**ESKİŞEHİR TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BİLİM VE TEKNOLOJİ DERGİSİ B- TEORİK BİLİMLER**

Eskişehir Technical University Journal of Science and Technology B- Theoretical Sciences

2019, 7(1), syf. 75 - 80, DOI: 10.20290/aubtdb.456116

# SA MODÜLLER KULLANILARAK BAZI ÇOK BİLİNEN HALKALARIN KARAKTERİZASYONU

**Özgür TAŞDEMİR** *

Trakya Üniversitesi, Edirne, Türkiye

## ÖZET

Bir *R* halkası üzerinde tanımlı bir *M* modülü, hem SIP hem de ADS özelliklerine sahipse, bu *M* modülüne SA modül dendiğini biliyoruz. Bu çalışmada, her SA modülün aynı zamanda SSP özelliğine de sahip olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, eğer bir *R*-modül, injektif ve asal ise SSP özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir. Bunlara ek olarak, çok bilinen bazı halkalar, SA modüller yardımıyla karakterize edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** SA-modül, SIP, SSP, Yarıbasit, V-halka

## CHARACTERIZATION OF SOME WELL-KNOWN RINGS BY USING SA MODULES

## ABSTRACT

Recall that an R-module M is an SA module if M satisfies both SIP and ADS property. In this study, it is proved that every SA module has the SSP, and also proved that if an R-module M is both injective and prime then M has the SSP. Additionally, some well-known rings are characterized by using SA modules.

**Keywords:** SA-module, SIP, SSP, Semisimple, V-ring

## 1. GİRİŞ

Bu çalışma boyunca, tüm halkalar değişmeli ve birimli olup, $R$ böyle bir halkayı ifade edecektir. Modüller birimseldir ve bir değişmeli grup $M$ için $M_R$ sağ $R$-modülü gösterecektir. Çalışmamızda açıklanmamış terminoloji ve aşağıda verilen tanımlara ilişkin ayrıntılı bilgi için [3] ve [5] kitapları okuyucuya önerilmektedir. Bir $X$ alt kümesinin (sırasıyla, bir x elemanının) bir $M$ $R$-modülünde *sağ sıfırlayıcısı (annihilator)* $r(X)$ (sırasıyla, $r(x)$) ile gösterilecektir. $R$ bir halka ve $n$ bir pozitif tamsayı olmak üzere, $M_n(R)$, $nxn$'lik full matris halkalarını gösterecektir.

**Tanım 1.1.** Bir $M$ modülünün $A$ ve $B$ alt modülleri için $A + B = M$ ve $A \cap B = 0$ koşulları sağlanıyorsa $A$ alt modülüne $M$ modülünün bir *dik toplananı (direct summand)* denir ve $A \subseteq^{\oplus} M$ ile gösterilir. Bu durumda $B$ de bir dik toplanandır.

Günümüzde dik toplananlığa bağlı yeni tanımlar yapılarak bu anlamda birçok çalışmalar yapılmaktadır [1, 4, 7, 8, 10, 11].

SIP özelliğine sahip modüller ilk olarak Wilson [16] tarafından 1986 yılında tanımlanmıştır.

**Tanım 1.2.** Bir $M$ modülünün herhangi iki dik toplananının arakesiti yine $M$ de bir dik toplanan ise $M$ modülü *SIP (Summand Intersection Property)* özelliğine sahiptir, denir. $R$ bir halka olmak üzere $R_R$

*Sorumlu Yazar: ozgurtasdemir@trakya.edu.tr
Geliş: 30.08.2018 Kabul: 02.01.2019

modülü SIP özelliğine sahip ise $R$ halkası SIP özelliğine sahiptir denir. Yani; $R$ nin her $e, f$ idempotent elemanları için $eR \cap fR = gR$ olacak şekilde $R$ nin bir $g$ idempotent elemanı vardır.

SIP özelliğine sahip modüllerin duali olan SSP özelliğine sahip modüller, Garcia [7] tarafından 1989 yılında tanımlamıştır.

