International Journal of Educational Studies in Mathematics, 2019, 6(2), 44-59

International Journal of Educational Studies in Mathematics

IJESIM

EDUGARDEN

The Examination of Mathematical Thinking of 6th Grade Students to Solve Process-Constrained and Process-Open Questions

Ali Bozkurt [1], **Abdurrahman Topal**

Gaziantep University, Faculty of Education, Gaziantep, Türkiye

ABSTRACT

The aim of this study is to research the mathematical thinking of the students in problem solving process. In this context, 6th grade students were given a form which including process-strained and process-open questions, and their answers have been studied. The sample of the study has been formed by 260 6th graders in a southern province of Turkey. All the data have been examined by qualitative and quantitative methods. The success rates of not only that for process-constrained questions but also for that of each other question have been determined. Furthermore, in order to assess the significance of the mathematically thinking and that of reasoning, answers of the students have been analyzed in a qualitative way. According to the findings of the research, it can be said that although the students are more successful in the problems based on a standard algorithm, they cannot exhibit the desired performance in general problem solving. It can be argued that this is why they did not use correct strategies and representations. Finally, findings obtained the study were discussed in comparison with the results of studies using a similar method (Cai, 2000 and Karakoca, 2011). Comparison of Turkey, the US and China Based on the sample of students' problem-solving process in how they think, is thought to be important in terms of strategy and offer the opportunity to see the similarities and differences in terms of representations.

ARTICLE INFO

Article History:
Received: 16.02.2019
Received in revised form: 10.04.2019
Accepted: 27.04.2019
Available online: 08.05.2019

Article Type: Standard paper

Keywords: mathematical thinking, problem solving, strategy, representation

1.Purpose

This study aims to reveal the mathematical thinking processes of students in relation to problems that can be solved with a standard algorithm (Process-Constrained questions) requiring knowledge of calculation and those that cannot be solved with a standard algorithm (Process-open questions) requiring a conceptual understanding. Answers were sought to the following study questions in accordance with the purpose of this study:

- How do participants perform when solving problems based on a standard algorithm compared with those not based on a standard algorithm?
- What strategies and patterns are followed by participants when solving problems based and not based on a standard algorithm?

2. Method

The study was based on a general scanning model. The sample of the study consisted of students from three schools in a metropolitan city in the south of Turkey. There were a total of 139 participants from school A, 67 female and 72 male pupils, 91 from school B, 37 female and 54 male pupils, and 30 from

[1] Corresponding author's address: Gaziantep Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Gaziantep, Türkiye
e-mail: alibozkurt@gantep.edu.tr

school C, 14 female and 16 male pupils. Care was taken that the schools of the 6th grade pupils recruited on a voluntary basis were all academically average schools.

A form consisting of 12 open-ended questions was used as data collection tool. Problems 1-6 are problems that can be solved with a standard algorithm. Problems 7-12 are problems that, unlike the previous ones, are partially unable to be solved by a standard algorithm. The 12 problems whose assessment was being performed were distributed in two booklets, in a homogenous format and with 6 problems in each booklet. The data collection process took place in two stages on different days, the idea behind it being that a single classroom hour was not enough to cover all the questions and aiming to give the pupils some rest.

Quantitative and qualitative analysis was used in the analysis of the study data, and the descriptive analysis process suggested by Strauss and Corbin (1990) was taken as a reference. In the analysis of problem solutions with respect to success, each question was scored between 0 and 4 in terms of accuracy. Within the scope of the second study question, each participant was analyzed in terms of the solution strategies and mathematical patterns they employed for problems that can and cannot be solved with a standard algorithm. Thus, the intention was to gauge the competency of pupils in employing strategies and patterns. Verbal, numerical and visual mathematical representations were categorized on the basis of the analysis of each problem.

3. Results

When the pupils' performance on problems that can and cannot be solved with a standard algorithm was examined, it was found that the sum of the averages of the problems that can be solved with a standard algorithm (10.60) was higher than the sum of the averages of the problems that cannot be solved with a standard algorithm (8.52). There is a significant difference ($p = 0.000 < 0.05$) between the success of pupils with regards to problems that can be solved with a standard algorithm and those that cannot be solved with a standard algorithm.

In the analysis of the strategies and representations used, 49% of the respondents gave correct answers to the map ratio problem solved with a standard algorithm. Four different solution strategies were identified for these explanations, which provide clear metrics for the solution strategies used. In the case of the pizza ratio problems, 37% of the participants provided explanations for the conclusions they reached. Meanwhile, 32% tried to give answers using numerical symbols. 17% of pupils incorporated visual elements by dividing the pies in different ways, while 14% of pupils did not provide any explanations.

Of the problems that cannot be solved by a standard algorithm, 71% of the participants correctly estimated the number of blocks required for the 5-step ladder, but only a small fraction (17%) found the correct number of blocks to build a 20-step ladder. The pupils used 3 different strategies and 2 different representations for this problem. As regards the odd-number pattern problems, 58% of the respondents correctly estimated the number of guests who arrived by the time the school bell rang for the 10th time. The students who gave the correct answer used two different strategies. Only 25% of respondents correctly answered the question "Which bell was it that rang when the 99 guests arrived?" While 64% of the respondents who answered correctly got the right answer with a concrete strategy, 36% used an abstract strategy. Besides this, 24% of the respondents who answered the last question correctly got the first question wrong due to incorrect addition, skipping of a number, or misunderstanding of the problem. Almost all students who used the $y = 2n - 1$ formula for the first question got the last question right in the same way.

4. Discussion

In general, the respondents' average score for problems that can be solved with a standard algorithm was higher compared to the average for problems not solvable with a standard algorithm. It can be assumed that the problems within this category have a higher rate of correct responses because it is easy for the student to learn and implement a standard procedure. A study by Soylu and Aydın (2006) also points towards similar findings. The respondents' failures and difficulties with regards to problems requiring knowledge of mathematical operations and conceptual knowledge may be due to the fact that concepts related to the subject taught are not made meaningful enough to pupils. For this reason, concepts and mathematical operations should be balanced when teaching math, especially starting from the basic level. The teaching of math should involve a balanced teaching of concepts and mathematical operations (Bozkurt, 2010, İşleyen and Işık, 2003; Rittle-Johnson and Alibali, 1999). One other issue that needs to be addressed are the strategies and presentations used when pupils have markedly underperformed.

5. Conclusion

Based on the findings of the study, further studies can be carried out taking into consideration the fact that the poor performance of pupils can be attributed to factors other than student-related causes. Studies focusing on the problem-solving processes conducted by teachers during classes may be beneficial in the process.

Ortaokul 6. Sınıf Öğrencilerinin Standart Bir Algoritmayla Çözülebilen ve Çözülemeyen Problemlerde Matematiksel Düşünüşlerinin İncelenmesi

Ali Bozkurt [1], **Abdurrahman Topal**

Gaziantep Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Gaziantep, Türkiye

ÖZ

Bu çalışmanın amacı öğrencilerin problem çözme süreçlerindeki matematiksel düşünüşlerini incelemektir. Bu kapsamda öğrencilerin standart bir algoritmayla çözülebilen ve çözülemeyen problemlere verdikleri cevapların doğruluğu ile çözüm sürecinde kullanılan stratejiler ve temsiller incelenmiştir. Araştırmanın örneklemini üç farklı okuldan toplam 260 ortaokul 6. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Veriler nitel ve nicel yöntemlerle analiz edilmiştir. Veri analizleri kapsamında katılımcıların her bir problem için başarı ortalamaları bulunmuştur. Ayrıca matematiksel düşünmenin ve strateji geliştirmenin bu tür problemleri çözmedeki yerini saptamak için katılımcı çözümlerinde kullanılan stratejiler ve temsil türleri analiz edilmiştir. Araştırmadan elde edilen bulgulara göre öğrencilerin standart bir algoritmaya dayalı problemlerde daha başarılı olmalarına rağmen, genel olarak problem çözmede istenilen performansı sergileyemedikleri görülmüştür. Bu durumun öğrencilerin doğru strateji ve temsiller kullanmamalarından kaynaklandığı söylenebilir. Ayrıca çalışmadan elde edilen bulgular, aynı veri toplama aracı ve veri toplama süreci kullanılarak yapılan çalışmaların (Cai, 2000 ve Karakoca, 2011) sonuçları ile karşılaştırılarak tartışılmıştır. Bu tür karşılaştırmaların Türkiye, ABD ve Çin örneklemlerinden yola çıkarak öğrencilerin problem çözme süreçlerinde nasıl düşündüklerini, stratejiler ve temsiller açısından benzerlik ve farklılıkları görmeye fırsat sunması açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

