ESKİŞEHİR TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ B- TEORİK BİLİMLER

Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology B- Theoretical Sciences

2019, 7(1), syf. 59 - 65, DOI: 10.20290/aubtdb.472075

BEŞİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN CAUDREY-DODD-GIBBON DENKLEMİNE ÇOK ÖLÇEKLİ AÇILIM METODU

Murat KOPARAN *

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Eğitim Fakültesi, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye

ÖZET

Lineer olmayan oluşum denklemleri çok sayıda alanda ortaya çıkan problemlerin matematiksel modelleri için temel oluşturur. Geçmiş yıllarda, uygulamalı matematikte oluşum denklemleri önemli bir yer kazanmıştır. Bu çalışma, lineer olmayan oluşum denklemleri için pertürbasyon yöntemi olarak bilinen çok ölçekli açılım metoduyla ilgilidir. Bu raporda, (1 + 1) boyutlu beşinci mertebeden lineer olmayan Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denkleminin analizi için çok ölçekli açılım metodu uygulanmıştır ve lineer olmayan Schrödinger (NLS) tipi denklemi elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pertürbasyon, Çok ölçekli açılım metodu, Beşinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denklemi

A MULTIPLE SCALES METHOD FOR NONLINEAR THE FIFTH-ORDER CAUDREY-DODD-GIBBON EQUATION

ABSTRACT

Nonlinear evolution equations form the basis for mathematical models of problems arising in numerous areas. Over the past decades, evolution equations have earned a significant place in applied mathematics. This study relates multiple scale method which is known as a perturbation method for nonlinear evolution equations. In this report, a method of multiple scales is presented for the analysis of the (1+1)-dimensional the fifth-order Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) equation and we derive nonlinear Schrödinger (NLS) type equation.

Keywords: Perturbation, Multiple scales method, The fifth-order Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) equation

1. GİRİŞ

Lineer olmayan oluşum denklemleri özellikle de integrallenebilir sistemler, fiziksel fenomenleri tanımlamak ve bazı bilimsel ve mühendislik alanlarında önemli bir rol oynadığı için yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tür denklemler, plazma fiziği, katı hal fiziği, lineer olmayan optikler, akışkanlar mekaniği ve benzeri durumlarda ortaya çıkar [1, 2, 3]. Ayrıca, lineer olmayan oluşum denklemleri çok sayıda alanda ortaya çıkan problemlerin matematiksel modelleri için temel oluşturur. Son zamanlarda, denklemler uygulamalı matematiğin önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir. Bu nedenle lineer olmayan oluşum denklemlerini daha fazla uygulamaya yol açmaktadır.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çoğu tam olarak çözülemeyebilir. Fakat onların yaklaşık çözümleri numerik metotlar ve pertürbasyonlar kullanılarak elde edilebilir. Pertürbasyonlar, küçük ya da büyük bir parametre ya da koordinata göre asimptotik açılımlardır. Doğrudan pertürbasyon metodunda ε ölçek parametresi olmak üzere, verilen bir diferensiyel denklemin çözümünün

$$u(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n}U_{n}(t) \tag{1.1}$$

*Sorumlu Yazar: mkoparan@anadolu.edu.tr
Geliş: 18.10.2018 Kabul: 31.12.2018

şeklinde, ε ölçek parametresinin kuvvet serilerinin formuna sahip olduğu kabulüne dayanır. (1.1) kuvvet serisi, diferensiyel denklemde yerine yazılarak, ε ölçek parametresinin aynı kuvvetten katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle diferensiyel denklemin yaklaşık çözümüne ulaşılır.
Bu çalışmada, [4, 5, 6] çalışmalarda fiziksel olarak açıklanmış (1 + 1) boyutlu beşinci mertebeden lineer olmayan Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denklemine