**Tanım 1.3.** Bir $M$ modülünün herhangi iki dik toplananının toplamı yine $M$ de bir dik toplanan ise $M$ modülü *SSP (Summand Sum Property)* özelliğine sahiptir, denir. $R$ bir halka olmak üzere $R_R$ modülü SSP özelliğine sahip ise $R$ halkası SSP özelliğine sahiptir denir. Yani; $R$ halkasının her $e, f$ idempotent elemanları için $eR + fR = gR$ olacak şekilde $R$ halkasının bir $g$ idempotent elemanı vardır.

**Teorem 1.4.** [1, Teorem 8] Bir $M$ modülünün SSP özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul her $M = A \oplus B$ ayrışımı ve her $f: A \to B$ homomorfizması için $Im(f)$ nin $B$ nin bir dik toplananı olmasıdır.

**Tanım 1.5.** $M$ bir $R-$modül ve $A$, $M$ modülünün bir alt modülü olsun. $A \cap B = 0$ özelliğine göre maksimal olan $M$ modülünün bir $B$ alt modülüne $A$'nın $M$'deki *tümleyeni (complement)* denir.

ADS özelliği ilk Abelian gruplar için Fuchs [6] tarafından ifade edilmiştir.

**Tanım 1.6.** $M$ bir $R$-modül olsun. Eğer her $M = A \oplus B$ ayrışımı ve $A$ dik toplananının $M$ modülündeki her $C$ tümleyeni için $M = A \oplus C$ oluyorsa $M$ modülü $ADS$ ($absolute\ direct\ summand$) özelliğine sahiptir, denir.

**Tanım 1.7.** $M$ bir $R-$modül ve $A$ ve $B$, $M$ modülünün herhangi iki dik toplananı olsun. $A \cap B = 0$ iken $A \oplus B \subseteq^{\oplus} M$ oluyorsa $M$ modülü $(C_3)$ özelliğini sağlar denir.

## 2. SA MODÜLLER

SA modüller Takıl Mutlu [13] tarafından tanımlanmıştır (Ayrıca, bkz [14,15]).

**Tanım 2.1.** Eğer bir $M$ modülü hem SIP hem de ADS özelliklerine sahip ise bu $M$ modülüne SA modül denir.

Tanımdan da görüleceği üzere SA modüller hem SIP hem de ADS özelliklerine sahiptir. Bizde, Sonuç 2.3'te SA modüllerin aynı zamanda SSP özelliğine de sahip olduğunu gösterdik.

**Lemma 2.2.** [1, Lemma 19] Bir $M$ modülü $(C_3)$ özelliğini sağlasın. Bu durumda, $M$ modülü SIP özelliğine sahip ise $M$ modülü SSP özelliğine sahiptir.

Lemma 2.2'nin bir sonucu olarak, Sonuç 2.3 elde edilir.

**Sonuç 2.3.** Her SA modül SSP özelliğine sahiptir.

**Kanıt.** M bir SA modül olsun. SA modül tanımından, M modülü ADS özelliğine sahiptir. [12, Teorem 2.7]'den M modülü $(C_3)$ özelliğine sahiptir. Böylece Lemma 2.2'den M modülünün SSP'ye sahip olduğu görülür.

**Sonuç 2.4.** Bir $M$ modülü SA özelliğine sahip olsun. Bu durumda, her $\mathrm{M} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{B}$ ayrışımı ve her $\mathrm{f}: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ homomorfizması için $\mathrm{Im(f)}$, B altmodülünün bir dik toplananıdır.

**Kanıt.** Sonuç 2.3 ve Teorem 1.4'ten açıkça görülür.

Sonuç 2.3'ün tersi her zaman doğru değildir. Sıradaki örnekte, SSP özelliğine sahip olan ancak SA özelliğine sahip olmayan bir modül verilmiştir.

