



Multi-step differential transform method for free vibration analysis of beams with tip mass

Hilal Doğanay Kati ^{ID*}, Hakan Gökdağ ^{ID}

Department of Mechanical Engineering, Bursa Technical University, Bursa, 16330, Turkey

Highlights:

- MDTM is applied for the first time to this problem
- Verification with finite element model
- Studying the influence of some parameters on the natural frequencies

Keywords:

- DTM and MDTM
- vibration
- Euler Bernoulli beam
- Natural frequencies and mode shapes
- finite element software

Article Info:

Research Article
Received: 20.11.2017
Accepted: 05.11.2018

DOI:

10.17341/gazimmfd.571480

Correspondence:

Author: Hilal Doğanay Kati
e-mail: hilal.doganay@btu.edu.tr
phone: +90 224 300 3547

Graphical/Tabular Abstract

This research concerns a non-uniform beam with a three dimensional rigid tip mass whose center of gravity is not coincided with the attachment point of the beam and subjected to both torsional and flexural deformations in two orthogonal planes. A semi-numerical method called Multi-Step Differential Transform Method (MDTM) is employed to obtain natural frequencies and mode shapes of the system for two different boundary conditions, i.e. the left end clamped or free. The influence of tip mass dimensions, beam length and taper ratio on the natural frequencies are studied, and the finite element software (ANSYS) is employed to compare the results and confirm the accuracy of the model.

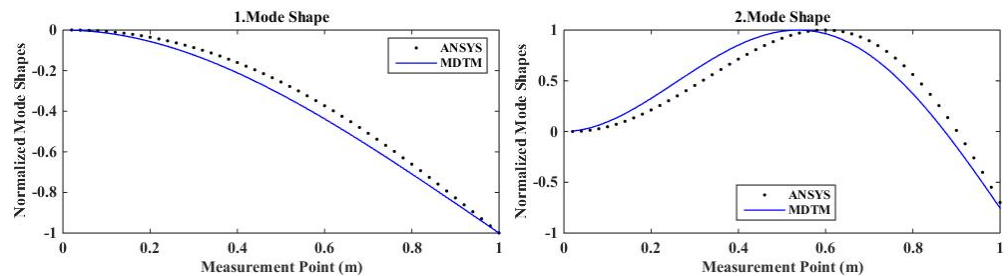
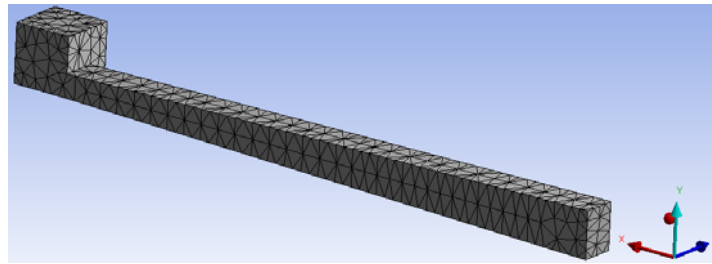


Figure A. The mesh view of the system in the ANSYS and the first two mode shapes along Y-axis for Clamped beam

Purpose:

The aim of the study is to obtain natural frequencies and mode shapes of a tapered Euler Bernoulli (EB) beam with tip mass by using MDTM and verify the results by finite element model.

Theory and Methods:

First, DTM and MDTM are briefly introduced. Then, the governing equations of motion are obtained for the non-uniform EB beam and solved by MDTM. Later, the system is modelled in ANSYS environment to obtain natural frequencies and mode shapes.

Results:

According to the parametric study, natural frequencies of the system are inversely proportional to the beam length and dimensions of the tip mass, and they are proportional to the taper ratio of the beam. Furthermore, the results obtained by MDTM and ANSYS are in general close to each other, and the differences become more apparent for the short beam and high frequencies. The main reason of this is the insufficiency of the EB hypothesis at high frequencies and for short beams.

Conclusion:

It is proved that results obtained by MDTM and ANSYS are sufficiently close to each other.



Multi-step diferansiyel transform metodu ile uç kütle eklentili kirişlerin serbest titreşim analizi

Hilal Doğanay Katı*^{ID}, Hakan Gökdağ^{ID}

Bursa Teknik Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 16330, Bursa, Türkiye

Ö N E Ç I K A N L A R

- Problemin ilk kez MDTM ile çözümü
- Sonlu eleman modeli ile doğrulama yapılması
- Bazı parametrelerin doğal frekanslara etkisinin incelenmesi

Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi
Geliş: 20.11.2017
Kabul: 05.11.2018

DOI:

10.17341/gazimmfd.571480

Anahtar Kelimeler:

DTM ve multi-step DTM,
titreşim,
Euler-Bernoulli kirişi,
doğal frekanslar ve mod
şekilleri,
sonlu eleman yazılımı

