Araştırma Makalesi / *Research Article* **Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 9(2): 1082-1089, 2019**
Matematik / Mathematics ***Journal of the Institute of Science and Technology*, 9(2): 1082-1089, 2019**

DOI: 10.21597/jist.486275 **ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618**

3-Boyutlu Minkowski Uzayında Timelike Binormalli Spacelike Eğrinin Tabii Liftini Asimptotik Kabul Eden Yüzey Ailesi

Evren ERGÜN[1] Ergin BAYRAM[2*]

ÖZET: γ timelike binormalli spacelike bir eğri, $\bar{\gamma}$ ise γ nın tabii lifti olsun. Bu çalışmada, 3 boyutlu Minkowski uzayında $\bar{\gamma}$ yi ortak asimptotik eğri kabul eden yüzey ailesi elde edildi. $\bar{\gamma}$ nin oluşturulan yüzeyler üzerinde asimptotik eğri olması için gerekli şartlar bulundu. Bazı örnekler verildi.

Anahtar Kelimeler: Yüzey Ailesi, Tabii Lift, Asimptotik Eğri, 3-Boyutlu Minkowski Uzayı

Surface Family With a Common Natural Asymptotic Lift of a Spacelike Curve with Timelike Binormal in Minkowski 3-Space

ABSTRACT: Let γ be a spacelike curve with timelike binormal and $\bar{\gamma}$ be its natural lift. In this work, we find surfaces accepting $\bar{\gamma}$ as an asymptotic curve in IR_1^3. We obtain sufficient constraints such that $\bar{\gamma}$ is an asymptotic curve on the constructed surface. We present some illustrative examples.

Keywords: Surface Family, Natural Lift, Asymptotic Curve, Minkowski 3-Space

[1] Evren ERGÜN (**Orcid ID:** 0000-0002-3831-5310), Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Çarşamba Ticaret Borsası Meslek Yüksekokulu, Samsun, Türkiye
[2] Ergin BAYRAM (**Orcid ID:** 0000-0003-2633-0991), Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Samsun, Türkiye

*Sorumlu Yazar / Corresponding Author: Ergin BAYRAM, e-mail: erginbayram@yahoo.com

Geliş tarihi / *Received:* 21.11.2018
Kabul tarihi / *Accepted:* 08.02.2019

GİRİŞ

Eğriler ve yüzeyler diferansiyel geometride uzun yıllardır çalışılan konulardır. Eğri ve yüzeyler birçok endüstriyel uygulamada kullanılmaktadır. Bu nedenle yüzey oluşturma problemleri, özel olarak, verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi özel eğri kabul eden yüzey bulma problemleri birçok bilim insanının ilgisini çekmektedir. Wang ve ark., (2004) bu tür problemi ilk olarak 2004 yılında ortaya atmıştır. Verilen bir eğriden geçen ve bu eğriyi ortak geodezik kabul eden yüzeyleri elde etmişlerdir. Kasap ve ark., (2008) ise Wang ve ark., tarafından kullanılan sapma fonksiyonlarını genelleştirerek daha genel bir ortak geodezikli yüzey ailesi elde etmiştir. 2011 yılında ise Li ve ark., (2011) ortak eğrilik çizgili yüzey ailesi için yeterli şartları sunmuştur. Ergün ve ark., (2014) ise Li ve ark., tarafından yapılan çalışmayı 3 boyutlu Minkowski uzayına taşımıştır. Ortak asimptotik eğrili yüzey ailesi Bayram ve ark., (2012) tarafından tanımlanmıştır. Ergün ve Bayram (2015) verilen bir eğrinin tabii liftini ortak eğrilik çizgisi kabul eden yüzeyleri elde etmiştir. Ergün ve Bayram (2016) tabii liftin geodezik olması için yeterli koşulları elde etmiştir. Timelike eğrinin tabii liftini asimptotik eğri kabul eden yüzey ailesi ise Bayram ve Ergün (2016) tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmada ise yukarıdaki makaleler ışığında timelike binormalli spacelike eğrinin tabii liftini asimptotik eğri kabul eden yüzey ailesi için gerekli şartlar elde edildi.

MATERYAL VE YÖNTEM

Öncelikle, kullanılacak olan kavramlar tanıtılacaktır.