**Örnek 2.5**. *$F$ bir cisim* ve $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ *olsun.* $N = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{F} \\ 0 & \mathrm{F} \end{bmatrix}$ *ve* $L = \begin{bmatrix} \mathrm{F} & \mathrm{F} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *sağ $R$-modüllerdir*. $M = R/L$ *ve* $\mathrm{U} = \mathrm{N} \oplus \mathrm{M}$ *olsun. [7, s.81]'den* U, *SSP özelliğine sahiptir. $U$ nun bir SA modül olmadığı [13, Örnek 2.3]'te gösterilmiştir*.

Hamdouni, Özcan ve Harmancı [8, Önerme 2.1]'de injektif ve asal modüllerin SIP özelliğine sahip olduğunu kanıtlamıştır. Biz aşağıdaki sonuçta, injektif ve asal modüllerin aynı zamanda SSP özelliğine de sahip olduğunu kanıtladık. Öncelikle asal modül tanımını verelim. $M$ bir $R$-modül olsun. $M$ modülünün sıfırdan farklı her $x$ ve $y$ elemanları için $r(x) = r(y)$ oluyorsa $M$ modülüne *asal (prime)* $R$-modül denir.

**Sonuç 2.6.** Bir $M$ modülü injektif ve asal ise SSP özelliğine sahiptir.

**Kanıt.** $M$ bir $R$-modül olsun. [13, Önerme 2.16]'da $M$ injektif ve asal ise $M$ modülü SA özelliğine sahip olduğu kanıtlanmıştır. Dolayısıyla, Sonuç 2.3'den $M$ modülü SSP özelliğine sahiptir.

Sonuç 2.6'nın tersi doğru değildir. SSP özelliğine sahip olan fakat ne injektif ne de asal olan bir $\mathbb{Z}$-modül örneği sıradaki örnekte verilmiştir.

**Örnek 2.7.** $M = {}^{\mathbb{Z}}/_{6\mathbb{Z}}$ bir $\mathbb{Z}$-modül olarak düşünüldüğünde, açıkça görülür ki, $M$ modülü yarıbasit bir modüldür. Dolayısıyla $M$ modülü SSP özelliğine sahiptir. Ancak $M$ bir bölünebilir değişmeli bir grup olmadığından $M$ injektif değildir. Şimdi $\overline{2}, \overline{3} \in M$ alalım. $r(\overline{2}) = 3\mathbb{Z}$ *ve* $r(\overline{3}) = 2\mathbb{Z}$ olduğundan $M$ asal değildir.

## 3. SA MODÜLLER YARDIMIYLA BAZI HALKALARIN KARAKTERİZASYONU

$R$ bir halka olsun. $R$ yarıbasittir ancak ve ancak her $R$-modül injektiftir ancak ve ancak her $R$-modül yarıbasittir [17, 20.3]. Her basit R-modül injektif ise $R$ halkasına *V-halka (V-ring* or *co-semisimple)* denir [17].

Herhangi iki SA modülün bir diktoplamının yine bir SA modül olmak zorunda olmadığını belirtelim [13, Örnek 2.8] ve yarıbasit halkaların karakterize edildiği sıradaki teoremi kanıtlayalım:

**Teorem 3.1.** Herhangi bir $R$ halkası için aşağıdakiler denktir:

- ***(i)*** $R$ bir yarıbasit halkadır;
- ***(ii)*** Her $R$-modül bir SA modüldür;
- ***(iii)*** Herhangi iki SA modülün diktoplamı yine bir SA modüldür;
- ***(iv)*** Bir projektif $R$-modülün her alt modülü bir SA modüldür;
- ***(v)*** $R \oplus R$ nin her alt modülü bir SA modüldür;
- ***(vi)*** Bir injektif $R$-modülün her alt modülü bir SA modüldür.

