= -(iD_t + D_x^2)(g_1.f_1) \\ ig_{3,t} + g_{3,xx} &= -(iD_t + D_x^2)(g_1.f_2 + g_2.f_1) \\ &\vdots \\ ig_{n,t} + g_{n,xx} &= -(iD_t + D_x^2)(\sum_{k=1}^{n-1} g_k.f_{n-k}) \end{aligned} \tag{17}$$

olur. Şimdi de $D_x^2(f.f) = |g|^2$ denklemine bakalım. g kompleks değerli bir fonksiyon olduğundan g^* , g fonksiyonunun eşleniğini göstermek üzere $|g|^2 = g.g^*$ dir. Burada

$$\begin{aligned} f.f &= (1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \ldots)(1 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^3 f_3 + \ldots) \\ &= 1.1 + (f_1.1 + 1.f_1)\epsilon + (f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2)\epsilon^2 \\ &+ (f_3.1 + f_1.f_2 + f_2.f_1 + 1.f_3)\epsilon^3 + \ldots \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}|g|^2 = g.g^* &= \epsilon^2(g_1.g_1^* + \epsilon g_1.g_2^* + \epsilon g_2.g_1^* + \epsilon^2 g_2.g_2^* + \epsilon^2 g_3.g_1^* \ldots)\\ &= \epsilon^2|g_1|^2 + \epsilon^3(g_1.g_2^* + \epsilon g_2.g_1^*) + \epsilon^4(|g_2|^2 + g_3.g_1^*) + \ldots\end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned}D_x^2(f.f) = |g|^2 &\Rightarrow D_x^2(1.1) + D_x^2(f_1.1 + 1.f_1)\epsilon + D_x^2(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2)\epsilon^2\\ &+ D_x^2(f_3.1 + f_1.f_2 + f_2.f_1 + 1.f_3)\epsilon^3 + \ldots\\ &= \epsilon^2|g_1|^2 + \epsilon^3(g_1.g_2^* + \epsilon g_2.g_1^*) + \epsilon^4(|g_2|^2 + g_3.g_1^*)\ldots\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\epsilon^0 &: D_x^2(1.1) = 0\\ \epsilon^1 &: D_x^2(f_1.1 + 1.f_1) = 0\\ \epsilon^2 &: D_x^2(f_2.1 + f_1.f_1 + 1.f_2) - |g_1|^2 = 0\\ \epsilon^3 &: D_x^2(f_3.1 + f_1.f_2 + f_2.f_1 + 1.f_3) - (g_1.g_2^* + g_2.g_1^*) = 0\\ &\vdots\end{aligned} \tag{18}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}f_{1,xx} &= 0\\ f_{2,xx} &= \frac{1}{2}\left[|g_1|^2 - D_x^2(f_1.f_1)\right]\\ f_{3,xx} &= \frac{1}{2}(g_1.g_2^* + g_2.g_1^*) - D_x^2(f_1.f_2)\\ &\vdots\\ f_{n,xx} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n-1} g_k.g_{n-k}^* - D_x^2(\sum_{k=1}^{n-1} f_k.f_{n-k})\right]\end{aligned} \tag{19}$$

elde edilir. $\theta_i = k_i x + w_i t + \alpha_i$ için

$$g_1 = \sum_{i=1}^{N} e^{\theta_i}$$

NLS denkleminin N -soliton çözümünü verir. $N = 1$ için 1-Soliton çözümünü inceleyelim.