$$u_t + u_{xxxxx} + 30uu_{xxx} + 30u_x u_{xx} + 180u^2 u_x = 0 \tag{1.2}$$

çok ölçekli açılım metodu uygulanmıştır ve lineer olmayan Schrödinger (NLS) tipi denklemi elde edilmiştir. KdV denkleminin çok ölçekli analizinin NLS denklemine yol açtığı iyi bilinmektedir [7-11]. İlk olarak "Zakharov and Kuznetsov" [7] tarafından önerilen çok ölçekli açılım metodunda, "Zakharov and Kuznetsov" KdV denklemini NLS denklemine indirgemek ve lineer olmayan oluşum denklerinin bir sınıfına uygulamak için bu metodu kullanmışlardır. Bu metodu kullanarak integrallenebilen sistemlerin diğer integrallenebilen sistemlere indirgenebileceğini göstermiştir. Bu çalışmadaki tüm hesaplamalar, Maple paket programı kullanılarak yapılmıştır.

2. ÇOK ÖLÇEKLİ AÇILIM METODU

Bu bölümde, lineer olmayan oluşum denklerinin çok ölçekli analinizi ele alınmıştır. Zakharov ve Kuznetsov [7] tekniği uygulanarak bu metotla KdV tipi denklemlerden NLS tipi denklemlerin elde edilişindeki adımlar gösterilmiştir.

$$u_t = K(u, u_x, u_y ...) \tag{2.1}$$

genel oluşum denklemini göz önünde bulunduralım. Genel lineer olmayan oluşum denklemleri $K[u]$ u ve u' nun x-uzaysal değişkenlerine göre türevlerinin fonksiyonudur. Bu tip denklemlerinin en iyi bilineni KdV denklemidir.
$u_t = L[\partial x, \partial y]u$ $K[u]$'nun lineer kısmı olsun. Bu durumda (2.1) denklemi için dispersiyon ilişkisi bulunur.

$$\begin{aligned} u_k &= Ae^{i(kx+ry-w(k,r)t)} \\ &\equiv Ae^{i\theta} \end{aligned} \tag{2.2}$$

dalga çözüm uzayı (2.1) denkleminin lineer kısmı olan

$$u_t = L[\partial x, \partial y]u \tag{2.3}$$

denkleminde yerine yazılarak

$$w(k, r) = iL[ik, ir] \tag{2.4}$$

dispersiyon ilişkisi elde edilir. (2.4) dispersiyon ilişkisi, (2.1) oluşum denkleminde yerine yazılır. Bir lineer olmayan oluşum denklemi, bu dalga çözüm uzayının genliğini öyle bir yoldan değiştirir ki, bunun

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon\left(x - \frac{dw(k,r)}{dk}t\right) \\ \tau &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{d^2w(k,r)}{dk^2}\right)t \end{aligned} \tag{2.5}$$

yavaş değişkenlerine bağlı olduğu düşünülebilir.

$$u(x,y,t) = U(x,y,t,\xi,\tau) \tag{2.6}$$

dönüşümü ve U fonksiyonunun çözümünün

$$U(x,y,t,\xi,\tau) = (\varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \ldots) \tag{2.7}$$

formunda olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (2.6) dönüşümü ve (2.7) çözümü göz önünde bulundurulup, (2.4) dispersiyon ilişkisi ve (2.5) yavaş değişkenleri kullanılarak (2.1) denklemindeki türevli terimler elde edilir. Elde edilen terimler, (2.6) ve (2.7), (2.1) denkleminde yerine yazılır. İndirgenen denklem ε'nun artan kuvvetlerine göre yazılır. Bu denklemde ε'nun aynı kuvvetten katsayıları sıfıra eşitlenir. Buradan elde edilen denklemler, (2.2) dalga çözüm uzayı ve (2.4) dispersiyon ilişkisi kullanılarak, iterasyon yoluyla çözülür ve NLS tipi denklem elde edilir. Aynı zamanda ele alınan KdV tipi denklemin yaklaşık çözümüne de ulaşılır.