ÖZET

Kiriş-uç kütle sistemlerinin dinamik analizi robot kolları ve manipulatörler gibi mekanik sistemlerin başarılı bir şekilde tasarlanması açısından oldukça önemlidir. Literatürdeki birçok çalışmada bu sistemlerin serbest titreşimini analitik olarak çözmek için az sayıda değişken kesitli kiriş modeli dikkate alınmış, çoğunlukla sabit kesitli kiriş modeli kullanılmıştır. Ayrıca, uç kütle koordinat merkezlerinin çakışık olduğu kabul edilmiştir. Mevcut çalışmada burulmaya ve iki farklı düzlemde eğilmeye maruz, kiriş ve uç kütle merkezlerinin çakışık olmadığı bir sistem ele alınmış ve serbest titreşim analizi için yarı-nümerik yöntem olan Multi-Step Diferansiyel Transform Metodu (MDTM) uygulanmıştır. Sistemin doğal frekansları ve mod şekilleri iki farklı sınır şartı (sol ucun ankastre veya serbest olma durumu) için elde edilmiştir. Ayrıca, kiriş uzunluğu, uç kütle boyutları, kesit daralma oranı (taper ratio) gibi parametrelerin doğal frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiştir. Elde edilen sonuçların doğruluğu yaygın bir şekilde kullanılan sonlu eleman yazılımı (ANSYS) ile karşılaştırılmış ve yeterince uyumlu olduğu gözlemlenmiştir.

Multi-step differential transform method for free vibration analysis of beams with tip mass

H I G H L I G H T S

- MDTM is applied for the first time to this problem
- Verification with finite element model
- Studying the influence of some parameters on the natural frequencies

Article Info

Research Article
Received: 20.11.2017
Accepted: 05.11.2018

DOI:

10.17341/gazimmfd.571480

Keywords:

DTM and multi-step DTM,
vibration,
Euler-Bernoulli beam,
natural frequencies and
mode shapes,
finite element software

ABSTRACT

Dynamic analysis of beam-tip mass systems is a significant issue in terms of providing successful design of mechanisms such as robot arms and manipulators. In the relevant literature, uniform beams have been mostly considered for the free vibration analysis of these systems whereas the number of studies using nonuniform beam is limited. Furthermore, center of tip mass is, in general, coincident with the attachment point of the beam, and the tip mass is assumed to be a point mass. This research concerns a non-uniform beam with a three dimensional rigid tip mass whose center of gravity is not coincident with the attachment point of the beam and subjected to both torsional and flexural deformations in two orthogonal planes. A semi-numerical method called Multi-Step Differential Transform Method (MDTM) is employed for the solution of governing equations of the system. Natural frequencies and mode shapes of the system are obtained for two different boundary conditions, i.e. the left end clamped or free. The influence of tip mass dimensions, beam length and taper ratio on the natural frequencies are studied, and the well-known finite element software (ANSYS) is employed to compare the results and confirm the accuracy of the model. It is proved that results obtained by MDTM and ANSYS are sufficiently close to each other.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Kirişlerin titreşimi problemi makine, inşaat mühendisliği ve havacılıkta robot sistemleri, helikopter ve türbin kanatları, uzay araçları ve mekanizmaları, binalar ve yüksek kuleler, anten yapıları gibi uygulama alanları bakımından geniş çapta çalışılmıştır. Bu tür sistemlerin titreşim analizi yapılırken asıl taşıyıcı yapı olan giriş sabit ya da değişken kesitli olarak modellenmekte ve bunun için genellikle Euler-Bernoulli (EB) ya da Timoshenko giriş teorileri kullanılmaktadır. Konuyla ilgili çalışmalarda girişlere uç kütle, kütle-yay sistemi ya da sönüm elemanı eklenerek gerçek hayattaki titreşim problemlerine çözümler üretilmiştir. Birçok araştırmacı uç kütle eklentili giriş sistemlerinde uç kütleli doğal frekanslar ve dinamik davranışları üzerindeki etkisini incelemiştir. Bu konudaki ilk çalışmalardan birinde [1] uç kütleli dönen bir girişin serbest titreşimi incelenmiştir. Benzer bir çalışmada [2] Reissner Varyasyon Metodu kullanılmıştır. İlgili çalışmalarda uç kütleli kütle merkezi ile girişin kütle merkezinin çakışık olduğu varsayılmıştır. Gürgöze vd.[3] uç kütleli giriş sistemine sönüm elemanı ekleyerek sistemin titreşim analizini yapmışlardır. Gürgöze [4] bu çalışmaya benzer olarak giriş sistemlerine uç kütleli yanı sıra yay-kütle sistemlerini eklemiş ve doğal frekanslarını incelemiştir. Değişken kesitli giriş modeliyle ilgili ilk çalışmalardan birinde [5] konik kesitli giriş modeli dikkate alınmıştır. Başka bir çalışmada [6] değişken kesitli, uç kütleli, dönen bir girişin titreşim analizi yapılmıştır. Benzer çalışmalarda uç kütleli eksantrik olması ve dönme ataleti göz önüne alınarak üniform olmayan girişin [7], iki parçalı değişken parametrelere sahip konik kesit halindeki uç eklentili girişin [8], kontrollü bir şekilde kesme deformasyonuna maruz kalan konik kesitli uç kütleli girişin [9], doğal frekanslar üzerine etki eden parametrelerin (suyun yüksekliği, toprak sertlik oranı, vb.) incelendiği suya gömülmüş üniform olmayan uç eklentili girişin [10] ve Bessel fonksiyonları kullanılarak üniform kesitli girişin [11] titreşimleri ele alınmıştır. Bazı araştırmacılar değişken kesitli, uç kütleli giriş sistemine öteleme ve dönmeye direnç gösteren yaylar ekleyerek sistemin dinamik davranışını incelemişlerdir [12]. Güncel bir çalışmada uç kütleli karbon nano tüplerin titreşim analizi Timoshenko giriş teorisi ile gerçekleştirilmiştir [13]. Yapılan çalışmalarda genellikle uç kütleli kütle merkezi ile giriş uç noktası çakışıkır. Fakat başka bir çalışmada [14] uç kütle eklentili dönen giriş problemi incelenirken kütle merkezi ve giriş uç noktasının çakışık olmadığı görülmektedir. İlgili çalışmada sonlu elemanlar modeli kullanılarak ayar açısı ve kök yarıçapının doğal frekanslara etkisi incelenmiştir. 2003 yılında Oguamanam eksantrik uç kütle eklentili EB girişinin titreşimlerini incelemiştir [15]. Bu çalışma, türünün ilk örneği niteliğindedir. Çünkü, ilk kez bu çalışmada uç kütleli kütle merkezi ile giriş uç noktası arasında üç boyutlu (3B) bir kaçıklık olduğu kabul edilmiş ve uç kütle 3B bir cisim gibi modellenmiştir. Dolayısıyla eklentinin kütle yanında kütle atalet momenti bileşenlerinin de sınır şartlarında ortaya çıktığı görülmüştür. Sınır şartlarındaki bu durum girişin eğilme ve burulma hareketleri arasında bir bağlantıya