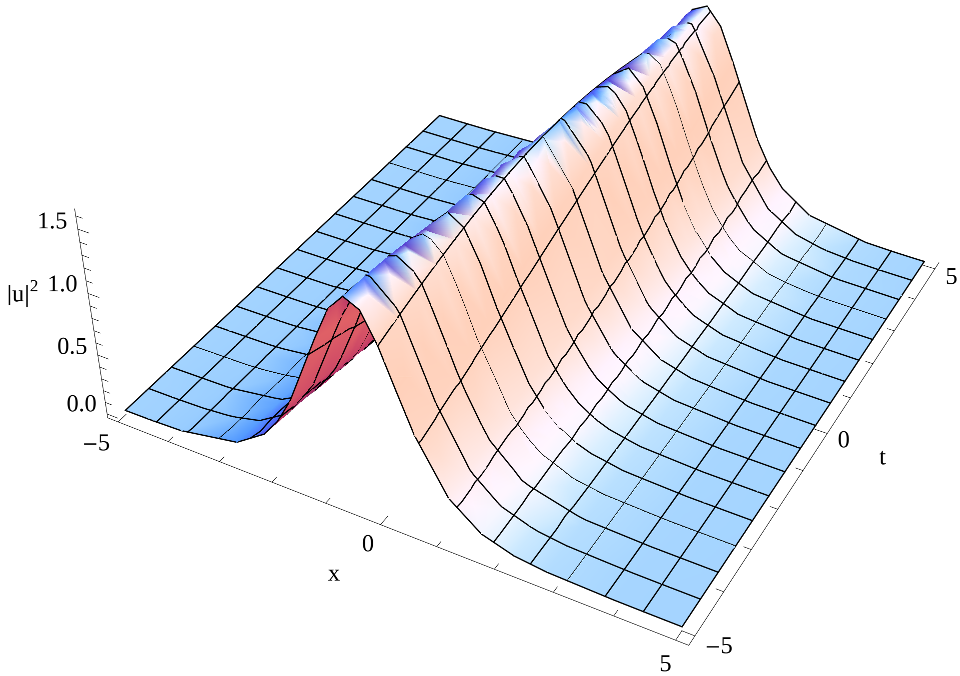
1-Soliton Çözüm

$g_1 = e^{\theta_1}$ ve $\theta_1 = k_1 x + w_1 t + \alpha_1$ için (17) denkleminden elde ettiklerimize göre $ig_{1,t} + g_{1,xx} = 0 \Rightarrow w_1 = ik_1^2$ bulunur. Aynı şekilde (19) deki denklemden de $f_1 = 0$ dır. Bu yüzden (17) dan $ig_{2,t} + g_{2,xx} = 0$ olur. O halde $g_2 = 0$ seçilebilir. $f_1 = 0$ olduğundan (19) deki denklemden $f_{2,xx} = \frac{1}{2}g_1.g_1^* = \frac{1}{2}e^{\theta_1}.e^{\theta_1^*}$ olur. f_2 reel bir fonksiyon olduğundan $f_2 = e^{\theta_1+\theta_1^*+A_{11}} = e^{\beta}$ seçilebilir. Burada $\beta = (k_1+k_1^*)x+(w_1+w_1^*)t+\alpha_1+\alpha_1^*+A_{11}$ dir. Yerine yazılırsa $e^{A_{11}} = \dfrac{1}{2(k_1+k_1^*)^2}$ bulunur. Burdan görülüyor ki f_2 beklediğimiz gibi reel bir fonksiyondur. İşlemler benzer şekilde devam ettirilirse f_3 ve sonraki f fonksiyonlarının 0 çıkacağı açıktır. Şimdi de (17) dan

$$ig_{3,t} + g_{3,xx} = -(iD_t + D_x^2)(g_1.f_2 + g_2.f_1)$$

denklemine bakalım. $f_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ olduğundan

$$ig_{3,t} + g_{3,xx} = -(iD_t + D_x^2)(g_1.f_2)$$



Şekil 4.1: NLS denkleminin $a = 0.9$ ve $b = 0.1$ için 1-Soliton çözümünün grafiği

denklemine bakacağız. g_1 ve f_2 fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} ig_{3,t} + g_{3,xx} &= -(iD_t + D_x^2)(e^{\theta_1}.e^{\beta}) \\ &= -e^{\theta_1}.e^{\beta}\left[i(ik_1^2 - (ik_1^2 - ik_1^{*2})) + k_1^2 - 2k_1(k_1 + k_1^*) + (k_1 + k_1^*)^2\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. İşlemler devam ettirilirse g_3 ve sonraki g fonksiyonlarının 0 çıkacağı açıktır. O halde $i \geq 3$ için $f_i = 0$ ve $g_i = 0$ yazılabilir. Bu durumda $g = \epsilon g_1$ ve $f = 1 + \epsilon^2 f_2$ olur. $\epsilon = 1$ alınırsa $g_1 = e^{\theta_1}$ ve $f_2 = e^{\theta_1 + \theta_1^* + A_{11}}$ için NLS denkleminin çözümü $u = \dfrac{g}{f}$ den