$U=(u_1,u_2,u_3)\in IR^3$ olmak üzere $\langle U,U\rangle=-u_1^2+u_2^2+u_3^2$,

Lorentz iç çarpımı ile donatılmış IR^3 vektör uzayına 3 boyutlu Minkowski uzayı denir ve IR_1^3 ile gösterilir.

$U=(u_1,u_2,u_3)\in IR_1^3$ vektörüne

$\langle U,U\rangle<0$ ise timelike, $\langle U,U\rangle>0$ veya $U=0$ ise spacelike, $\langle U,U\rangle=0$ ve $U\neq 0$ ise null denir (O'neill, 1983). $U=(u_1,u_2,u_3)$, $V=(v_1,v_2,v_3)\in IR_1^3$ vektörleri için $\langle U,V\rangle=0$ ise bu vektörlere ortogonal vektörler denir (Ratcliffe, 1994). U, V vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı

$$U\times V=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & -\vec{e}_2 & -\vec{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_1v_3-u_3v_1,\ u_2v_1-u_1v_2)$$

şeklinde tanımlıdır (Önder ve Uğurlu, 2013). γ eğrisinin tanjant, asli normal ve binormal vektör alanı, sırasıyla, t, n, b olmak üzere $\{t(u),n(u),b(u)\}$ kümesine eğrinin Frenet çatısı denir. Eğrinin eğrilik ve burulması, sırasıyla, κ ve τ olmak üzere birim hızlı timelike bir eğri için

$$t\times n=-b,\ n\times b=t,\ b\times t=-n,\ t'=\kappa n,\ n'=\kappa t+\tau b,\ b'=-\tau n,$$

spacelike binormalli spacelike bir eğri için

$$t\times n=-b,\ n\times b=-t,\ b\times t=n,\ t'=\kappa n,\ n'=\kappa t+\tau b,\ b'=\tau n$$

timelike binormalli spacelike bir eğri için

$t\times n=b,\ n\times b=-t,\ b\times t=-n,\ t'=\kappa n,\ n'=-\kappa t+\tau b,\ b'=\tau n$ dir (Walrave, 1995).

$R \subset IR_1^3$ bir yüzey ve $\gamma : I \to R$ bir eğri, U ise R üzerinde diferansiyellenebilir bir vektör alanı olmak üzere $\frac{d}{du}\left(\gamma(u)\right) = U\left(\gamma(u)\right),\ (\forall u \in I),$ oluyorsa γ ya U vektör alanının bir integral eğrisi denir (O'neill, 1983). R nin p noktasındaki tanjant uzay T_pR ve R nin tanjant vektör alanları uzayı $\chi(R)$ olmak üzere $TR = \bigcup_{p\in R} T_pR = \chi(R)$ dir. $\gamma : I \to R$ eğrisi için $\bar{\gamma}(u) = \left(\gamma(u), \gamma'(u)\right) = \gamma'(u)|_{\gamma(u)}$ şeklinde tanımlanan eğriye γ eğrisinin tabii lifti denir (Ergün ve Çalışkan, 2011).

$\gamma(u),\ L_1 \le u \le L_2,$ timelike binormalli spacelike eğri olsun. Bu durumda $\bar{\gamma}$ timelike veya spacelike binormalli spacelike eğri olur. γ nın $\{t(u), n(u), b(u)\}$ Frenet çatısı ile $\bar{\gamma}$ nin $\{\bar{t}(u), \bar{n}(u), \bar{b}(u)\}$ Frenet çatısı arasında aşağıdaki ilişki vardır

a) $\bar{\gamma}$ nin timelike binormalli spacelike eğri olması durumu;

i) γ nın Darboux vektörü timelike ise

$$\begin{pmatrix} \bar{t}(u) \\ \bar{n}(u) \\ \bar{b}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ -\sinh\theta & 0 & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(u) \\ n(u) \\ b(u) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

ii) γ nın Darboux vektörü spacelike vektör ise

$$\begin{pmatrix} \bar{t}(u) \\ \bar{n}(u) \\ \bar{b}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & \cosh\theta \\ -\cosh\theta & 0 & \sinh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(u) \\ n(u) \\ b(u) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

b) $\bar{\gamma}$ nin spacelike binormalli spacelike eğri olması durumu;

i) γ nın Darboux vektörü timelike vektör ise

$$\begin{pmatrix} \bar{t}(u) \\ \bar{n}(u) \\ \bar{b}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ \sinh\theta & 0 & -\cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(u) \\ n(u) \\ b(u) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

ii) γ nın Darboux vektörü spacelike vektör ise

$$\begin{pmatrix} \bar{t}(u) \\ \bar{n}(u) \\ \bar{b}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\theta & 0 & \cosh\theta \\ \cosh\theta & 0 & -\sinh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(u) \\ n(u) \\ b(u) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