**Kanıt.** $(\boldsymbol{i}) \Rightarrow (\boldsymbol{ii})$: $R$ bir yarıbasit halka olsun. Bu durumda her $R$-modül injektiftir ve bundan dolayı her **R**-modül ADS özelliğine sahiptir. Aynı zamanda, $R$ halkası yarıbasit olduğundan, her $R$-modül yarıbasittir ve bundan dolayı SIP özelliğine sahiptir. Dolayısıyla her $R$-modül hem SIP hem de ADS özelliklerine sahip olur, yani, her $R$-modül SA modüldür.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Her $R$-modül SA modül olsun. Şimdi her $R$-modülün yarıbasit olduğu göstereceğiz. $M$ bir $R$-modül ve $N$, $M$ modülünün bir alt modülü olsun. $(ii)$'den $N \oplus M$ bir SA modüldür. $i: N \to M$ bir içerim dönüşümü (inclusion map) olsun. Bu durumda, Sonuç 2.4'ten $i(N) = N \subseteq^{\oplus} M$ olur. Bu da demektir ki, her $R$-modül yarıbasittir. Yani, $R$ bir yarıbasit halkadır.

$(\boldsymbol{i}) \Rightarrow (\boldsymbol{iii})$, $(\boldsymbol{i}) \Rightarrow (\boldsymbol{iv}) \Rightarrow (\boldsymbol{v})$ $\boldsymbol{ve}$ $(\boldsymbol{i}) \Rightarrow (\boldsymbol{vi})$: *Açıktır.*
$(\boldsymbol{iii}) \Rightarrow (\boldsymbol{i})$, $(\boldsymbol{v}) \Rightarrow (\boldsymbol{i})$ ve $(\boldsymbol{vi}) \Rightarrow (\boldsymbol{i})$: SA modüller SSP özelliğini sağladığı için ve dolayısıyla $(C_3)$ özelliğini sağladığı için [2, Önerme 2.12]'den sonuç görülür.

**Tanım 3.2.** [17, s.114] $M$ bir $R$-modül olsun. Her $\delta: N \to \prod_{\Lambda} U_\lambda$ $(R - Mod'da)$ monomorfizması için

$$N \xrightarrow{\delta} \prod\nolimits_{\Lambda} U_\lambda \xrightarrow{\pi_E} \prod\nolimits_{E} U_\lambda$$

monic olacak şekilde bir sonlu $E \subset \Lambda$ alt kümesi varsa $M$ $R$-modülüne *sonlu eş-üretilmiş* modül denir.

**Tanım 3.3.** [17, s.248] M bir R-modül olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa bir $X \in \sigma[M]$ modülüne $\sigma[M]$'de *sonlu eş-sunulan (finitely copresented)* modül denir:

- ***(i)*** $X$ sonlu eş-üretilmiştir;
- ***(ii)*** $L$ sonlu eş-üretilmiş olmak üzere $\sigma[M]$'deki her $0 \to X \to L \to N \to 0$ tam dizisinde $N$ modülü de sonlu eş-üretilmiştir.

Bir $\boldsymbol{R}$ halkası bir sağ V-halkadır. ⇔ Her sonlu eş-üretilmiş $R$-modül injektiftir. ⇔ Her sonlu eş-üretilmiş $R$- modül yarıbasittir [17, 23.1]. ⇔ Her sonlu eş-sunulan $R$-modül injektiftir. ⇔ Her sonlu eş-sunulan $R$-modül yarıbasittir [17, 31.7].

**Teorem 3.4.** Herhangi bir $R$ halkası için aşağıdakiler denktir:

- ***(i)*** $R$ bir sağ V-halkadır;
- ***(ii)*** Her sonlu eş-üretilmiş $R$-modül SA modüldür;
- ***(iii)*** Her sonlu eş-sunulan $R$-modül SA modüldür.

**Kanıt.** $(\boldsymbol{i}) \Rightarrow (\boldsymbol{ii})$: Eğer $R$ bir sağ V-halka ise her sonlu eş-üretilmiş $R$-modül injektiftir [17, 23.1] ve her sonlu eş-üretilmiş $R$-modül yarıbasittir. Dolayısıyla, her sonlu eş-üretilmiş $R$-modül SA özelliğine sahiptir.
$(\boldsymbol{ii}) \Rightarrow (\boldsymbol{iii})$: *Açıktır.*
$(\boldsymbol{iii}) \Rightarrow (\boldsymbol{i})$: Her sonlu eş-sunulan $R$-modül SA modül olsun. Her sonlu eş-sunulan $R$-modülün injektif olduğunu göstereceğiz. Bu durumda, $E(M)$ ve $E(M)/M$ sonlu eş-sunulan $R$-modüllerdir. [17, 30.2(3)]'den $M \oplus E(M)$ bir sonlu eş-sunulan $R$-modüldür ve $(\boldsymbol{iii})$'den SA modüldür. $i: M \to E(M)$ bir içerim dönüşümü olsun. Bu durumda, Sonuç 2.4'ten $i(M) = M \subseteq^{\oplus} E(M)$ olur. $M$ injektiftir. [17, 31.7]'den $R$ bir V-halkadır.