MAKALE BİLGİ

Makale Tarihçesi:
Alındı: 16.02.2019
Düzeltilmiş hali alındı: 10.04.2019
Kabul edildi: 27.04.2019
Çevrimiçi yayınlandı: 08.05.2019
Makale Türü: Standart makale

Anahtar Kelimeler: matematiksel düşünme, problem çözme, strateji, temsil

1. Giriş

Problem, kişinin çözme isteğini uyandıran ve çözümüne dair hazır prosedürün olmadığı, fakat kişinin bilgi ve deneyimlerini kullanarak çözme çabası içerisine girdiği durumlar olarak tanımlanmaktadır (Morgan, 1995). Bu çözme isteği bir ihtiyaç, merak veya sorumluluk duygusundan kaynaklanabilir. Matematik derslerinde problem denince akla daha çok sözel problemler gelmektedir. Bunun en önemli sebeplerinden biri problemlerin çoğunlukla sözel formda olan soruların problemler başlığı altında verilmesi olabilir. Sözel problemlerin öğrencilerde matematiksel dil gelişimi, akıl yürütme ve muhakeme becerilerinin gelişimde önemli bir yeri vardır (Aydoğdu ve Olkun, 2004). Ayrıca literatürde problemler standart bir algoritmayla çözülen (rutin) ve standart bir algoritmayla çözülemeyen (rutin olmayan) problemler şeklinde bir sınıflandırmada mevcuttur (Cai, 2000). Öğrenciler algoritmaya dayalı olmayan problemleri çözmede daha çok bağıntı bulma, geriye doğru ritmik sayma, sistematik liste yapma, tahmin etme ve şekil çizme gibi stratejileri kullanmaktadırlar (Çelebioğlu ve Yazgan, 2009). Standart bir algoritmayla çözülemeyen problemleri çözerken ise, öğrencilerde olayları inceleme, ilişki, düzen veya örüntü arama eğilimi artarken ispat becerileri de gelişir, ayrıca bu problemleri çözerken işlemleri ve çözümleri ezbere değil, problemin çözümü için gerekli olan stratejiyi kullanmayı öğrenirler (Altun, 2008). Problem çözme, bütün dersler için öğrenciye kazandırılması gereken ortak temel beceriler arasında yer almaktadır. Aynı zamanda problem çözme eleştirel düşünmeyi, yaratıcı ve yansıtıcı düşünmeyi, analiz ve sentezleme becerilerinin de kullanımını gerektirmektedir. Bu yüzden öğrencilerin problem çözme becerilerinin geliştirilmesinin eğitimin öncelikli amaçlarından birisi olması gerektiğinin altı çizilmektedir (Polya, 1980; Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2012).

Problem çözme sürecinde gerekli iki temel bilginin biri işlemsel diğeri kavramsal bilgidir. İşlemsel bilgi, problemleri çözmek için kullanılan sembol, aritmetik işlem ve rutin kurallar bilgisidir (Hiebert ve Lefevre, 1986; Van De Walle, Karp ve Bay-Williams, 2012). Kavramsal bilgi herhangi bir kavram, kural, genelleme ve bunlar arasındaki açık veya kapalı ilişkiler olarak tanımlanabilir (Hiebert ve Lefevre, 1986; Rittle-Johnson ve Alibali, 1999). İşlemsel bilgi standart bir algoritmaya dayalı problem çözebilme becerisini, kavramsal bilgi ise standart bir algoritmaya dayalı olmayan problem çözebilme becerisinin gelişimine işaret eder ve bu tür problemlerin çözümleri öğrencilerin kavramsal ve işlemsel bilgilerinin gelişimiyle ilgili ipuçları verir (Cai, 2000). Ayrıca araştırmalar öğrencilerin ilk olarak *işlemsel bilgiyi mi* yoksa *kavramsal bilgiyi mi* öğrendikleri konusu üzerine odaklanmış, işlem veya kavram bilgisinin kazanılmasında problem durumunun belirleyici olduğunu ortaya koymuşlardır (Rittle-Johnson ve Siegler, 1998). Bu araştırmaların büyük çoğunluğu, işlem bilgisinin kazanılmasının yeterli derecede kavram (anlam) bilgisinin kazanılmasını sağlamadığı sonucuna varmıştır. Diğer yandan, kavramsal bilgi, işlemsel bilginin kazanılmasında önemli rol oynamaktadır (Fuson, 1990; Hiebert ve Waerne, 1996). Bu çalışmada ortaokul 6. sınıf öğrencilerinin işlemsel bilgiye işaret eden standart bir algoritmayla çözülebilen ve kavramsal bilgiye işaret eden standart bir algoritmayla çözülemeyen problemlerdeki matematiksel düşünüşleri ortaya konmaya çalışılmıştır. Bu kapsamda şu araştırma sorularına cevap aranmıştır:

- Katılımcıların standart bir algoritmaya dayalı olan ve olmayan problemleri çözme performansları nasıldır?
- Katılımcılar standart bir algoritmaya dayalı olan ve olmayan problemleri çözerken ne tür strateji ve temsiller kullanmaktadırlar?

Literatürde öğrencilerin problem çözme süreçlerindeki matematiksel düşünüşlerini ortaya koyan çalışmalara rastlamak mümkündür. Örneğin Cai (2000) çalışmasında ABD ve Çinli öğrencilerin standart bir algoritmayla çözülebilen ve çözülmeyen sorulardaki öğrenci düşünüşlerini incelemiştir. Karakoca (2011) ise araştırmasında öğrencilerin problem çözme sürecinde matematiksel düşünme durumlarının matematik başarısı açısından farklılık gösterdiği, öğrencilerin standart bir algoritma ile çözülebilen problemlerdeki ortalamalarının standart bir algoritma ile çözülemeyen sorulara göre daha yüksek olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bu çalışmada altıncı sınıf düzeyindeki öğrencilerin problem çözme süreçlerindeki matematiksel düşünüşleri, öğrencilerin kullandıkları stratejiler açısından da detaylandırılarak incelenmiştir. Bu çalışmayla katılımcıların problem çözme bağlamındaki düşünüşleri, Cai'nin (2000) çalışmasından yola Amerika ve Çinli öğrencilerle, Karakoca'nın (2011) çalışmasından yola çıkılarak ta Türkiye'deki farklı bir örneklemle karşılaştırma fırsatı yakalanmıştır. Böylece farklı örneklemlerin problem çözme bağlamındaki düşünüşlerinin farklılık ve benzerlikler ortaya konmuştur. Bu yönüyle çalışmanın literatüre katkı sağlaması beklenmektedir.

2. Yöntem

Ortaokul 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünüşlerinin belirlenmesinin amaçlandığı bu çalışmada genel tarama modeli esas alınmıştır. Geçmişteki ya da halen mevcut olan bir olgu/olay var olduğu şekliyle betimlenecekse tarama modelinden yararlanılır (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

2.1. Araştırmanın Örneklemi

Araştırmanın örneklemini Türkiye'nin güneyinde yer alan bir şehir merkezindeki akademik başarı yönünden orta düzeydeki üç okulun 6. sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. Araştırmada kullanılan veri toplama aracı 6.sınıf öğrencilerin bilişsel düzeylerine uygun olduğu için bu sınıf düzeyi seçilmiştir.