BULGULAR VE TARTIŞMA

$\gamma(u),\ L_1 \le u \le L_2,$ birim hızlı, $\left\|\gamma''(u)\right\| \ne 0,\ L_1 \le u \le L_2,$ olan timelike binormalli spacelike bir eğri, $\overline{\gamma}(u),\ L_1 \le u \le L_2,$ ise $\gamma(u)$ nun tabii lifti olsun. Bu durumda $\overline{\gamma}$ spacelike bir eğridir. $\overline{\gamma}(u)$ den geçen yüzey ailesi

$$R(u,v) = \overline{\gamma}(u) + f(u,v)\overline{t}(u) + g(u,v)\overline{n}(u) + h(u,v)\overline{b}(u), \tag{5}$$

denklemi ile verilir. $f(u,v),\ g(u,v)$ ve $h(u,v)$ fonksiyonları C^1 sınıfından fonksiyonlar olup sapma fonksiyonları olarak adlandırılırlar. Ayrıca, $\left\{\overline{t}(u), \overline{n}(u), \overline{b}(u)\right\}$ $\overline{\gamma}$ tabii liftinin Frenet çatısıdır. Amacımız $R(u,v)$ yüzeyi üzerinde yer alan $\overline{\gamma}(u)$ tabii liftinin asimptotik ve parametrik eğri olması için şartları elde etmektir. $\overline{\gamma}(u)$ eğrisinin parametre eğrisi olması için yeterli koşul $v_0 \in [T_1, T_2]$ olmak üzere

$$f(u,v_0) = g(u,v_0) = h(u,v_0) \equiv 0,\ L_1 \le u \le L_2,\ T_1 \le v_0 \le T_2 \tag{6}$$

olmasıdır. Diğer taraftan bu eğrinin $R(u,v)$ yüzeyi üzerinde asimptotik eğri olması için yeterli şart yüzeyin normal vektör alanı $\widehat{n}(u,v_0)$ ile eğrinin binormal vektör alanı $\overline{b}(u)$ nun paralel olmasıdır.

$R(u,v)$ yüzeyinin normal vektör alanı $\widehat{n}(u,v) = \dfrac{\partial R(u,v)}{\partial u} \times \dfrac{\partial R(u,v)}{\partial v}$ dır. (1-4)

denklemlerinden uygun olanları (5, 6) denklemlerinde yerine yazılırsa $\overline{\gamma}$ eğrisi boyunca $\widehat{n}(u,v_0)$ vektör alanı aşağıdaki gibi elde edilir:

i) Timelike binormalli spacelike $\overline{\gamma}$ eğrisi ve spacelike veya timelike Darboux vektörü için

$$\widehat{n}(u,v_0) = \kappa\left[\frac{\partial h}{\partial v}(u,v_0)\overline{n}(u) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v_0)\overline{b}(u)\right], \tag{7}$$

ii) Spacelike binormalli spacelike $\overline{\gamma}$ eğrisi ve spacelike veya timelike Darboux vektörü için

$$\widehat{n}(u,v_0) = -\kappa\left[\frac{\partial h}{\partial v}(u,v_0)\overline{n}(u) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v_0)\overline{b}(u)\right] \tag{8}$$

dir. Burada κ, γ eğrisinin eğriliğidir. $\kappa(u) \ne 0,\ L_1 \le u \le L_2,$ olduğundan $\overline{\gamma}$ eğrisinin $R(u,v)$ yüzeyi üzerinde asimptotik eğri olması için yeterli şart $\dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v_0) \equiv 0,\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v_0) \ne 0$ olmasıdır. Böylece şu teorem ifade edilebilir:

Teorem : $\gamma(u)$, $L_1 \le u \le L_2$, birim hızlı, $\kappa \ne 0$ olan, timelike binormalli spacelike bir eğri ve $\bar{\gamma}(u)$, $L_1 \le u \le L_2$, ise bu eğrinin tabii lifti olsun. $\bar{\gamma}$ tabii liftinin (5) denklemi ile verilen yüzey üzerinde hem parametre eğrisi hem de asimptotik eğri olması için yeterli koşul $L_1 \le u \le L_2$, $T_1 \le v$, $v_0 \le T_2$ (v_0 sabit) olmak üzere

$$\begin{cases} f(u,v_0) = g(u,v_0) = h(u,v_0) = \frac{\partial h}{\partial v}(u,v_0) \equiv 0, \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v_0) \ne 0, \end{cases} \tag{9}$$

olmasıdır.