(*coupling*) sebep olmuştur. Yani, normalde bu iki hareket bağımsız iken bu halde bağımlı hale gelmiştir. Gökdağ ve Kopmaz ilgili sistemdeki giriş tek simetri eksenli bir girişle değiştirilerek benzer çalışmalar yapmışlardır [16]. Bu halde girişin kendisi de bizzat eğilme ve burulmanın kuplajlı (*coupled*) olduğu bir giriştir. Yani, bu iki hareket arasındaki bağlantı sadece sınır şartı üzerinden değildir. Oguamanam ve Arshad hem iki yönde eğilmenin hem de burulmanın etkisinde olan uç kütle eklentili EB girişinin frekanslarını analitik yöntem ile elde etmişlerdir [17]. Uç kütle kaçık merkezli düşünülmüş olmasına rağmen, yapılan parametrik çalışmada sadece giriş eksenli doğrultusundaki kaçıklık dikkate alınmıştır. Daha sonra Salarieha ve Ghorashi [18] Oguamanam [15] tarafından ortaya koyulan modeli Timoshenko giriş teorisini kullanarak güncellemişlerdir. Literatürde bu çalışmalara atıf yapılan başka çalışmalar da mevcuttur [19-22], fakat hiçbirinde uç kütleli önceki çalışmalardaki gibi modellenmediği görülmektedir. Konuyla ilgili en güncel çalışmada Katı ve Gökdağ 3B rijit kütle taşıyan üniform bir girişin deneysel olarak doğal frekanslarını ve mod şekillerini ölçmüş, bunları analitik çözüm ve sonlu elemanlar yöntemiyle karşılaştırmışlardır [23]. Söz konusu çalışmada, böyle bir eklentili girişte ilk kez modal parametreler deneysel olarak ölçülmüştür.

Literatürde bahsi geçen uç eklentili giriş problemlerindeki hareket denklemleri çıkarılırken daha çok Hamilton Prensibi, Lagrange metodu gibi yöntemler kullanılmış olup, hareket denklemlerinin çözümünde genellikle Rayleigh-Ritz Metodu, Bessel Fonksiyonları, Dunkerly, Southwell, Muller ve Bolotin Metodları, Sonlu Elemanlar Yöntemi ve Newton-Raphson Metodu gibi yaklaşık çözüm metodları kullanılmıştır. Son yıllarda bu yöntemlere alternatif olarak yarı analitik bir çözüm metodu olan Diferansiyel Transform Metodu (DTM) ve bunun kademeli uygulanması esasına dayalı Multi-step Diferansiyel Transform Metodu (MDTM) kullanılmaya başlanmıştır. İlk olarak Pukhov [24, 25] tarafından elektrik devre analizlerinde karşılaşılan lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için ortaya atılan ve daha sonra Zhou [26] tarafından geliştirilen DTM'nin avantajlarından birisi, sade ve basit bir dönüşümle adi ve kısmi diferansiyel denklemin cebirsel bir denkleme dönüştürülmesidir. Ayrıca bu yöntem kullanılarak integro-diferansiyel denklemler, özdeğer problemleri, başlangıç ve sınır değer problemleri, ısı iletim ve titreşim problemleri gibi birçok farklı alandaki problemler çözülebilmektedir [27-36].