Sıradaki önermede aşağıda tanımladığımız $(*)$ özelliğini kullanacağız.
$(*)$ $M_i$'ler SA $R$-modüller iken $\bigoplus M_i$'de SA $R$-modüldür.

**Önerme 3.5.** Eğer bir $R$ halkası $(*)$ özelliğini sağlıyorsa $R$ bir sağ V-halkadır.

**Kanıt.** $M$ bir sonlu eş-üretilmiş $R$-modül olsun. [17, 21.3(2)]'den $M$ ayrıştırılamaz $R$-modüllerin bir diktoplamıdır. Ayrıştırılamaz modüller SIP ve ADS özelliklerine sahip olduğundan SA modüldür. Hipotezden $M$ bir SA modüldür. Teorem 3.4'ten $R$ bir V-halkadır.

**Önerme 3.6.** Herhangi bir $R$ halkası için aşağıdakiler denktir:

- ***(i)*** $R$ halkası $(*)$ özelliğine sahip bir sağ Noetherian halkadır;
- ***(ii)*** $R$ yarıbasittir.

**Kanıt.** $(\boldsymbol{i}) \Rightarrow (\boldsymbol{ii})$: $R$ halkası $(*)$ özelliğine sahip bir sağ Noetherian halka ve $M$ bir injektif $R$-modül olsun. $R$ bir sağ Noetherian halka olduğundan ayrıştırılamaz modüllerin bir diktoplamıdır.

Ayrıştırılamaz modüller SA özelliğine sahip olduğundan ve $(*)$ özelliğinden $M$ bir SA modüldür. Dolayısıyla $M$ modülü SIP özelliğine sahiptir. [8, Teorem 4.10]'dan $R$ halkası yarıbasittir.

$(\boldsymbol{ii}) \Rightarrow (\boldsymbol{i})$: $R$ bir yarıbasit halka olsun. Bu durumda her $R$-modül injektiftir ve bundan dolayı her $R$-modül ADS özelliğine sahiptir. Aynı zamanda her $R$-modül yarıbasittir ve bundan dolayı SIP özelliğine sahiptir. Dolayısıyla her $R$-modül hem SIP hemde ADS özelliklerine sahip olur, yani, her $R$-modül SA modüldür.

$R$ bir halka olsun. $R$ halkasının her sağ ideali projektif ise $R$ halkasına *sağ hereditary* halka denir. Bir $R$ halkasının sağ hereditary halka olması için gerek ve yeter koşul her injektif $R$-modülün SSP özelliğine sahip olmasıdır [1, Teorem 10].

**Önerme 3.7**. $R$ bir halka olsun. Eğer $R$ halkası $(*)$ özelliğine sahip bir sağ Noetherian halka ise $R$ bir sağ hereditary sağ V-halkadır.

**Kanıt.** $M$ bir injektif $R$-modül olsun. $R$ halkası bir sağ Noetherian halka olduğundan $M$ ayrıştırılamaz modüllerin bir diktoplamıdır. $(*)$ özelliğinden $M$ modülünün bir SA modül olduğu açıktır. Sonuç 2.3'ten $M$ modülü SSP özelliğine sahiptir. [1, Teorem 10]'dan $R$ bir sağ hereditary halkadır.