Önerme : $\gamma(u)$, $L_1 \le u \le L_2$, birim hızlı, $\kappa \ne 0$ olan, timelike binormalli spacelike bir eğri ve $\bar{\gamma}(u)$, $L_1 \le u \le L_2$, ise bu eğrinin tabii lifti olsun. $L_1 \le u \le L_2$, $T_1 \le v$, $v_0 \le T_2$ (v_0 sabit) olmak üzere

eğer $f(u,v) = g(u,v) = v - v_0$, $h(u,v) \equiv 0$ veya $f(u,v) = h(u,v) \equiv 0$, $g(u,v) = v - v_0$, ise

(5) denklemi ile verilen yüzey $\bar{\gamma}$ tabii liftini asimptotik ve parametre eğrisi kabul eden regle yüzeydir.

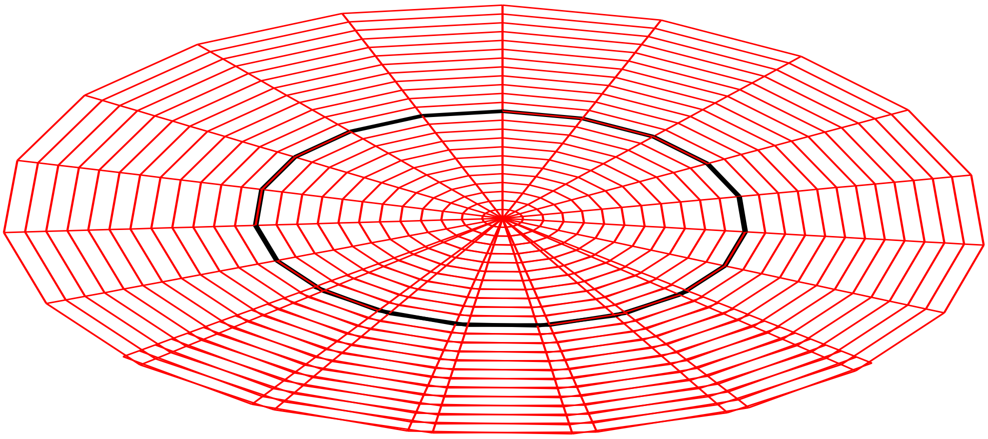
İspat : Sapma fonksiyonları $f(u,v) = g(u,v) = v - v_0$, $h(u,v) \equiv 0$ veya $f(u,v)=h(u,v) \equiv 0$, $g(u,v_0)=0$ şeklinde alınırsa (5) denklemi ile verilen yüzey $R(u,v) = \bar{\gamma}(u) + (v - v_0)\left[\bar{t}(u) + \bar{n}(u)\right]$ veya $R(u,v) = \bar{\gamma}(u) + (v - v_0)\bar{n}(u)$ regle yüzeyine dönüşür.

3 boyutlu Minkowski uzayında verilen timelike binormalli sapcelike eğrinin tabii liftini asimptotik eğri kabul eden yüzeyler her zaman bulunabilir. (5) denkleminde yer alan Frenet vektörlerinin katsayı fonksiyonlarının her farklı seçilişinde aynı eğriden geçen ve bu eğriyi asimptotik eğri kabul eden farklı yüzeyler elde edilir. Bu çalışmanın, literatürde yer almayan bu tip eğri ve yüzeylerle ilgili yapılacak yeni çalışmalara yön göstermesi beklenmektedir.

Örnek 1

Timelike binormalli spacelike $\gamma(u) = (0, \cos u, \sin u)$ eğrisi verilsin. Eğrinin Frenet vektörleri $t(u) = (0, -\sin u, \cos u), n(u) = (0, -\cos u, -\sin u), b(u) = (1,0,0)$ dir.