3. UYGULAMA

Bu bölümde, $(1+1)$-boyutlu beşinci mertebeden lineer olmayan Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denklemi (1.2) denklemine çok ölçekli açılım metodu uygulanır. Bu denklemdeki dipersiyon bağıntısını bulmak için (1.2) denkleminin lineer kısmı olan

$$u_t = u_{xxxxx} \tag{3.1}$$

denklemini ele alınır. Burada (3.1) lineer diferansiyel denklemi

$$u(x,t) = e^{i\theta}, \quad \theta = kx - w(k)t \tag{3.2}$$

çözümünü sağlar. (3.2) çözümü, (3.1) lineer diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa,

$$we^{i(kx-wt)} = k^5 e^{i(kx-wt)} \tag{3.3}$$

bulunur ve buradan

$$w(k) = k^5 \tag{3.4}$$

dispersiyon ilişkisi elde edilir. Böylece (3.1) lineer diferansiyel denkleminin çözümü

$$u(x,t) = e^{i(kx-k^5t)} \tag{3.5}$$

olarak elde edilir. (1.2) denkleminin çözümü

$$u(x,t)=U(x,t,\xi,\tau) \quad , \quad U(x,t,\xi,\tau)=\varepsilon U_1+\varepsilon^2 U_2+\varepsilon^3 U_3+\ldots \tag{3.6}$$

formunda olmak üzere yavaş değişkenler,

$$\begin{aligned}
\xi &= \varepsilon\left(x-\tfrac{dw(k)}{dk}t\right) \\
&= \varepsilon(x-5k^4 t) \\
\tau &= -\tfrac{1}{2}\varepsilon^2\left(\tfrac{d^2 w(k)}{dk^2}t\right) \\
&= -10\varepsilon^2 k^3 t
\end{aligned} \tag{3.7}$$

olsun. Bu durumda (1.2) denklemindeki türevli terimler, (3.5-3.7) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
D_x &= \partial_x+\varepsilon\partial_\xi \\
D_t &= \partial_t-5\varepsilon k^4\partial_\xi-10\varepsilon^2 k^3\partial_\tau \\
D_{xx} &= \partial_{xx}+2\varepsilon\partial_{x\xi}+\varepsilon^2\partial_{\xi\xi} \\
D_{xxx} &= \partial_{xxx}+3\varepsilon\partial_{xx\xi}+3\varepsilon^2\partial_{x\xi\xi}+\varepsilon^3\partial_{\xi\xi\xi} \\
D_{xxxx} &= \partial_{xxxx}+4\varepsilon\partial_{xxx\xi}+6\varepsilon^2\partial_{xx\xi\xi}+4\varepsilon^3\partial_{x\xi\xi\xi}+\varepsilon^4\partial_{\xi\xi\xi\xi} \\
D_{xxxxx} &= \partial_{xxxxx}+5\varepsilon\partial_{xxxx\xi}+10\varepsilon^2\partial_{xxx\xi\xi}+10\varepsilon^3\partial_{xx\xi\xi\xi} \\
&\quad +5\varepsilon^4\partial_{x\xi\xi\xi\xi}+\varepsilon^5\partial_{\xi\xi\xi\xi\xi}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.6) ve (3.8) eşitlikleri kullanılarak, (1.2) denkleminde yerine yazılır ve ε'un artan kuvvetlerine göre elde edilir. Bu denklemde ε'un aynı kuvvetten katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\varepsilon \ : \ u_{1t}+u_{1xxxxx}=0 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \ : \ & u_{2t}-5k^4 u_{1\xi}-30u_1 u_{1xxx}-30u_{1x}u_{1xx} \\
& -u_{2xxxxx}-5u_{1\xi xxxx}=0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^3 \quad : \quad & u_{3t} - 5k^4 u_{2\xi} - 10k^3 u_{1\tau} - 180u_1^2 u_{1x} - 10u_{1\xi\xi xx} \\ & - 30u_1(u_{2xxx} + 3u_{1\xi xx}) - 30u_2 u_{1xxx} - u_{3xxxxx} \\ & - 30u_{1x}(u_{2xx} + 2u_{1\xi x}) - 30(u_{2x} + u_{1\xi})u_{1xx} - 5u_{2\xi xxxx} = 0\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\vdots$$