Özetle, eksantrik uç kütleli giriş titreşimi ile ilgili az sayıda çalışma yapıldığı görülmektedir. Uç kütleli 3B cisim gibi modellendiği çalışmalar ise daha da azdır. Üstelik bu çalışmalarda girişin sabit kesitli ve malzemece homojen olduğu, çoğunda girişin tek düzlemde eğildiği kabul edilmiştir. Mevcut çalışmada Oguamanam ve Arshad'ın [17] önerdiği model değişken kesitli ve malzemece homojen olmayan EB giriş için yeniden ele alınmıştır. Bu amaçla, öncelikle Hamilton prensibi ile sistemin hareket denklemleri ve muhtemel bütün sınır şartları elde edilmiştir. Çözüm için, bilgisayar ortamında kodlaması daha kolay ve yeterli sayıda

terim kullanıldığında kesin değerlere çok yakın sonuçlar veren MDTM yöntemi kullanılmıştır. Bu şekilde elde edilen sonuçlar ANSYS ortamında yapılan modal analiz sonuçları ile kıyaslanmıştır.

2. DİFERANSİYEL TRANSFORM METODU (DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD) (DTM)

DTM Taylor serisi açılımına dayanan, adi veya kısmi diferansiyel denklemlere polinomlar şeklinde çözüm öneren yarı analitik/nümerik bir yöntemdir. Taylor serisi çözümleri çok fazla sayıda sembolik işlem ve uzun zaman gerektirmesine rağmen DTM’de daha basit hesaplamalarla hızlı bir şekilde doğru sonuçlar elde edilmektedir [34]. Diferansiyel denklemlerin dönüştürülmesinde Tablo 1 ve 2’de verilen dönüşüm kuralları uygulanır. f(x) orijinal fonksiyon ve F[k] diferansiyel dönüşümü alınmış fonksiyon olmak üzere;

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \tag{1}$$

F[k] nın ters diferansiyel dönüşüm fonksiyonu;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F[k](x - x_0)^k \tag{2}$$

Eş. 1 Eş. 2’de yerine yazılarak Eş. 3 elde edilir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \tag{3}$$

Dolayısıyla, pratik olarak f(x) fonksiyonu sonlu sayıda bir kuvvet serisi olarak Eş. 4 gibi kabul edilmektedir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^N F[k]x^k, F[k] = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \tag{4}$$

2.1. Multi-Step Diferansiyel Transform Metodu (Multi-Step Differential Transform Method) (MDTM)

DTM’deki yakınsama problemini gidermek için MDTM geliştirilmiş olup bunu izah etmek için Eş. 5’de verilen lineer olmayan başlangıç problemini ele alalım.

$$f(t, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0 \tag{5}$$

Problemin başlangıç şartları $y^{(k)}(0) = c_k, k=0,1,\dots,p-1$ şeklindedir. DTM’ye göre bu problemin [0,T] aralığındaki çözümü aşağıdaki gibi bir seri toplamı biçimindedir (Eş. 6).

$$y(t) = \sum_{n=0}^N a^n t^n, t \in [0, T] \tag{6}$$

Tablo1. Önemli bazı DTM dönüşüm kuralları (Some important DTM rules)

Orijinal Fonksiyon	Diferansiyel Transform Fonksiyonu
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$F[k] = G[k] \pm H[k]$
$f(x) = cg(x)$	$F[k] = cG[k]$
$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F[k] = \frac{(k+n)!}{k!} G[k+n]$
$f(x) = g(x)h(x)$	$F[k] = \sum_{k_1=0}^k G[k_1]H[k-k_1]$
$f(x) = x^n$	$F[k] = \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$

Tablo 2. Sınır şartları için DTM dönüşüm kuralları (DTM rules for boundary conditions)

$x = 0$		$x = L$	
Sınır Şartı	Dönüşümü alınmış halde sınır şartı	Sınır Şartı	Dönüşümü alınmış halde sınır şartı
$f(0) = 0$	$F[0] = 0$	$f(L) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} L^k F[k] = 0$
$\frac{df(0)}{dx} = 0$	$F[1] = 0$	$\frac{df(L)}{dx} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kL^{k-1} F[k] = 0$
$\frac{d^2 f(0)}{dx^2} = 0$	$F[2] = 0$	$\frac{d^2 f(L)}{dx^2} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)L^{k-2} F[k] = 0$
$\frac{d^3 f(0)}{dx^3} = 0$	$F[3] = 0$	$\frac{d^3 f(L)}{dx^3} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)L^{k-3} F[k] = 0$

MDTM uygulanacağı zaman $[0, T]$ aralığı M adet $[t_{m-1}, t_m]$, $m=1, 2, \dots, M$ alt aralığa $h=T/M$ olacak şekilde eşit adımlarla bölünür. İlk önce $[0, t_1]$ aralığında verilen probleme DTM uygulanır ve $y_1^{(k)}=c_k$ başlangıç şartları ile Eş. 7'deki yaklaşık çözüm elde edilir.

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^N a_{1k} t^k, \quad t \in [0, t_1] \quad (7)$$

$m \geq 2$ için her alt aralıkta $y_m^{(k)}(t_{m-1}) = y_{m-1}^{(k)}(t_{m-1})$ başlangıç şartları ile DTM tekrar tekrar uygulanır. Sonuçta bir dizi $y_m(t)$, $m=1, 2, \dots, M$ yaklaşık çözümü ile $y(t)$ fonksiyonu Eş. 8 şeklinde elde edilir.

$$y_m(t) = \sum_{n=0}^K a_{mn} (t - t_{m-1})^n, \quad t \in [t_m, t_{m+1}] \quad (8)$$

Burada $N=KM$ 'dir. Aslında MDTM, çözümün aşağıdaki gibi parçalı olduğunu varsayar (Eş. 9).