Tablo 1. Katılımcıların okul türüne ve cinsiyete göre dağılımı

Okul	Cinsiyet		Toplam
	Kız	Erkek	
A	67	72	139
B	37	54	91
C	14	16	30
Toplam	118	142	260

Tablo 1'de A okulunda 67'si kız, 72'si erkek olmak üzere toplam 139, B okulunda 37'si kız 54'ü erkek olmak üzere toplam 91, C okulunda 14'ü kız, 16'sı erkek olmak üzere toplam 30 katılımcıdan veri toplanmıştır.

2.2. Veri Toplama Aracı

Veri toplama aracı olarak açık uçlu sorulardan oluşan bir form kullanılmıştır. Bu sorular Cai (2000) çalışmasından Türkçe'ye uyarlanmıştır. Bu problemler belirlendikten sonra 6. Sınıfların dersine giren iki matematik öğretmeninden ve bir öğretim üyesinden öğrencilerin her bir problemin dayandığı konu içerikleri için gerekli bilgiye sahip olup olmadıklarını değerlendirmeleri istenmiştir. Yapılan bu değerlendirmeden sonra öğretim programları bağlamında düşünüldüğünde öğrencilerin bu gereksinimlere sahip olmasının beklenebileceği anlaşılmıştır. Veri toplama aracında toplam 12 soru bulunmaktadır. Problemlerin 1'den 6'ya kadar olanları standart bir algoritmayla çözülebilen, 7'den 12'ye kadar olanları ise standart bir algoritmayla çözülemeyen problemlerdir.

Çalışma için kullanılan 12 problem ilk önce Türkçe'ye çevrilmiştir. Çeviride İngilizce versiyonundaki kişi isimleri, nesne adları, bağlamlar ve terminoloji gibi kültürel farklılıklar uygun kelimelerle kasıtlı olarak değiştirilmiştir. Ayrıca çevirinin anlaşılırlığını test etmek için problemler bir matematik öğretmenine çözdürülmüştür. Yapılan değerlendirmede, problemlerin İngilizce versiyonundaki anlamı gibi doğru anlaşılıp çözülebildiğine karar verilmiştir. Daha sonra 30 kişilik bir 6. Sınıf öğrenci grubuna test uygulanarak testin pilot çalışması yapılmıştır. Soruların anlaşılır olduğu ve problemlerin çözümünün toplam iki ders saati sürdüğü görülmüştür. Bu problemlerde öğrencilerden sadece doğru cevapları bulmaları değil aynı zamanda çözümlerini açıklamaları istenmiştir.

2.3. Veri Toplama Süreci

Çalışma için kullanılan problemler her bir kitapçıkta 6 problem olacak şekilde iki kitapçık haline getirilmiştir. Bir ders süresinin yetmemesi ve öğrencilerin dinlendirilmesi düşüncesiyle her bir kitapçık farklı günlerde uygulanarak 2 aşamada veriler toplanmıştır. Her bir aşamanın başında ilgili öğrencilere kitapçıklardaki her bir problemi çözme süreçlerini ve buldukları çözümün doğruluk gerekçelerini yazmaları gerektiği şeklinde açıklama yapılmıştır.

2.4. Veri Analiz Süreci

Katılımcıların performanslarının değerlendirilmesinde Cai (2000)'de verilen ölçek kullanılmıştır. Dört kategoriden oluşan ölçekteki her bir puanın açıklaması ve bu duruma uyan örnek cevaplar Tablo 2'de verilmiştir.

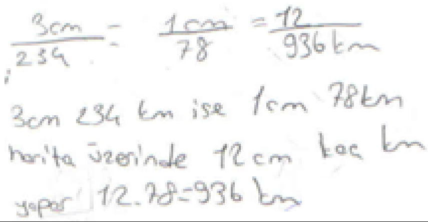
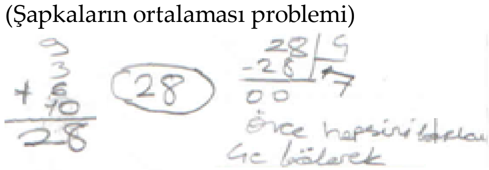
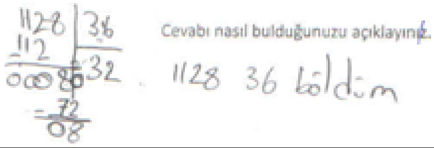
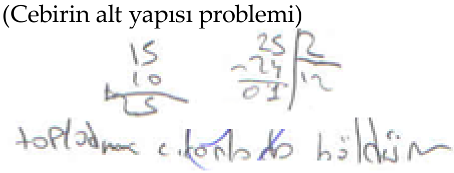
Tablo 2 dikkate alınarak her bir problemin çözümüne doğruluk yönünden 0, 1, 2, 3 veya 4 puan verilmiştir. Katılımcıların standart bir algoritmaya dayalı olan ve olmayan problemleri çözme performansları arasında istatistiksel olarak ilişki olup olmadığına t testi kullanılarak bakılmıştır.

İkinci araştırma sorusu kapsamında katılımcıların çözümlerinin içeriğine dair genel durumlarını ortaya koyması açısından standart bir algoritmayla çözülebilen ve çözülemeyen problemlerden ikişer tanesinin çözüm stratejileri ve matematiksel temsiller açısından analizler yapılmıştır. Bu problemlerin seçiminde, karşılaştırma yapabilmek için Cai (2000)'nin de analiz için tercih ettiği problemler analiz edilmiştir. Böylece genel olarak katılımcıların strateji ve temsil becerileri açısından durumları ortaya konulmaya çalışılmıştır. Her problemin analizinden sözel, sayısal ve görsel olarak matematiksel temsiller kategorize edilmiştir. Analizler bağlamında ortaya çıkan strateji ve temsiller ve bu strateji ve temsillerin açıklamaları ve frekansları bulgular kısmında tablolar halinde verilmiştir.

Bu çalışmada analizlerin güvenirliği bağlamında, öğrencilerin problemlere verdikleri cevaplar matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesi ve araştırmacı tarafından genel olarak incelenmiştir. Çözümlerin hangi kategoriye uygun olacağı ve bunların gerekçeleri üzerinde tartışma yapılmıştır. Her bir çözüm için referans alınması gereken özellikler belirlenmiştir. Sonrasında, 260 form arasından rastgele seçilen 20 form öğretim üyesi ve araştırmacı tarafından analiz edilmiştir. Birbirlerinden bağımsız olarak formlardaki çözümler değerlendirilmiş, puanlandırma yapılmıştır.

Daha sonra ortaya çıkan bu puanlar karşılaştırılarak, "Görüş Birliği" ve "Görüş Ayrılığı" olan puanlar belirlenmiştir. Her iki değerlendirmeci tarafından problemin çözümü için aynı kategoriye karar vermişse görüş birliği, farklı kategoriye karar vermişse görüş ayrılığı olarak kabul edilmiş ve değerlendirme tartışılarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Araştırmanın güvenirliği, Bakeman ve Gottman'ın (1997) aktardığı $P(Uyuşumyüzdesi) = \frac{N_a(Görüşbirliği)}{N_a(Görüşbirliği)+N_d(Görüşayrılığı)}$ şeklindeki formül kullanılarak yapılmış ve güvenirlik ortalaması hesaplanmıştır. Bu çalışma için uyuşum yüzdesi performans değerlendirmede %86,6; stratejiler ve temsillere dair kodlamalarda %82 olarak bulunmuştur. Bu oran güvenilir olarak kabul edilmesine (Miles ve Huberman, 1994) rağmen, görüş ayrılığına düşülen noktalar üzerinde ortak bir görüşe varıncaya kadar tartışmışlardır. Kalan formlar araştırmacı tarafından değerlendirilmiştir. Bu şekilde veri analizinin güvenirliği artırılmıştır.