$$u = \frac{e^{\theta_1}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_1^* + A_{11}}} \tag{20}$$

bulunur. Bu da NLS denkleminin 1-Soliton çözümüdür. Elde ettiğimiz bu çözüm $\varepsilon = 1$ için elde edilen çözümdür. $a, b \in \mathrm{R}$ ve $k_1 = a + ib$ alınır ve (20) denklemi düzenlenirse

$$u(x,t) = \sqrt{2}a\frac{e^{i[bx + (a^2 - b^2)t]}}{\cosh[a(x - 2bt)]}$$

1-soliton çözümü elde edilir. Bu çözümün grafiği (4.1) de verilmiştir.
(12) deki Schrödinger denkleminde $\varepsilon = -1$ alınırsa

$$u(x,t) = -\sqrt{2}a\frac{e^{i[bx + (a^2 - b^2)t]}}{\sinh[a(x - 2bt)]}$$

çözümü elde edilir.
Şimdi de 2-Soliton çözümü elde edelim.

2-Soliton Çözüm

$$g_1 = \sum_{i=1}^{N} e^{\theta_i}$$

için $N = 2$ alındığında 2-Soliton çözümü elde etmiş oluruz. $\theta_1 = k_1 x + w_1 t + \alpha_1$, $\theta_2 = k_2 x + w_2 t + \alpha_2$ için $g_1 = \sum_{i=1}^{2} e^{\theta_i} \Rightarrow g_1 = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$ olur.

$$ig_{1,t} + g_{1,xx} = 0 \Rightarrow i(w_1 e^{\theta_1} + w_2 e^{\theta_2}) + (k_1^2 e^{\theta_1} + k_2^2 e^{\theta_2}) = 0$$

olur. Buradan $w_1 = ik_1^2$ ve $w_2 = ik_2^2$ yazılır. Burada $k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ dır. Aynı şekilde (19) deki denklemden de $f_1 = 0$ dır. Bu yüzden (17) dan $ig_{2,t} + g_{2,xx} = 0$ olur. O halde $g_2 = 0$ seçilebilir. $f_1 = 0$ olduğundan (19) deki denklemden

$$\begin{aligned} f_{2,xx} &= \frac{1}{2} g_1.g_1^* = \frac{1}{2}(e^{\theta_1} + e^{\theta_2})(e^{\theta_1^*} + e^{\theta_2^*}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\theta_1+\theta_1^*} + e^{\theta_1+\theta_2^*} + e^{\theta_2+\theta_1^*} + e^{\theta_2+\theta_2^*}) \end{aligned}$$

olur. Buradan $f_2 = e^{\theta_1+\theta_1^*+A_{11}} + e^{\theta_1+\theta_2^*+A_{12}} + e^{\theta_2+\theta_1^*+A_{21}} + e^{\theta_2+\theta_2^*+A_{22}}$ seçilebilir. Şimdi de (17) dan

$$ig_{3,t} + g_{3,xx} = -(iD_t + D_x^2)(g_1.f_2 + g_2.f_1)$$

denklemine bakalım. $f_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ olduğundan

$$ig_{3,t} + g_{3,xx} = -(iD_t + D_x^2)(g_1.f_2)$$

denklemine bakacağız. g_1 ve f_2 fonksiyonları yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} ig_{3,t} + g_{3,xx} &= -(iD_t + D_x^2)(e^{\theta_1} + e^{\theta_2})(e^{\theta_1+\theta_1^*+A_{11}} + e^{\theta_1+\theta_2^*+A_{12}} + e^{\theta_2+\theta_1^*+A_{21}} \\ &+ \ e^{\theta_2+\theta_2^*+A_{22}}) \\ &= e^{\theta_1+\theta_1^*+\theta_2}(e^{A_{11}} + e^{A_{21}}) + e^{\theta_2+\theta_1+\theta_2^*}(e^{A_{22}} + e^{A_{12}}) \\ &= e^{\theta_1+\theta_1^*+\theta_2+B_{12}} + e^{\theta_2+\theta_1+\theta_2^*+B_{12}} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $g_3 = e^{\theta_1+\theta_1^*+\theta_2+B_{121}} + e^{\theta_2+\theta_1+\theta_2^*+B_{122}}$ seçilebilir. Benzer şekilde işlemler devam ettirilirse $f_3 = 0$ ve $g_4 = 0$ elde edilecektir. Şimdi de (19) den f_4 ü bulalım. $f_1 = 0$ ve $g_2 = 0$ olduğundan