**Teorem 3.8.** Aşağıdakiler denktir:

- ***(i)*** $R$ bir regular halkadır;
- ***(ii)*** $M_2(R)$ nin her esas sağ ideali bir SA modüldür;
- ***(iii)*** Bir köşegen matris tarafından üretilen $M_2(R)$ nin her esas sağ ideali bir SA modüldür;
- ***(iv)*** Bir projektif sağ $R$-modülün her sonlu üretilmiş alt modülü bir dik toplanandır;
- ***(v)*** Bir projektif sağ $R$-modülün her sonlu üretilmiş alt modülü bir SA modüldür;
- ***(vi)*** Bir projektif sağ $R$-modülün her sonlu 2-üretilmiş alt modülü bir SA modüldür.

Kanıt. $(\boldsymbol{i}) \Rightarrow (\boldsymbol{ii})$: R bir regular halka olsun. Regular olmak bir Morita invariant özellik olduğu için, herhangi bir $n$ pozitif tamsayısı için $nxn$'lik full matris halkaları $M_n(R)$ bir regular halkadır ve yarıbasittir. Bu yüzden $M_2(R)$ bir SA modüldür [14, s.2]. SA modüllerin dik toplananları bir SA modül olduğundan, $M_2(R)$ halkasının her esas sağ ideali bir SA modüldür.
$(\boldsymbol{ii}) \Rightarrow (\boldsymbol{iii})$: Açıktır.
$(\boldsymbol{i}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{iv})$: Bu Kaplansky'nin çok bilinen bir sonucudur [9, Lemma 4].
$(\boldsymbol{iv}) \Rightarrow (\boldsymbol{v}) \Rightarrow (\boldsymbol{vi})$: Açıktır.
$(\boldsymbol{iii}) \Rightarrow (\boldsymbol{i})\ \boldsymbol{ve}\ (\boldsymbol{vi}) \Rightarrow (\boldsymbol{i})$: SA modüller SSP özelliğini sağladığı için ve dolayısıyla $(C_3)$ özelliğini sağladığı için [2, Teorem 2.13]'den sonuç görülür.

## KAYNAKÇA


[1] Alkan M, Harmancı A. On summand sum and summand intersection property of modules. Turk J. Math 2002; 26: 131-147.

[2] Amin I, Ibrahim Y, Yousif M. C3-Modules. Algebra Colloquium. 2015; 22(4): 655-670.

[3] Anderson FW, Fuller KR. Rings and Categories of Modules. New York, USA: Springer-Verlag, 1974.

[4] Birkenmeier GF, Karabacak F. Tercan A. When is the SIP (SSP) property inherited by free modules. Acta Math Hung. 2006: 112(1-2); 103-106.

[5] Dung NV, Huyn DV, Smith PF, Wisbauer R. Extending Modules. London, UK: Longman, 1990.

[6] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Academic Press, New York, USA: 1970.

[7] Garcia JL. Properties of direct summands of modules. Comm. Algebra 1989; 17(1): 73-92.

[8] Hamdouni A., Ozcan AC, Harmancı A. Characterization of modules and rings by the summand intersection property and the summand sum property, JP J. Algebra Number Theory Appl. 2005; 5(3): 469–490.

[9] Kaplansky I. Projective modules, *Annals of Mathematics* (Ser. 2) 1958; 68: 372-377.

[10] Karabacak F, Tercan A. Matrix rings with the summand intersection property. Czech Math J. 2003; 53(3): 321-326.

[11] Karabacak F, Tercan A. On modules and matrix rings with SIP-extending. Taiwanese J. Math. 2007; 11 (4): 1037-1044.

[12] Quyn TC, Koşan MT. On ADS modules and rings. Comm. Algebra. 2014; 42: 3541-3551.

[13] Takıl Mutlu F. On ADS-modules with the SIP. Bull. Iranian Soc. 2015; 41: 1355-1363.

[14] Takıl Mutlu F. On free modules with the SA property. AKU J. Sci. Eng. 2016; 021302: 247-249.

[15] Takıl Mutlu F. On matrix rings with the SIP and the Ads, Turk J Math 2018; 42: 2657–2663.

[16] Wilson GV. Modules with on the direct summand intersection property. Comm. Algebra 1986; 14: 21-38.

[17] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory, Gordon and Breach, Philadelphia, 1991.