Tablo 2. Problem çözümlerinin doğruluğunu analiz etmede kullanılan değerlendirme ölçeği

Puan	Açıklama	Örnek Cevap
4	Öğrencinin açıklama ve çözümünün tam ve doğru olması gerekir.	(Harita oran problemi) 
3	Öğrencinin açıklama ve çözümünün küçük hatalar, belirsizlikler veya çift anlamlılık hariç doğru olması gerekir.	(Şapkaların ortalaması problemi) 
2	Açıklama ve çözümün öğrencinin problemi anladığını göstermesi, ancak sürecin tamamlanmamış olması gerekir.	(Bölme problemi) 
1	Açıklama ve çözümün öğrencinin problemin bir kısmını anladığını göstermesi gerekir.	(Kamp yapmada oran problemi) 
0	Açıklama ve çözüm sürecinin öğrencinin problemi hiç anlamadığını göstermesi gerekir.	(Cebirin alt yapısı problemi) 

3. Bulgular

Bu bölümde önce katılımcıların problem çözmedeki başarılarına dair bulgular, daha sonra ise standart bir algoritmayla çözülebilen ve çözülemeyen problemlerde öğrencilerin kullandıkları çözüm stratejileri ve temsillerine dair bulgular verilmiştir.

3.1. Katılımcıların Problem Çözümlerinin Başarı Yönünden Analizi

Katılımcıların veri toplama aracındaki her bir problem için çözümün doğruluğu bağlamında ortalamaları Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3 incelendiğinde en yüksek ortalamanın 2,46'lık değerle standart bir algoritmayla çözülebilen 1. problem ve en düşük ortalamanın 0,84'lük değerle aynı kategoride 3. problem olduğu görülmektedir. Aynı zamanda standart bir algoritmayla çözülemeyen 12. problem 2,06'lık değer ile ortalamada 2. sırada ve aynı kategorideki 8. problem de 0,85 ortalama ile kendi problem türlerinde en düşük seviyededir. Ayrıca en yüksek ortalamalara sahip standart bir algoritmayla çözülebilen 1. problem

(2,46) ve standart bir algoritmayla çözülemeyen 12. problemde (2,06) öğrencilerin başarısı en düşük seviyededir. Diğer taraftan ortalamaları birbirine yakın ya da aynı olan problemlerin öğrenciler açısından zorluk derecesinin aynı olduğu söylenebilir. Bu problemler 1,87ortalamalara sahip olan standart bir algoritmayla çözülebilen 4. problem ile standart bir algoritmayla çözülemeyen 11. problemdir.

Tablo 3. Öğrencilerin her bir problem için ortalamaları

	Problemler	**Ortalama**	**Standart sapma**
Standart bir algoritmayla çözülebilen problemler	1. Konserve kutularının ortalaması	2,46	1,920
	2. Şapkaların ortalaması	1,75	1,940
	3. Alan problemi	0,84	1,477
	4. Harita oran problemi	1,87	1,850
	5. Pizza oran problemi	1,48	1,763
	6. Kamp yapmada oran problemi	1,90	1,747
Standart bir algoritmayla çözülemeyen problemler	7. Cebirin alt yapısı problemi	1,27	1,509
	8. Sayı teorisi problemi	0,85	1,586
	9. Bölme problemi	1,66	1,362
	10. Tahmin problemi	1,19	1,483
	11. Blok örüntü problemi	1,87	1,850
	12. Tek sayı örüntü problemi	2,06	1,286

Katılımcıların standart bir algoritmaya dayalı olan ve olmayan problemleri çözme performansları arasında istatistiksel olarak ilişki olup olmadığına dair değerler Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. Standart bir algoritmayla çözülebilen ve çözülemeyen problemlerin ortalamaların toplamının karşılaştırılması

Problem Türleri	Ortalamaların toplamı	Standart sapma	t değeri	p değeri	Sd
Standart Bir Algoritmayla Çözülebilen Problemler	10,60	6,05	8,312	p=0,000	259
Standart Bir Algoritmayla Çözülemeyen Problemler	8,52	6,90			

N=260, p=0,000; Güven aralığı: %95 (1,58-2,56)

Öğrencilerin standart bir algoritmayla çözülebilen ve çözülemeyen problemlere dair performansları incelendiğinde standart bir algoritmayla çözülebilen problemlerin ortalamalarının toplamının (10,60) standart bir algoritmayla çözülemeyen problemlerin ortalamalarının toplamından (8,52) yüksek olduğu görülmüştür. Öğrencilerin standart bir algoritmayla çözülebilen problemlerdeki başarısı ile standart bir algoritmayla çözülemeyen problemlerdeki başarıları arasında anlamlı fark vardır (p=0,000 <0,05).

3.2. Standart Bir Algoritmayla Çözülebilen Problemlerde Öğrencilerin Kullandıkları Çözüm Strateji ve Temsilleri

Standart bir algoritmayla çözülebilen problemlerde öğrencilerin matematiksel düşünüşlerine dair durumlarının ortaya konulması amacıyla katılımcıların bu kategorideki harita oran ve pizza oran problemlerindeki çözümleri analiz edilmiştir.

3.2.1. Harita Oran probleminde katılımcıların kullandıkları çözüm stratejileri

Katılımcıların harita okuma içeriğine sahip olan problemin çözümünde kullandıkları strateji ve temsiller Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5'te görüldüğü gibi katılımcıların %49'u harita oran problemi için doğru cevap vermişler. Kullanılan çözüm stratejisi net ölçümler sağlayan bu açıklamalar için, dört farklı çözüm stratejisi belirlenmiştir.

Tablo 5. Harita oran probleminin çözümünde katılımcıların kullandıkları çözüm strateji ve temsilleri

Strateji ve Temsiller	Yüzde (%)
Strateji 1: Haritada 1 cm'nin kaç km'yi (234:3=78) temsil ettiğini bulma ve sonra haritada 12 cm'nin gerçek mesafesini bulmak için 12 ile çarpma (78x12=936)	16
Strateji 2: 3 cm, 234 km'yi temsil ettiği için öğrenci ilk önce 12'yi 3'e bölüp 4 bulma ve sonra harita üzerindeki 12 cm'nin geçek mesafesini bulmak için(4x234=936) işlemini yapma.	22
Strateji 3: Doğru orantıyı kullanma. Bunu şu şekilde yapma: $\begin{array}{ccc} 3cm & \times & 234km \\ 12cm & & ?km \end{array} \quad x = \frac{12.234}{3} = 936km$	7
Strateji 4: Gerçek uzaklığı bulmak için bir bağıntı kurma. (örneğin $\frac{3}{12} = \frac{234}{x}$)	4
Strateji tanımlanmadı.	51

Hem strateji 1 hem de strateji 2, birimli bir oran içeriyor. Strateji 1'deki bu birimli oran her 1 cm için 78 km; strateji 2'deki bu birimli oran her 3 cm için 234 km'dir. Strateji 2 en çok kullanılan stratejidir (%22). Strateji 2'yi kullanarak çözmeye çalışan öğrenciler harita üzerinde Ankara ve Eskişehir arası olan 234 km'yi bir birim olarak kabul etmiş, sonra harita üzerinde Eskişehir ve Gaziantep arasını bu birim cinsinden kaç tane olacağını (12:3) bulup bu birim ile çarpmışlar ve gerçek mesafeyi doğru bulmaya çalışırken *sözel temsili* kullanmışlardır. Katılımcıların %16'sı strateji 1'in mantığını kullanmıştır. Bu stratejide öğrenciler ilk önce birimli oran bulmayı ve sonra Ankara ve Eskişehir arasındaki gerçek mesafeyi bulmayı denemişlerdir. Sayısal denklem veya birimli oranı bulmak için temsil olarak (santimetre başına kilometre sayısı) kullanmışlardır. Birbirine çok yakın yüzdelere sahip olan strateji 3 (%7) ve strateji 4'ün (%4) matematiksel mantığı birbirine çok benzemektedir. Bu benzerlik Ankara ve Eskişehir arasındaki gerçek uzaklığı bulmak için orantıyla ilişkili sayısal temsili kullanmalarıdır. Strateji tanımlamadan çözmeye çalışan ama cevabı bulamayan veya hiçbir işlem yapmayıp sorunun cevabını bulamayan öğrencilerin oranı ise %51'dir.