denklemleri elde edilir. (3.9) denkleminin çözümü v_{-1} , v_1’ in kompleks eşlenik olmak üzere,

$$u_1(x,t,\xi,\tau) = v_1(\xi,\tau)e^{i(kx-k^5t)} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^5t)} \tag{3.12}$$

olarak bulunur. Bu çözüm (3.10) denkleminde yerine yazılırsa, $f_1(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere (3.10) denkleminin çözümü

$$u_2(x,t,\xi,\tau) = v_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^5t)} + v_{-2}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^5t)} + f_1(\xi,\tau) \tag{3.13}$$

formundadır. Böylece v_{-1} , v_1’ in kompleks eşleniği ve v_{-2} , v_2’nin kompleks eşleniği olmak üzere,

$$v_2(\xi,\tau) = \frac{30v_1^2(\xi,\tau)}{17k^2} \quad , \quad v_{-2}(\xi,\tau) = \frac{30v_{-1}^2(\xi,\tau)}{17k^2} \tag{3.14}$$

bulunur. (3.12), (3.13) ve (3.14) çözümleri (3.11) denkleminde yerine yazılırsa bu denklemin çözümü $f_2(\xi,\tau)$ ve $f_3(\xi,\tau)$ integrasyon sabiti olmak üzere,

$$\begin{aligned}u_3(x,t,\xi,\tau) &= v_3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^5t)} + v_{-3}(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^5t)} \\ &\quad + f_2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^5t)} + f_3(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^5t)}\end{aligned} \tag{3.15}$$

formundadır. Böylece v_{-3} , v_3’ün kompleks eşleniği olmak üzere

$$v_3(\xi,\tau) = \frac{1740v_1^3(\xi,\tau)}{697k^4} \quad , \quad v_{-3}(\xi,\tau) = \frac{1740v_{-1}^3(\xi,\tau)}{697k^4} \tag{3.16}$$

ve f_1 , f_2 ve f_3 integrasyon sabitleri

$$\begin{aligned} f_1(\xi,\tau) &= -\frac{102v_1v_{-1}}{k^2} \\ f_2(\xi,\tau) &= -\frac{720iv_{-1}v_{-1\xi}}{289k^3} \\ f_3(\xi,\tau) &= \frac{720iv_1v_{1\xi}}{289k^3}\end{aligned} \tag{3.17}$$

olarak bulunur. Böylece (3.9) - (3.10) denklemlerinin yaklaşık çözümü,

$$\theta = \left(kx - k^5 t\right) \tag{3.18}$$

için

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1(\xi,\tau)e^{i\theta} + v_{-1}(\xi,\tau)e^{-i\theta} \\
u_2 &= k^{-2}(-102v_1(\xi,\tau)v_{-1}(\xi,\tau) + \tfrac{30}{17}(v_1^2(\xi,\tau)e^{2i\theta} + v_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i\theta})) \\
u_3 &= k^{-3}(-\tfrac{720}{289}iv_{-1}(\xi,\tau)v_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i\theta} + \tfrac{720}{289}iv_1(\xi,\tau)v_{1\xi}(\xi,\tau)e^{2i\theta}) \\
&\quad + \tfrac{1740}{697}k^{-4}(v_1^3(\xi,\tau)e^{3i\theta} + v_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i\theta})
\end{aligned} \tag{3.19}$$

olarak elde edilir. Son olarak (3.19) çözümlerini (3.11) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1 v_{-1} \\
iv_{1\tau} &= v_{1\xi\xi} - \tfrac{2}{k^2}v_1\left|v_1\right|^2
\end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. $q = \frac{v_1}{k}$ ve $q_{-1} = \frac{v_{-1}}{k}$ olarak tanımlanırsa (3.20) denkleminden