$$f_{4,xx} = \frac{1}{2}(g_1.g_3^* + g_2.g_2^* + g_3.g_1^*)$$

denkleminden $f_4 = e^{\theta_1+\theta_2+\theta_1^*+\theta_2^*+C_{121}}$ bulunur. İşlemler devam ettirilirse $i \geq 5$ için $f_i = 0$ ve $g_i = 0$ yazılabilir. Bu durumda $g = \epsilon g_1 + \epsilon^3 g_3$ ve $f = 1 + \epsilon^2 f_2 + \epsilon^4 f_4$ olur. $\epsilon = 1$ alınırsa $g = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_1+\theta_1^*+\theta_2+B_{121}} + e^{\theta_2+\theta_1+\theta_2^*+B_{122}}$ ve $f = 1 + e^{\theta_1+\theta_1^*+A_{11}} + e^{\theta_1+\theta_2^*+A_{12}} + e^{\theta_2+\theta_1^*+A_{21}} + e^{\theta_2+\theta_2^*+A_{22}} + e^{\theta_1+\theta_2+\theta_1^*+\theta_2^*+C_{121}}$ için denklemin çözümü $u = \dfrac{g}{f}$ den

$$u = \frac{e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_1+\theta_1^*+\theta_2+B_{121}} + e^{\theta_2+\theta_1+\theta_2^*+B_{122}}}{1 + e^{\theta_1+\theta_1^*+A_{11}} + e^{\theta_1+\theta_2^*+A_{12}} + e^{\theta_2+\theta_1^*+A_{21}} + e^{\theta_2+\theta_2^*+A_{22}} + e^{\theta_1+\theta_2+\theta_1^*+\theta_2^*+C_{121}}}$$

bulunur ki bu da NLS denkleminin 2-Soliton çözümüdür.

5 Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada fiziksel uygulamada kullanım alanı yaygın olan Nonlineer Schrödinger denkleminin 1-Soliton ve 2-Soliton çözümlerini Hirota metodu ile elde ettik. Hirota metodu kullanılarak NLS denkleminin N-soliton çözümleri elde edilir. Hirota metodu diğer evolüsyon denklemlere de uygulanabilir.

Kaynaklar

Ablowitz, M. J., Ladik, J. F. 1975. Nonlinear differential-difference equations. Journal of Mathematical Physics, 16, 598-603.

Dias, F., Bridges, T. Weakly nonlinear wave packets and the nonlinear Scrödinger equation. Summer School Graduate Course. Nonlineer waves in fluids. Recent Advancess and Modern Applications, International Centre for Mechanical Sciences. Udine, Italy.

Drazin, P. G. , Johnson, R. S. 1989. Solitons: An Introduction. Cambridge University Press. Cambridge.

Hirota, R. 1971. Exact Solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. Phys. Rev. Lett, 27, 1192.

Hirota, R. 1972. Exact Solution of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons. Journal of the Physical Society of Japan, 33(5):1456-1458.

Hirota, R. 1973. Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation. Journal of Mathematical Physics, 14(7):805-809.

Hirota , R. 1980. Direct methods in soliton thoery. Solitons. Topics in Current Physics, vol. 17. Berlin: Springer-Verlag.

Hirota, R. 2004. The Direct Method in Soliton Theory. New York: Cambridge University Press, 12-58

Karaoğlu, B. 2008. Kuantum mekaniğine Giriş. Seçkin Yayıncılık. Ankara.

Overman, E. A. McLaughlin, D. W. Bishop, A. R. 1986. Coherence and chaos in the driven damped Sine-Gordon equation: Measurement of the soliton spectrum. Physica D., 19, 1-41.

Weideman, J. A. C. , Herbst, B. M. 1986. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation. SIAM Journal of Numerical Analysis, 23:485–507.

Zakharov, V. E. Shabat, A. B. 1972. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of wave in nonlinear media. Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics,34,62-69.