3.2.2. Pizza oran problemine verilen cevapların analizi

Pizza oran probleminde katılımcıların oran ve bölme bilgilerini kullanmaları amaçlamıştır. Tablo 6 öğrencilerin kullandıkları temsillerin yüzdesini göstermektedir.

Tablo 6. Pizza Oran Probleminde Öğrenci Cevaplarındaki Temsillerin Yüzde Dağılımı

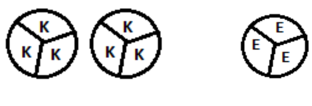
Gerekçelerde kullanılan temsil biçimleri	**Yüzde (%)**
Görsel çizimler	17
Sayısal semboller	32
Sözel Temsil	37
Gerekçe yok	14

Tablo 6'ya göre bu problemde katılımcıların %37'si buldukları sonuçların gerekçelerini sözel olarak ifade etmişlerdir. %32'si ise sayısal semboller kullanarak cevap vermeye çalışmışlardır. Pastaları değişik şekilde parçalayarak çözüme görsellik katan öğrenciler ise %17'yi temsil etmektedir. Diğer taraftan katılımcıların %14'ü ise herhangi bir gerekçe sunmamışlar.

Standart bir algoritma ile çözülebilen bu soruyu çözen öğrenciler cevaplarını kelimelerle ifade ederken öğrenciler arasında çözüm stratejileri ve temsiller açısından farlılıklar görülmüştür. Örneğin sözel temsil kullanan bir öğrenci;

"bir pizzayı 3 erkek paylaşırsa, (kızlara ait olan pizza) bir pizzayı 3 kız paylaşırsa eşit olur, ama bir kız yememiş olur"

şeklinde ifade etmiştir. Aynı zamanda şekil üzerinde eşleştirerek verdiği cevabı doğrulamaya çalışmıştır. Görsel temsil kullanarak cevap vermeye çalışan öğrenciler genellikle



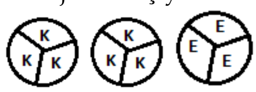
şeklinde parçalayarak bir kız öğrenciye pizzanın verilemeyeceğini sözel olarak açıklamaya çalışmıştır.

Diğer bir strateji ve temsil olan sayısal temsil 6. sınıf matematik müfredatında olan kesirlerin karşılaştırılması şeklinde verilen cevaplardır. Örneğin sayısal temsili tercih eden bir öğrencinin cevabı şu şekildedir:

"Kızlar pizzayı $\frac{2}{7}$ oranında, erkekler ise pizzayı $\frac{1}{3}$ oranında paylaşırlar. $\frac{1}{3} > \frac{2}{7}$ olduğu için erkekler daha fazla alır".

Bazı katılımcıların ise cevabı bulmak için herhangi bir stratejinin yanında cevabı doğrulamak için başka bir stratejiyi de kullandıkları görülmüştür. Bu problemde katılımcıları kullandıkları strateji ve temsiller Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7. Pizza Oranı probleminin çözümünde katılımcıların kullandıkları çözüm strateji ve temsilleri

Strateji ve temsiller	**Yüzde (%)**
Strateji 1. Kesirleri karşılaştırma: Her bir erkek bir pizzanın $\frac{1}{3}$'ini alacak, her bir kız ise bir pizzanın $\frac{2}{7}$'sini alacak. $\frac{1}{3}$ ile $\frac{2}{7}$'yi karşılaştırmak için, ortak paydalar haline dönüştürerek $\frac{1}{3}$'ün $\frac{2}{7}$'den büyük olduğunu bulma. ($\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$ ve $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$, $\frac{7}{21} > \frac{6}{21}$ veya ondalık $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ve $\frac{2}{7} = 0{,}2999\ldots$)	29
Strateji 2. Yuvarlama stratejisi: "Eğer 6 kız olsaydı her bir kız ve erkek eşit alacaklardı. Fakat 7 kız var bu yüzden her bir erkek her bir kızdan fazla alır" şeklinde cevap verme	18
Strateji 3. 3 kişiyi bir birim olarak kabul etme:  "3 kız 1 pizzayı ve diğer 3 kız diğer pizzayı paylaşırlar. Bu 6 kız her bir 3 erkek gibi eşit miktarda pizza alacaklar. Fakat içlerinden bir kız pizza alamayacak. Bu yüzden her bir erkek daha fazla alacak" şeklinde cevap verme	11
Strateji 4. Her üç kişiye bir pizza paylaştırma: 3 kız 1 pizzayı paylaşır ve kalan 4 kız 1 pizzayı paylaşır. Kalan 4 kızın her birinin aldığı parça erkeklerin aldıklarından daha küçük. Bu yüzden erkekler daha fazla alır şeklinde cevap verme	22
Strateji 5. Öğrenci sayılarının oranını, pizza sayılarının oranıyla karşılaştırma: 7 kız 2 pizza ve 3 erkek 1 pizza alıyor. Kızlar erkeklerin iki katı kadar pizzaya sahipler. Fakat kızların sayısı erkeklerin sayısının iki katından fazla. Bu yüzden erkekler fazla alır şeklinde cevap verme	9
Strateji 6. Artanları karşılaştırma: Her bir pizza 4 parçaya ayırma Her bir kız 1 parça alır ve 1 parça kalır. Her bir erkek bir parça alır ve bir parça kalır. Kalan bir parça 7 kıza paylaştırılmak zorunda fakat kalan parça 3 erkeğe paylaştırılabilecek. Bu yüzden erkekler fazla alır şeklinde cevap verme	7
Strateji 7. Öğrenci sayısına pizza sayısına oranlama: 3,5 kız bir pizzayı paylaşacak ve 3 erkek bir pizzayı paylaşacak. Böylece her bir erkek fazla alır şeklinde cevap verme	4

Doğru cevabı bulan katılımcılardan Strateji 1'i kullananlar çoğunluktadır (%29). Katılımcıların %18'i ise strateji 2'yi kullanmışlar. Bu kategoriye giren öğrenciler "3 kız öğrenciye 1 pizza, 6 kız öğrenciye 2 pizza paylaştırılır ve 3 erkek öğrencide 1 pizzayı paylaşırsa eşit olacağını ifade etmişler. Geriye kalan 1 kız öğrenciye pizza düşmediği için diğer kız katılımcıların paylarından alıp bu kız öğrenciye dağıtınca erkelerin payı kızların payından fazla olur" şeklindeki doğru cevabı kelimelerle ifade etmişlerdir. Diğer taraftan strateji 3 (%11), strateji 4 (%22) ve strateji 6'da (%7) katılımcılar görsel temsilleri tercih etmiştir. Doğru cevap veren ve sözel temsil kullanan katılımcıların %9'u strateji 5, %4'ü ise strateji 7'yi kullanmıştır.

3.3. Katılımcıların Standart Bir Algoritmayla Çözülebilen Problemlerde Kullandıkları Çözüm Stratejileri ve Temsilleri

Standart bir algoritmayla çözülemeyen problemlerden blok örüntü problemi ve tek sayı örüntü problemindeki katılımcı çözümleri incelenmiş ve katılımcıların kullandıkları strateji ve temsillere dair bulgular elde edilmiştir.