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) & t \in [0, t_1] \\ y_2(t) & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \vdots \\ y_m(t) & t \in [t_{M-1}, t_M] \end{cases} \quad (9)$$

Adım uzunluğu $h=T$ olduğunda MDTM klasik DTM'ye dönüşür. MDTM'nin daha iyi anlaşılması için bu yöntemin yalın bir EB kirişine uygulanmasını ele alan referans çalışma [28] incelenebilir.

3. HAREKET DENKLEMLERİNİN ÇIKARILMASI (OBTAINING GOVERNING EQUATIONS OF MOTION)

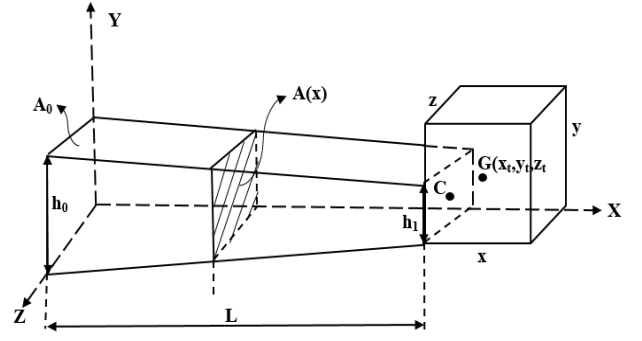
Bu bölümde iki yönde eğilen ve aynı zamanda kiriş eksenine etrafında burulan, eksantrik uç kütle taşıyan, değişken kesitli EB kirişinin (Şekil 1) hareket denklemleri Hamilton prensibi kullanılarak çıkarılmıştır. Kirişin sol ucu ankastre veya serbest olabilir. Sağ uca bulunan kütle ise kirişten başka herhangi bir yere bağlı değildir. Serbest titreşim halinde tüm sistemin kinetik ve potansiyel enerjileri aşağıdaki gibi yazılabilir (Eş. 10, Eş. 11).

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A(x) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A(x) \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L I_p(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{(C)} \dot{r}_p^2 dM$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L E(x) I_1(x) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L E(x) I_2(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L G(x) J(x) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx$$



Şekil 1. Kiriş-uç kütle sistemi (Beam-tip mass system)

Bunların Hamilton prensibi'nde kullanılmasıyla hareket denklemleri Eş.12-Eş.14 şeklinde ortaya çıkar.

$$B_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (12)$$

$$B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (13)$$

$$-B_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(B_5 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0 \quad (14)$$

Burada $B_1=\rho(x)A(x)$, $B_2=I_p(x)$, $B_3=E(x)I_1(x)$, $B_4=E(x)I_2(x)$ ve $B_5=G(x)J(x)$ şeklinde tanımlı olup, sırasıyla birim boydaki kütle, kütle eylemsizlik momenti, Y ve Z eksenlerindeki eğilme katılığı ve burulma katılığıdır. Sol ucun ankastre ya da serbest olmasına göre sınır şartları aşağıdaki gibidir (Eş. 15-Eş. 24)

$x=0$, Ankastre Serbest

$$v|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(B_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad B_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (16)$$

$$w|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(B_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad B_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad (18)$$

$$\theta|_{x=0} = 0 \quad B_5 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (19)$$

$x=L$

$$\bar{I}_{zz} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + M\bar{x} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - \bar{I}_{xz} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (20)$$

$$+\bar{I}_{yz} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + B_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0$$

$$\bar{I}_{yy} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + M\bar{x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + \bar{I}_{xy} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (21)$$

$$+\bar{I}_{yz} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + B_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0$$

$$M \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - M\bar{z} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (22)$$

$$+M\bar{x} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} - \frac{\partial}{\partial x} \left(B_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0$$

$$M \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + M\bar{y} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (23)$$

$$+M\bar{x} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} - \frac{\partial}{\partial x} \left(B_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=L} = 0$$

$$\bar{I}_{xx} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \Big|_{x=L} - M\bar{z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=L} + M\bar{y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (24)$$

$$+\bar{I}_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} - \bar{I}_{xz} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} \Big|_{x=L} + B_5 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$$

Burada

$$\bar{I}_{xx} = I_{xx} + M(\bar{z}^2 + \bar{y}^2) \quad (25)$$

$$\bar{I}_{yy} = I_{yy} + M(\bar{x}^2 + \bar{z}^2) \quad (26)$$

$$\bar{I}_{zz} = I_{zz} + M(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \quad (27)$$

$$\bar{I}_{xy} = I_{xy} + M\bar{x}\bar{y} \quad (28)$$

$$\bar{I}_{xz} = I_{xz} + M\bar{x}\bar{z} \quad (29)$$

$$\bar{I}_{yz} = I_{yz} + M\bar{y}\bar{z} \quad (30)$$

olup M uç kütleli, I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} , I_{xy} , I_{yz} , I_{xz} , ise eklentinin kütle atalet momenti bileşenlerini gösterir (Eş. 25-Eş. 30) $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ eklenti merkezinin (G) kirişin uç noktasına (C) göre koordinatlarıdır. Değişkenlerine ayırıştırma metodu ($v(x,t)=V(x)T(t)$, $w(x,t)=W(x)T(t)$, $\theta(x,t)=\Theta(x)T(t)$) uygulandığında hareket denklemleri şeklinde elde edilir.