γ nın tabii lifti $\bar{\gamma}(u) = (0, -\sin u, \cos u)$ timelike binormalli spacelike eğri olup Frenet vektörleri $\bar{t}(u) = (0, -\cos u, -\sin u), \bar{n}(u) = (0, \sin u, -\cos u), \bar{b}(u) = (1,0,0)$ dir. Sapma fonksiyonları $f(u,v) = h(u,v) \equiv 0$, $g(u,v) = v$, şeklinde seçilirse önermede verilen şart sağlanır ve $\bar{\gamma}$ tabii liftini asimptotik eğri kabul eden $R_1(u,v) = (0, (1-v)\sin u, (1-v)\cos u)$, $-4 \le u \le 4$, $-1 \le v \le 1$, regle yüzeyi elde edilir (Şekil 1).

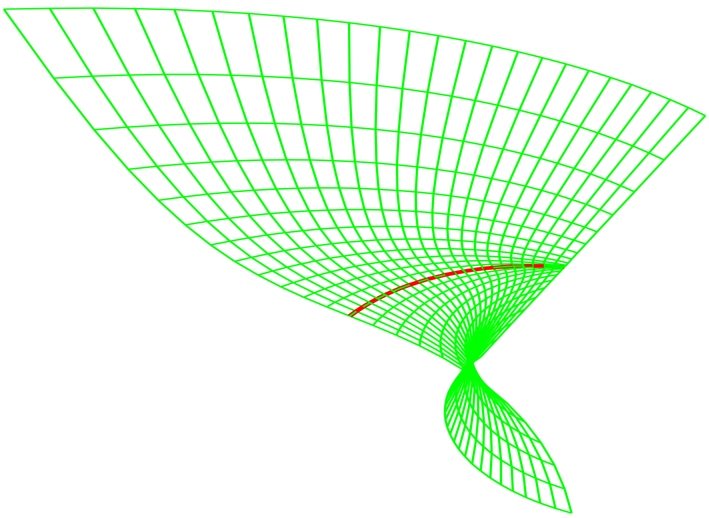


Şekil 1

Aynı eğri için sapma fonksiyonları $f(u,v)\equiv 0,\ g(u,v)=(\sinh u)\sinh v,\ h(u,v)=v-\sinh v$ şeklinde alınırsa teoremin şartları sağlanır ve $\overline{\gamma}$ tabii liftini asimptotik eğri kabul eden

$$R_2(u,v)=\left(v-\sinh v,\left((\sinh v)(\sinh u)-1\right)\sin u,\left((\sinh v)(\sinh u)-1\right)\cos u\right),\ 0<u\leq 1,\ -1\leq v\leq 1,$$

yüzeyi elde edilir (Şekil 2).



Şekil 2

Örnek 2

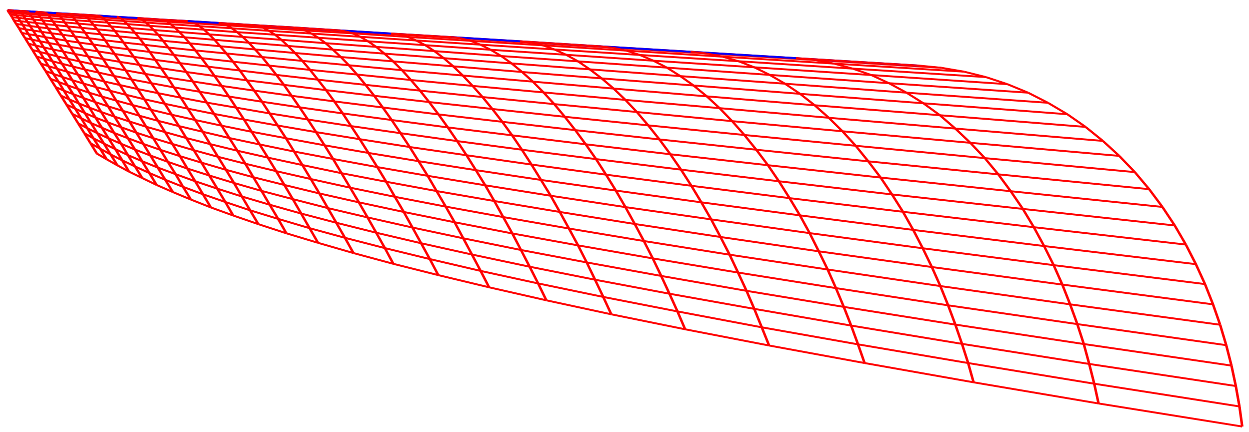
Timelike binormalli spacelike $\gamma(u)=\left(\frac{4}{9}\sinh 3u,\frac{4}{9}\cosh 3u,\frac{5}{3}u\right)$ eğrisi veriliyor. Eğrinin Frenet vektörleri