3.3.1. Blok Örüntü Probleminin Cevaplarının Analizi

Blok örüntü probleminin cevaplarının analizi çözüm stratejileri ve temsillerinin doğruluğuna odaklanılmıştır. Katılımcıların %71'i 5 basamaklı merdiven için gerekli olan blok sayısını doğru bulmuşlar fakat sadece küçük bir bölümü (%17) 20 basamaklı bir merdiven inşa etmek için gerekli blok sayısını doğru bulmuşlardır. Problemin çözümünde katılımcıların kullandıkları çözüm strateji ve temsilleri Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8. Blok örüntü probleminin çözümünde katılımcıların kullandıkları çözüm strateji ve temsilleri

Strateji ve Temsiller	**Yüzde %**
5 basamaklı merdiven	
Strateji 1: 5 basamaklı merdivenin basamaklarının sırasıyla 1 blok, 2 blok, 3 blok, 4 blok ve 5 bloktan yapıldığını düşünme. Bu nedenle 5 basamaklı merdiven inşa etmek için gerekli olan blok sayısını 1, 2, 3, 4 ve 5'in eklenmesi ile bulma. (1+2+3+4+5=15)	2
Strateji 2: Dört basamaklı bir merdivenin blok sayısını bulma ve 5 basamaklı merdivenin 4 basamaklı bir merdivenin blok sayısından 5 blok daha fazlasına sahip olduğunu fark etme. Bu nedenle 5 basamaklı merdiven inşa etmek için 15.(10+5) blok gerektiğini bulma	45
Strateji 3: Uygun bir şekilde 5 basamaklı merdiveni kağıda çizme ve blok sayısını 15 olarak sayma	15
Strateji 2 ve Strateji 3' aynı anda kullanıp her iki strateji ile doğru sonuç bulma	9
Strateji belirlenmemiş veya hatalı bir strateji kullanmış.	29
20 basamaklı merdiven	
Strateji 1: 20 basamaklı merdivenin 1 blok, 2 blok, 3 blok, ... ve 20 bloktan yapıldığını fark etme. Bu nedenle 20 basamaklı merdiven inşa etmek için gerekli olan blok sayısını 1,2,3,…,20 sayılarının eklenmesi ile bulma. (1+2+3+…+20=210)	3
Strateji 2: n basamaklı blok sayısının (n-1) basamaklı blok sayısından n tane fazla olduğunu fark etme.	14
Strateji 3: Uygun bir şekilde 20 basamaklı merdiveni kağıda çizme ve içindeki blok sayısını 210 olarak sayma	0
Strateji belirlenmemiş veya hatalı bir strateji kullanmış.	83

Tablo 8'de göre katılımcıların %14'ü problemin her iki aşamasında da 2. stratejiyi kullanmışlardır. Yapılan analizlerde bu stratejiyi kullanmak isteyen birkaç kişi daha bulunmakta olduğu, fakat bunlar 1. stratejide olan sayıları sırayla 1+2+3+…+20 toplamını bulmak istedikleri halde arada bazı sayıları ya unutmuş ya da yanlış eklemiştir. Ayrıca 5 basamaklı merdiven için gerekli olan blok sayısını bulmak için kullandıkları 3. stratejinin devamı şeklinde olan ve 20 basamaklı merdiven için gerekli olan blok sayısını bulmak için kullanmaları gereken 3. strateji hiç kimse kullanmamıştır.

5 basamaklı merdiven için gerekli olan blok sayısını bulmak için kullanılan 1. strateji %2 iken, 20 basamaklı merdiven için gerekli olan blok sayısını bulmak için kullanılan 1. strateji bir adım daha artarak %3 olmuştur. Ayrıca hiçbir öğrenci 3. Strateji bağlamında 5 basamaklı merdiven için gerekli olan blok sayısını bulmak için kullanılan merdiven çizimini 20 basamaklı merdiven için gerekli olan blok sayısını bulmak için devam ettirmemiştir.

3.3.2. Tek sayı örüntü probleminin cevaplarının analizi

Tek sayı örüntü probleminde 10. zil çaldığında gelen misafir sayısını katılımcıların %58'i doğru cevaplamıştır. Doğru cevabı veren öğrencilerde iki farklı strateji kullanmıştır.

Öğrencilerden problemin çözümünde her bir kapı zili çaldığında gelen misafir sayısını nasıl bulduğunu açıklamaları veya kuralı yazmaları istendiğinde somut stratejiyi (sözel temsil) kullanan öğrenciler *"İkişer ikişer ekleme, her seferde iki artıyor, tek sayıları saymak, 1,3,5,7,9 … örüntü gider"* gibi söylemler kullanmışlar. Soyut strateji (sayısal temsil) kullananlar da matematiksel olarak $y = 2n - 1$ eklinde soruya cevap vermişlerdir. Kullandıkları ifade de y misafir sayısını ve n ise kaçıncı zilin çaldığını temsil etmektedir. Bu temsili bulduktan sonra 10. zil çaldığında gelen misafir sayısını, n yerine 10 yazıp 19 olarak bulmuşlar. Doğru cevap veren katılımcıların cevapları analiz edildiğinde somut stratejiyi tercih eden öğrenci sayısının çokluğu (%81) göze çarpmaktadır. Soyut stratejiyi kullanan çok az öğrenci (%8.7) olmasına rağmen, geriye kalan öğrenciler (%10.3) verdikleri cevabın doğruluğunu test etme gereksinimi duymuş olmalarından dolayı her iki stratejiyi kullanmışlardır.

Öğrencilere tek sayı örüntü problemi bağlamında "Kaçıncı zil çaldığında 99 misafir gelmiştir?" şeklindeki soruya doğru cevap verenler sadece %25 de kalmıştır. Doğru cevap veren katılımcıların %64'ü somut strateji ile doğru cevabı bulurken, %36'lık kısım soyut stratejiyi kullanmıştır. Ayrıca son soruya doğru cevap verenlerin %24'ü ilk soruyu yanlış ekleme, sayı atlama veya sorunun yanlış anlaşılmasından dolayı yanlış yapmışlardır. y=2n-1 formülünü ilk soruda kullanan hemen hemen bütün öğrenciler son soruyu aynı yöntemle doğru bulmuşlardır.

4. Tartışma

Bu çalışmada 3 ortaokulun 6. sınıf öğrencilerinin standart bir algoritmayla çözülebilen ve çözülemeyen problem çözümlerindeki matematiksel düşünüşleri incelenmiştir.

4.1. Standart Bir Algoritmayla Çözülebilen ve Çözülemeyen Problemleri Çözme Performanslarına Dair Bulguların Tartışması

Genel olarak katılımcıların standart bir algoritma ile çözülebilen problemlerdeki başarı ortalaması, standart bir algoritma ile çözülemeyen problemlerin başarı ortalamasından yüksek çıkmıştır. Bu durum öğrencilerin standart olan bir prosedürü uygulama gerektiren gruba giren problemlerle daha fazla karşılaşmış olmalarından kaynaklanabileceği düşünülebilir. Diğer taraftan standart bir algoritmayla çözülemeyen problemler bir prosedür uygulanmasını gerektirmeyebilir, hatta o problem durumunun keşfi ve problem üzerinde düşünme süreçleri problemin sonucunu bulmayı gerektirebilmektedir. Benzer bir bulguya Soylu ve Aydın (2006) çalışmasında da rastlanmaktadır. Katılımcıların bir prosedüre dayanmayan yani kavramsal bilgiyi gerektiren problemlerdeki başarısızlıklar ve öğrenme zorlukları, öğrencilerde öğretilen konuyla ilgili kavramların anlamlı bir şekilde oluşturulamamasından kaynaklanıyor olabilir. Bu nedenle özellikle temel seviyeden başlayarak matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmeler dengeli bir şekilde verilmelidir. Kavramsal bilgi ile işlemsel bilginin dengelendiği bir matematik öğretimi gerçekleştirmelidir (Bozkurt, 2010; İşleyen ve Işık, 2003; Rittle-Johnson ve Alibali, 1999)

Standart bir algoritma ile çözülebilen bir problem olan alan probleminin ortalamasının en düşük ortalamaya sahip olması dikkat çekicidir. Aslında alan problemi ve tahmin probleminin her ikisi de ölçme ve geometri problemleridir. Alan problemine verilen cevapların analizinde katılımcıların %36'sı alan kavramı ile çevre kavramını birbirine karıştırdıklarını gösteriyor. Bu yüzden problem şeklin alanını bulmalarını isterken öğrenciler çevreyi bulmuşlar. Ayrıca katılımcıların ancak %23'ü tahmin probleminin cevabını doğru olarak bulabilmişlerdir. Bu problemde de alan kavramı ile çevre kavramını birbirine karıştırdıkları için yanlış cevap vermişlerdir. Aslında sayısal veya cebirsel denklemler kullanılarak problemleri çözmek, çizimler veya fiziksel nesneleri kullanarak problemi çözmekten daha verimli ve doğrudur. Yapılan analizler ve çizilen tablolar bu düşüncenin doğruluğunu kanıtlamaktadır.