$$(B_3 V''')'' - B_1 \omega^2 V = 0 \quad (31)$$

$$(B_4 W''')'' - B_1 \omega^2 W = 0 \quad (32)$$

$$(B_5 \Theta')' + B_2 \omega^2 \Theta = 0 \quad (33)$$

Eş. 31-33'de V ve W sırasıyla Y ve Z eksenlerindeki sehimi, Θ ise burulma açısını ifade etmektedir.

Sınır şartları ise Eş. 34-Eş. 43 biçiminde elde edilir.

x=0

Ankastre Serbest

$$V(0) = 0 \quad B_3'(0)V''(0) + B_3(0)V'''(0) = 0 \quad (34)$$

$$V'(0) = 0 \quad B_3(0)V''(0) = 0 \quad (35)$$

$$W(0) = 0 \quad B_4'(0)W''(0) + B_4(0)W'''(0) = 0 \quad (36)$$

$$W'(0) = 0 \quad B_4(0)W''(0) = 0 \quad (37)$$

$$\Theta(0) = 0 \quad B_5(0)\Theta'(0) = 0 \quad (38)$$

x=L

$$\bar{I}_{zz} \omega^2 V'(L) + M\bar{x} \omega^2 V(L) - \bar{I}_{xz} \omega^2 \Theta(L) + \bar{I}_{yz} \omega^2 W'(L) - B_3(L)V'''(L) = 0 \quad (39)$$

$$\bar{I}_{yy} \omega^2 W'(L) + M\bar{x} \omega^2 W(L) + \bar{I}_{xy} \omega^2 \Theta(L) + \bar{I}_{yz} \omega^2 V'(L) - B_4(L)W'''(L) = 0 \quad (40)$$

$$M \omega^2 V(L) - M\bar{z} \omega^2 \Theta(L) + M\bar{x} \omega^2 V'(L) + B_3'(L)V''(L) + B_3(L)V'''(L) = 0 \quad (41)$$

$$M \omega^2 W(L) + M\bar{y} \omega^2 \Theta(L) + M\bar{x} \omega^2 W'(L) + B_4'(L)W''(L) + B_4(L)W'''(L) = 0 \quad (42)$$

$$\bar{I}_{xx} \omega^2 \Theta(L) - M\bar{z} \omega^2 V(L) + M\bar{y} \omega^2 W(L) + \bar{I}_{xy} \omega^2 W'(L) - \bar{I}_{xz} \omega^2 V'(L) - B_5(L)\Theta'(L) = 0 \quad (43)$$

4. MDTM' NİN UYGULANMASI (APPLICATION OF MDTM)

Bu çalışmada hareket denklemleri dördüncü mertebeden olup eşitliklerde çok fazla değişken mevcuttur. Yöntemi uygularken kolaylık olması açısından aşağıdaki gibi (Eş. 44-Eş. 47) bazı dönüşümlerle türevlerin mertebesi düşürülmüştür. Böylece tekrarlar bağıntılarının yazılması ve bilgisayarda kodlanması daha kolaydır. Burada;

$$V' = \phi \quad (44)$$

$$W' = \xi \quad (45)$$

olarak tanımlanırsa

$$V'' = \phi' \quad (46)$$

$$W'' = \xi' \quad (47)$$

olur. Y ve Z eksenlerindeki eğilme momentleri Eş. 48, Eş. 49 ve burulma momenti ise Eş. 50'deki gibi düzenlenir.

$$B_3 V'' = B_3 \phi' = M_y \quad (48)$$

$$B_4 W'' = B_4 \xi' = M_z \quad (49)$$

$$M_t = B_5 \Theta' \quad (50)$$

Şu halde bu düzlemlerdeki kesme kuvvetleri sırasıyla Eş. 51 ve Eş. 52'deki gibi yazılabilir.

$$Y = (B_3 V''')' = M_y' \quad (51)$$

$$Z = (B_4 W''')' = M_z' \quad (52)$$

Son durumda ilgili denklemler aşağıdaki gibi birinci mertebe denklemlere dönüşmüş olur (Eş. 53-Eş. 55)

$$Y' - B_1 \omega^2 V = 0 \quad (53)$$

$$Z' - B_1 \omega^2 W = 0 \quad (54)$$

$$M_t' + B_2 \omega^2 \Theta = 0 \quad (55)$$

$V' = \phi$ eşitliğinin dönüşümü alınmış fonskiyonu Eş. 56'daki gibidir. MATLAB programında kodlamanın daha kolay olması bakımından Eş. 57'de belirtildiği gibi u_1 fonskiyonu ϕ' fonskiyonunu tanımlamak için kullanılmış ve dönüşümü alınmıştır.