$$t(u)=\left(\frac{4}{3}\cosh 3u,\frac{4}{3}\sinh 3u,\frac{5}{3}\right),n(u)=(\sinh 3u,\cosh 3u,0),b(u)=\left(-\frac{5}{3}\cosh 3u,\frac{5}{3}\sinh 3u,-\frac{4}{3}\right)$$

dir. Bu eğrinin tabii lifti $\overline{\gamma}(u)=\left(\frac{4}{3}\cosh 3u,\frac{4}{3}\sinh 3u,\frac{5}{3}\right)$ ve Frenet vektörleri

$$\bar{t}(u)=(\sinh 3u,\cosh 3u,0),\bar{n}(u)=(\cosh 3u,\sinh 3u,0),\bar{b}(u)=(0,0,-1)$$

şeklindedir. Sapma fonksiyonları $f(u,v)\equiv 0,\ g(u,v)=v\ln u,\ h(u,v)=v^2e^u$ olarak seçilirse önermede verilen şart sağlanır ve $\bar{\gamma}$ yi asimptotik eğri kabul eden $R_3(u,v)=\left(\left(\frac{4}{3}+v\ln u\right)\cosh 3u,\left(\frac{4}{3}+v\ln u\right)\sinh 3u,\frac{5}{3}-v^2e^u\right),1<u\le 2,\ 0\le v\le 1$ regle yüzeyi elde edilir (Şekil 3).



Şekil 3

SONUÇ

Bu çalışmada, 3 boyutlu Minkowski uzayında verilen timelike binormalli spacelike bir eğrinin tabii liftini asimptotik eğri kabul eden yüzey ailesi için şartlar elde edildi. İlk olarak, verilen herhangi bir timelike binormalli spacelike eğrinin tabii liftinin Frenet çatısı yardımıyla yüzey ailesi parametrik olarak ifade edildi. Daha sonra, tabii liftin elde edilen yüzeyler üzerinde asimptotik eğri olması için yeterli şartlar verildi. Son olarak, bu tip bir yüzeyin regle yüzey olması koşulu incelenerek örnekler verildi.

KAYNAKLAR

Bayram E, Güler F, Kasap E, 2012. Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve. Comput. Aided Des., 44: 637-643.

Ergün E, Bayram E, Kasap E, 2014. Surface pencil with a common line of curvature in Minkowski 3-space. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 30 (12): 2103-2118.

Ergün E, Çalışkan M, 2011. On geodesic sprays In Minkowski 3-space. Int. J. Contem. Math. Sci., 6, (39): 1929-1933.

Ergün E, Bayram E, Kasap E, 2015. Surface Pencil with a Common Natural Line of Curvature Lift. Journal of Science and Arts, 4 (33): 321-328.

Ergün E, Bayram E, 2016. Surface Family with a Common Natural Geodesic Lift. International J.Math. Combin., 1: 34-41.

Bayram E, Ergün E, 2016. Surface Family with a Common Natural Asymptotic Lift of a Timelike Curve in Minkowski 3-space. CBU Journal of Science, 12 (2): 209-214.

Kasap E, Akyıldız FT, Orbay K, 2008. A generalization of surfaces family with commonspatial geodesic. Appl. Math. Comput., 201: 781-789.

Li CY, Wang RH, Zhu CG, 2011. Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature. Comput. Aided Des., 43 (9): 1110-1117.

O'Neill B, 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Academic Press, New York.

Önder M, Uğurlu HH, 2013. Frenet frames and invariants of timelike ruled surfaces. Ain Shams Engineering Journal, 4: 502-513.

Ratcliffe JG, 1994. Foundations of Hyperbolic Manifolds. Springer-Verlag, New York.

Walrave J, 1995. Curves and surfaces in Minkowski space. PhD. Thesis, K. U. Leuven Faculteit Der Wetenschappen.

Wang GJ, Tang K, Tai CL, 2004. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic. Comput. Aided Des., 36 (5): 447-59.