Standart bir algoritmayla çözülebilen 6 problemin ABD örneklemindeki ortalamaların toplamı 12.85, Çin örneklemindeki ortalamaların toplamı 17.97, Ankara örneklemindeki ortalamaların toplamı 14,84 ve bu çalışmadaki örnekleminin ortalamaların toplamı 10.60'tır. Standart bir algoritmayla çözülemeyen problemlerde ABD örneklemindeki ortalamaların toplamı 14.70, Çin örneklemindeki ortalamaların toplamı 13.59 (Cai, 2000), Ankara örneklemindeki ortalamaların toplamı 11,58 (Karakoca, 2011) ve Türkiye örneklemindeki ortalamaların toplamı 8.52'dir. Bu ortalamalar göz önüne alındığında standart bir algoritmayla çözülebilen problemlerde Ankara örnekleminin ortalaması ABD örnekleminin üzerindedir. Her iki problem durumunda da bu çalışmanın örnekleminin ortalaması en düşüktür. Puanların nicel analizinde diğer örneklemlerde, tek sayı örüntü problemi hariç, bütün problemlerde bu çalışmanın örneklemindeki ortalamadan yüksek çıkmıştır. Standart bir algoritmayla çözülemeyen problemlerde ise Türkiye'deki örneklemler genel olarak diğer ülkelerin ortalamalarının altında kalmıştır. Bu sonuç Türkiye'deki matematik eğitimi bağlamında üzerinde düşünülmesi ve önlemlerin alınması gereken önemli bir bulgudur.

Farklı problemler üzerinde ki performansların farklılığı problemlerin çözümlerinin incelenip analiz edilmesini kaçınılmaz kılmıştır. Bundan dolayı bu problemlerin çözümündeki düşüncelerin kıyaslanması problemlerin doğasının burada gösterilen performans farklılıklarına bağlı olduğunu ortaya çıkarır. Ayrıca bu analizler katılımcıların düşünme ve muhakeme içeren bu problemlerin çözüm anlayışlarını vermektedir (Cai, 2000). Bu yüzden bazı problemler bağlamında problem çözme stratejileri ele alınmıştır. Çözüm süreçlerinin nitel analizi katılımcıların bu problemlerdeki düşünceleri ve çözümleri hakkında derinlemesine bilgi edinmeyi sağlamaktadır.

4.2. Katılımcıların Standart Bir Algoritmayla Çözülebilen Problemleri Çözme Stratejilere Dair Bulguların Tartışması

Katılımcıların %49'u harita oran problemini,%45'i ise pizza oran problemini doğru çözmüştür. Farklı stratejiler kullanarak çözmeye çalışan öğrenciler her iki problemde de oran ve birim kavramlarını çokça kullanmışlardır. Harita oran problemindeki 1. ve 2. stratejide birim kavramı ön plana çıkarken, doğru cevapların %75'ini bu iki stratejiyi kullanarak bulmuşlardır. Bu da yukarda bahsettiğimiz birimin önemini doğrular nitelikteki sonuçlardır. 3. ve 4. stratejiyi kullanan öğrenciler ise oran (oran-orantı, doğru orantı) kavramından bahsetmektedir. Bu kavramı kullanırken kesirler, sayılarla işlemler ve geometriyi problem çözümünün içerisine katarak doğru sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Benzer çözüm stratejilerine sahip olan bu harita oran ve pizza oran problemlerine verilen cevaplarda ölçmeyle ilgili olarak, oran ve birim ön plana çıkan iki kavramdır. İlköğretim matematik öğretim programında yer alan geometri ve ölçme öğrenme alanının doğası gereği matematiksel pek çok kavramla (kesirler, ondalık kesirler, geometri ve sayılarla işlemler vs) ilgilidir. Ölçmeyle ilgili kavramların içselleştirilmesi ve anlamlı öğrenmenin sağlanması için birim kavramı ön plana çıkmaktadır (Wilson ve Rowland, 1993). Birim kavramı ölçülecek nesne veya olguyla ile ölçüm arasında doğrudan bir köprü kurmaktadır (Hiebert, 1981). Bu anlam ile birim kavramı ölçme kavramının altında yatan temel düşünceyi temsil etmektedir. Hiebert'e (1981) göre ölçme kavramının anlamlı olarak öğrenilmesi ve içselleştirilmesi büyük oranda birim kavramının anlaşılması ile ilişkilidir. Bu yönüyle ölçmeye dair problemlerde öğrenci başarısını arttırmak için birim gibi temel kavramların öncelikle kavratılması önemlidir.

Harita oran ve Pizza oran probleminin çözümü için kullanılan temsiller (görsel, sözel ve sayısal temsiller) öğrenmeye zenginlik katacağını daha önce yapılan araştırmalar desteklemektedir. Van De Walle, Karp ve Bay-Williams (2012)'ye göre matematik derslerinde temsillerin kullanımı, matematiksel yeterliliğin önemli bir bileşeni olarak görülmekte ve matematiksel bilginin farklı temsil çeşitleri ile ifade edilebilmesi öğrenme ortamlarında bir zenginlik olarak düşünülmektedir. Ayrıca bu önem İlköğretim Matematik Programı'nda (MEB, 2018) da alana özgü beceriler içersinde "matematiksel kavramların, işlemlerin ve durumların farklı temsil biçimlerini ilişkilendirir, farklı temsil biçimleri arasında dönüşüm yapar" şeklinde belirtilmektedir. Harita oran problemine Türkiye örnekleminin %49'u, ABD örnekleminin %50'si ve Çin örnekleminin %85'i doğru sayısal cevap vermişler. Problemin çözümü için Çin ve Türkiye örnekleminin kullandığı stratejiler ve yüzdelikleri benzerlik göstermesine rağmen, ABD örneklemindeki katılımcıların %15'nin kullandığı strateji farklılık göstermektedir. Bu strateji; Ankara ve Eskişehir arası mesafeyi ölçmek için bir parmak, ataş veya kalem kullanarak standart olmayan bir birim kullanmalarıdır. Diğer stratejiler benzerlik göstermesine rağmen bu farklılığın olması ABD eğitim sistemindeki farklılığın var olduğunu göstermektedir. Pizza oran probleminde Türkiye %45, ABD %42 ve Çin %59'dur. Farklı örneklemlerdeki katılımcıların kullandıkları temsiller farklılık göstermektedir. Türkiye örneklemi temsilleri kullanırken birbirine yakın yüzdelere sahip iken, ABD örnekleminin çoğunluğu (%67) görsel çizimleri kullanmışlar ve Çin örnekleminin çoğunluğu (%68) sayısal sembolleri kullanmışlardır. Ayrıca Çin örnekleminin tamamına yakını (%90) çözüm için 1. stratejiyi (kesirleri karşılaştırma) kullanırken, ABD ve Türkiye örneklemindeki oran çok düşüktür.