$$iq_\tau = q_{\xi\xi} - 2q\left|q^2\right| \tag{3.21}$$

$(1+1)$-boyutlu NLS tipi denklemler elde edilir. Böylece q NLS denkleminin çözümü olmak üzere (1.2) (1 + 1) boyutlu beşinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denkleminin yaklaşık çözümü.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \varepsilon k(q(\xi,\tau)e^{i(kx-k^5t)} + q_{-1}(\xi,\tau)e^{-i(kx-k^5t)}) \\
&\quad + \varepsilon^2(-102q(\xi,\tau)q_{-1}(\xi,\tau) + \tfrac{30}{17}q^2(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^5t)} \\
&\quad + \tfrac{30}{17}q_{-1}^2(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^5t)}) + k\varepsilon^3(-\tfrac{720}{289}iq_{-1}(\xi,\tau)q_{-1\xi}(\xi,\tau)e^{-2i(kx-k^5t)} \\
&\quad + \tfrac{720}{289}iq(\xi,\tau)q_\xi(\xi,\tau)e^{2i(kx-k^5t)}) \\
&\quad + \tfrac{1740}{697}k\varepsilon^3(q_1^3(\xi,\tau)e^{3i(kx-k^5t)} + q_{-1}^3(\xi,\tau)e^{-3i(kx-k^5t)})
\end{aligned} \tag{3.22}$$

olarak bulunur.

4. SONUÇ

Doğrusal olmayan oluşum denklemlerini çözmek için güçlü çok ölçekli açılım metodu uyguladık. Ayrıca beşinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denkleminin çözümlerini ve beşinci mertebeden Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) denklemi ve NLS denklemi arasındaki ilişkiyi araştırdık. Bu çalışmada, sadece NLS tipi denklemlerin KdV tipi denklemlerden nasıl elde edildiğini ve çözümlerinin çok ölçekli açılım metodunun nasıl kullandığını inceledik. Son olarak, önerilen bu yöntemlerin uygulanmasının aslında çok basit ve anlaşılır olduğunu belirtmek ilginçtir. Aynı zamanda elde edilen çözümler, numerik hesaplamalar için temel teşkil edecektir. Ayrıca, NEEE, diferansiyel fark denklemleri ve kesirli diferansiyel denklemler gibi birçok başka denkleme de uygulanabilir.

KAYNAKÇA

[1] Hasegawa A. Plasma Instabilities and Nonlinear Effects. Berlin, Springer-Verlag, 1975.

[2] Eilenberger G. Solitons. Berlin, Springer-Verlag, 1983.

[3] Whitham G. Linear and Nonlinear Waves. New York, Wiley, 1974.

[4] Aiyer RN, Fuchssteiner B, Oevel W. Solitons and Discrete Eigen functions of the Recursion Operator of Nonlinear Evolution Equations: The Caudrey-Dodd- Gibbon-Sawada-Kotera Equations. Journal of Physics A: Mathematical and General 1986; 19: 3755-3770.

[5] Caudrey PJ, Dodd RK, Gibbon JD. A new heirarchy of Korteweg-de Vries equations. Proc. Roy. Soc. Lond. A 1976; 351: 407- 422.

[6] Dodd RK, Gibbon JD. The prolongation structure of a higher order Korteweg-de Vries equations. Proc. Roy. Soc. Lond. A 1977; 358: 287-300.

[7] Zakharov V, Kuznetsov EA. Multiscale expansions in the theory of systems integrable by the inverse scattering transform, Physica D 1986; 18: 455-463.

[8] Calegora F, Degasperis A, Xiaosdo Ji. Nonlinear Schrödinger-type equations from multiscale reduction of PDEs I. Systematic derivation. J Math Phys 2001; 42: 2635-2652.

[9] Degasperis A, Manakov SV, Santini PM. Multiple-scale perturbation beyond nonlinear Schrödinger equation I. Physica D 1997; 100: 187-211.

[10] Osborne AR, Boffetta G. The shallow water NLS equation in Lagrangian coordinates. Phys Fluid A 1989; 1: 1200-1210.

[11] Osborne AR, Boffetta G. A. Summable multiscale expansion for the KdV equation. In: Degasperis A, Fordy AP, Lakshmanan M, editors. Nonlinear evolution equations. Integrability and spectral Methods. MUP, Manchester and New York, 1991 pp. 559-571.