$$(k+1)\bar{V}[k+1] = \bar{\phi}[k] \Rightarrow \bar{V}[k+1] = \frac{1}{(k+1)}\bar{\phi}[k] \quad (56)$$

$$u_1 = \phi' \Rightarrow \bar{U}_1[k] = (k+1)\bar{\phi}[k+1] \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_y[k] &= \sum_{l=0}^k \bar{B}_3[l]\bar{U}_1[k-l] = \bar{B}_3[0]\bar{U}_1[k] \\ &+ \sum_{l=1}^k \bar{B}_3[l]\bar{U}_1[k-l] \end{aligned} \quad (58)$$

$$\bar{U}_1[k] = \frac{\bar{M}_y[k] - \sum_{l=1}^k \bar{B}_3[l]\bar{U}_1[k-l]}{\bar{B}_3[0]}, \quad k \geq 1 \quad (59)$$

Eş. 58'de eğilme momenti fonskiyonunun dönüşümü alınmış, Eş. 59'da ise $\bar{U}_1[k]$ fonskiyonu ve dönüşümü alınmış eğilme momenti fonskiyonu arasındaki ilişki belirtilmiştir. Ayrıca kesme kuvvetinin (Y) dönüşümü alınmış fonskiyonu Eş. 60'daki gibidir.

$$\bar{Y}[k] = (k+1)\bar{M}_y[k+1] \quad (60)$$

Dolayısıyla Eş. 53'den ilk tekrarlamaya bağıntısı;

$$\bar{Y}[k+1] = \frac{1}{(k+1)}\omega^2 \sum_{l=0}^k \bar{B}_1[l]\bar{V}[k-l], \quad k \geq 0 \quad (61)$$

Eş. 61 olarak bulunur. İlk tekrarlamaya bağıntısının elde edilmesinde uygulanan işlem basamakları benzer şekilde 2. ve 3. tekrarlamaya bağıntılarını elde etmek için aşağıdaki gibi uygulanır.

$$(k+1)\bar{W}[k+1] = \bar{\xi}[k] \Rightarrow \bar{W}[k+1] = \frac{1}{(k+1)}\bar{\xi}[k] \quad (62)$$

$$u_2 = \xi' \Rightarrow \bar{U}_2[k] = (k+1)\bar{\xi}[k+1] \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_z[k] &= \sum_{l=0}^k \bar{B}_4[l]\bar{U}_2[k-l] = \bar{B}_4[0]\bar{U}_2[k] \\ &+ \sum_{l=1}^k \bar{B}_4[l]\bar{U}_2[k-l] \end{aligned} \quad (64)$$

$$\bar{U}_2[k] = \frac{\bar{M}_z[k] - \sum_{l=1}^k \bar{B}_4[l]\bar{U}_2[k-l]}{\bar{B}_4[0]}, \quad k \geq 1 \quad (65)$$

$$\bar{M}_z[k+1] = \frac{\bar{Z}[k]}{k+1} \quad (66)$$

2. tekrarlamaya bağıntısı;

$$\bar{Z}[k+1] = \frac{1}{(k+1)}\omega^2 \sum_{l=0}^k \bar{B}_1[l]\bar{W}[k-l], \quad k \geq 0 \quad (67)$$

Eş. 50 ve Eş. 52'den ;

$$(k+1)\bar{W}[k+1] = \bar{\xi}[k] \Rightarrow \bar{W}[k+1] = \frac{1}{(k+1)}\bar{\xi}[k] \quad (68)$$

$$u_3 = \Theta' \Rightarrow \bar{U}_3[k] = (k+1)\bar{\Theta}[k+1] \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_t[k] &= \sum_{l=0}^k \bar{B}_5[l]\bar{U}_3[k-l] = \bar{B}_5[0]\bar{U}_3[k] \\ &+ \sum_{l=1}^k \bar{B}_5[l]\bar{U}_3[k-l] \end{aligned} \quad (70)$$

$$\bar{U}_3[k] = \frac{\bar{M}_i[k] - \sum_{l=1}^k \bar{B}_3[l] \bar{U}_3[k-l]}{\bar{B}_3[0]}, \quad k \geq 1 \quad (71)$$

bağıntıları yazılır. Eş. 55'in diferansiyel dönüşümü alınarak 3. tekrarlılama bağıntısı;

$$\bar{M}_i[k+1] = -\frac{1}{(k+1)} \omega^2 \sum_{l=0}^k \bar{B}_2[l] \bar{\Theta}[k-l], \quad k \geq 0 \quad (72)$$

şeklinde elde edilir. Çalışmada kiriş boyunun [0,L] üç eşit parçaya bölüldüğü kabul edilmiş olup her bir parça için denklemler Eş. 73 ve Eş. 74'deki gibi ifade edilmiştir.

$$W(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^K (\bar{V}_1[k], \bar{W}_1[k])(x-x_1)^k & x \in [0, x_1] \\ \sum_{k=0}^K (\bar{V}_2[k], \bar{W}_2[k])(x-x_2)^k & x \in [x_1, x_2] \\ \sum_{k=0}^K (\bar{V}_3[k], \bar{W}_3[k])(x-x_3)^k & x \in [x_2, x_3] \end{cases} \quad (73)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^K \bar{\Theta}_1[k](x-x_1)^k & x \in [0, x_1] \\ \sum_{k=0}^K \bar{\Theta}_2[k](x-x_2)^k & x \in [x_1, x_2] \\ \sum_{k=0}^K \bar{\Theta}_3[k](x-x_3)^k & x \in [x_2, x_3] \end{cases} \quad (74)$$