4.3. Katılımcıların Standart bir Algoritmayla Çözülemeyen Problemleri Çözme Stratejilere Dair Bulguların Tartışması

Katılımcıların blok örüntü problemine verdikleri çözümler incelendiğinde 5 basamaklı merdiven için gerekli olan blok sayısını çoğunlukla bulmalarına rağmen, devamı niteliğinde olan 20 basamaklı merdiven için gerekli olan blok sayısını kıyaslanmayacak kadar az kişi bulmuştur. Bu durum katılımcıların problemleri geniş bir çerçevede düşünmediklerinin kanıtıdır. Katılımcıların bir matematik problemiyle karşılaştığında onun sadece bir tek doğru çözüm yolu olmadığının farkına varmaları sağlanabilir. Bunun yanında farklı çözüm yolları öğrencileri eleştirel düşünmeye ve keşfetmeye yönelik motive edebilir (Karakuş, 2009).

Blok örüntü problemini doğru çözümünde en düşük oran bu çalışmadaki örnekleme aittir. Bütün örneklemlerdeki katılımcıların 5 basamaklı merdiven için gerekli blok sayısını bulmaktan 20 basamaklı merdiven için gerekli olan blok sayısını bulma sorusuna geçerken yüzdeliklerin belirgin oranda düşmesi paralellik göstermektedir. Benzer durumla tek sayı örüntü probleminde de karşılaşılmaktadır. 10. Zil çaldığında gelen misafir sayısını bulan öğrenci sayısı, "kaçıncı zil çaldığında 99 misafir gelir?" sorusunda bütün örneklemelerde başarı oranı düşmektedir. Bu da genelleme ve bilgi transferinde genel olarak öğrencilerin sıkıntılı olduğunu göstermektedir. Lee'nin (1996) cebir'in ve gerçekte tüm matematiğin, ilişkilerin genelleştirilmesi olduğu görüşü, matematik öğretiminde genelleştirmenin önemini açıkça ortaya koymaktadır. Örüntüler alt öğrenme alanındaki ilişkileri ve genelleştirmeleri formüle etme, son yıllarda ABD'de okul matematik müfredatlarında önemli bir yer tutmaktadır (NCTM, 2000; Zaskis ve Liljedahl, 2002). Ülkemizde ise geliştirilen yeni ilköğretim matematik öğretimi programında örüntüler konusunun önemi: "Matematik, örüntülerin ve düzenlerin bilimidir. Örüntülerin içerdiği ilişkileri keşfetmeleri ve bunları genelleştirmeleri, katılımcıların çevrelerindeki dünyayı daha iyi algılayabilme becerilerinin gelişmesine yardımcı olacaktır. Ayrıca örüntülerin farklı biçimlerde temsil edilmesi ve özellikle sembolik olarak ifade edilmesi cebirin temel kavramlarının oluşmasına önemli katkılar sağlayacaktır (MEB, 2018) şeklinde ifade edilmektedir.

Çalışmanın bulgularından yola çıkarak, öğrencilerin performanslarının düşüklüğünün nedenini, sadece öğrenci kaynaklı olmayabileceğini de (Esendemir, Oğraş, Bingölbali, Özmantar ve Bozkurt, 2010) göz önünde bulundurarak, araştıran çalışmalar yapılabilir. Örneğin Gürbüz ve Güder (2016) çalışmalarındaki örneklemdeki öğretmenlerin farklı çözüm stratejileri geliştirmede eksikleri olduğu kanaatine varmışlardır. Bu bağlamda öğretmenlerin derslerdeki problem çözme süreçleri üzerine çalışmalar yoğunlaştırabilir. Ayrıca öğrencilerin problem çözme süreçlerinde üst bilişsel düşünme becerilerini (Flavell, 1976) harekete geçirecek uygulamalara yer vermek suretiyle öğretim ortamları geliştirilebilir, bu ortamların öğrencilerin problem çözme başarısı, strateji geliştirme ve farklı temsiller kullanabilme becerilerinin gelişimine etkisine bakılabilir.

Kaynaklar

Altun, M. (2008). *İlköğretim ikinci Kademe (6, 7 ve 8. Sınıflarda) Matematik Öğretimi*, 5. Baskı, Bursa: Aktüel Yayınları.

Aydoğdu, T., & Olkun, S. (2004). Elementary school students' successes in choosing an operation for additive word problems. *Eurasian Journal of Educational Research*, *16*(4), 27-38.

Bakeman, R., & Gottman, J. M. (1997). *Observing interaction: An introduction to sequential analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bozkurt, A. (2010). İşçi ve havuz problemleri ile ilgili karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(2), 173-185.

Cai, J. (2000). Mathematical thinking involved in US and Chinese students' solving of process-constrained and process-open problems. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(4), 309-340.

Çelebioğlu, B., & Yazgan, Y. (2009). İlköğretim öğrencilerinin bağıntı bulma ve sistematik liste yapma stratejilerini kullanma düzeyleri. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *22*(1), 15-28.

Esendemir, Ö., Oğraş, A., Bingölbali, E., Özmantar, M. F., & Bozkurt, A. (2010). Matematiksel Problem Çözmede Karşılaşılan Zorluklara İlişkin Öğretmen Görüşleri. IX. *Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Kongresi*, 23-25 Eylül 2010, İzmir.

Fuson, K. C. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multi digit addition, subtraction, and place value. *Cognition and instruction*, *7*(4), 343-403.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence*, 12, 231-235. Hillsdale, N J: Lawrence Erlbaum.

Gürbüz, R., & Güder, Y. (2016). Matematik Öğretmenlerinin Problem Çözmede Kullandıkları Stratejiler. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 17*(2), 371-386.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1996).Instruction, understanding, and skill in multi digit addition and subtraction. *Cognition and instruction*, *14*(3), 251-283.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.) Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. (1981). Children's thinking. *Mathematics Education Research: Implications for the*, *80*, 41-61.

İşleyen, T., & Işık, A. (2003). Conceptual and procedural learning in mathematics. *Research in Mathematical Education*, *7*(2), 91-99.

Karakuş, F. (2009). Matematik tarihinin matematik öğretiminde kullanılması: Karekök hesaplamada Babil metodu. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *3*(1), 195-206.

Karakoca, A. (2011). Altıncı sınıf öğrencilerinin problem çözmede matematiksel düşünmeyi kullanma durumları. *Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi,* Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities, In *Approaches to algebra* (pp. 87-106), Springer, Dordrecht.

MEB, (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar),* Ankara.

Miles, B. M., & Huberman, A. M. (1994).*Qualitative data analysis* (21 ed.). London: Sage Pub.

Morgan, C. T. (1995). *Psikolojiye Giriş* (Çev. Hüsnü Arıcı ve ark.), 11. Baskı, Ankara: Hacettepe Üniversitesi Psikoloji Bölümü yayınları.

NCTM (National Council of Teacher of Mathematics).(2000). Principles and standards for school mathematics. Reston VA: Author.

Polya, G., (1980). On solving mathematical problems in high school. G. Polya içinde, Problem Solving in School Mathematics (pp: 1-2). Reston/VA.: NCTM.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.). *The development of mathematical skills* (pp. 75–110). East Sussex, United Kingdom: Psychology Press.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of educational psychology*, *91*(1), 175-189.

Van De Walle, J., Karp, K. S, & Bay- Williams, J. M. (2012). *İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim*, Çeviri Editörü Soner Durmuş, 7. Basımdan Çeviri, Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Wilson, P. S., & Rowland, R. (1993).Teaching measurement. *Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics*, *30*(1), 171-194.

Soylu, Y., & Aydın, S. (2006). Matematik derslerinde kavramsal ve işlemsel öğrenmenin dengelenmesinin önemi üzerine bir çalışma. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *8*(2), 83-95.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2011). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (8. Baskı) Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics*, *49*(3), 379-402.