Bu eşitliklerde $x_1 = L/3$, $x_2 = 2L/3$ ve $x_3 = L$ 'dir. Ardışık kiriş parçaları arasındaki uygunluk şartları ise Eş. 75-84'de verilmiştir.

$$\bar{V}_{i+1}[k] = \bar{V}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (75)$$

$$\bar{W}_{i+1}[k] = \bar{W}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (76)$$

$$\bar{\Theta}_{i+1}[k] = \bar{\Theta}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (77)$$

$$\bar{\phi}_{i+1}[k] = \bar{\phi}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (78)$$

$$\bar{\xi}_{i+1}[k] = \bar{\xi}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (79)$$

$$\bar{M}_{y_{i+1}}[k] = \bar{M}_{y_i}[k](x_i - x_{i-1})^k, \quad i = 1, 2 \text{ and } k = 0, 1, 2, \dots, K \quad (80)$$

$$\bar{Y}_{i+1}[k] = \bar{Y}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (81)$$

$$\bar{Z}_{i+1}[k] = \bar{Z}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (82)$$

$$\bar{M}_{z_{i+1}}[k] = \bar{M}_{z_i}[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (83)$$

$$\bar{M}_{i+1}[k] = \bar{M}_i[k](x_i - x_{i-1})^k \quad (84)$$

Orijinal sınır şartlarına Tablo 2'deki dönüşüm kuralları uygulandığında ankastre ve serbest sınır şartları için aşağıdaki denklemler elde edilir (Eş. 85-Eş. 94).

$x=0$ 'daki sınır şartları;

$$\text{Ankastre Serbest} \quad \bar{V}[0] = 0 \quad \bar{M}_y[0] = 0 \quad (85)$$

$$\bar{W}[0] = 0 \quad \bar{M}_z[0] = 0 \quad (86)$$

$$\bar{\Theta}[0] = 0 \quad \bar{M}_t[0] = 0 \quad (87)$$

$$\bar{\phi}[0] = 0 \quad \bar{Y}[0] = 0 \quad (88)$$

$$\bar{\xi}[0] = 0 \quad \bar{Z}[0] = 0 \quad (89)$$

$x=L$ 'deki sınır şartları;

$$\bar{I}_{zz} \omega^2 \bar{\phi}[L] + M \bar{x} \omega^2 \bar{V}[L] - \bar{I}_{xz} \omega^2 \bar{\Theta}[L] + \bar{I}_{yz} \omega^2 \bar{\xi}[L] - \bar{M}_y[L] = 0 \quad (90)$$

$$\bar{I}_{yy} \omega^2 \bar{\xi}[L] + M \bar{x} \omega^2 \bar{W}[L] + \bar{I}_{xy} \omega^2 \bar{\Theta}[L] + \bar{I}_{yz} \omega^2 \bar{\phi}[L] - \bar{M}_z[L] = 0 \quad (91)$$

$$\bar{I}_{xx} \omega^2 \bar{\Theta}[L] - M \bar{z} \omega^2 \bar{V}[L] + M \bar{y} \omega^2 \bar{W}[L] + \bar{I}_{xy} \omega^2 \bar{\xi}[L] - \bar{I}_{xz} \omega^2 \bar{\phi}[L] - \bar{M}_t[L] = 0 \quad (92)$$

$$M \omega^2 \bar{V}[L] - M \bar{z} \omega^2 \bar{\Theta}[L] + M \bar{x} \omega^2 \bar{\phi}[L] + \bar{Y}[L] = 0 \quad (93)$$

$$M \omega^2 \bar{W}[L] + M \bar{y} \omega^2 \bar{\Theta}[L] + M \bar{x} \omega^2 \bar{\xi}[L] + \bar{Z}[L] = 0 \quad (94)$$

Kirişin sol ucunun ankastre veya serbest olması durumunda sırasıyla Eş. 95 ve Eş. 96'daki kabuller yapıp yukarıda verilen denklemler (Eş. 90-94) matris formunda Eş. 97'deki gibi yazılır.

$$\bar{M}_y[0] = c_1, \quad \bar{Y}[0] = c_2, \quad \bar{M}_z[0] = c_3, \quad \bar{Z}[0] = c_4, \quad \bar{M}_t[0] = c_5 \quad (95)$$

$$\bar{V}[0] = c_1, \quad \bar{W}[0] = c_2, \quad \bar{\Theta}[0] = c_3, \quad \bar{\phi}[0] = c_4, \quad \bar{\xi}[0] = c_5 \quad (96)$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & H_{13}(\omega) & H_{14}(\omega) & H_{15}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & H_{23}(\omega) & H_{24}(\omega) & H_{25}(\omega) \\ H_{31}(\omega) & H_{32}(\omega) & H_{33}(\omega) & H_{34}(\omega) & H_{35}(\omega) \\ H_{41}(\omega) & H_{42}(\omega) & H_{43}(\omega) & H_{44}(\omega) & H_{45}(\omega) \\ H_{51}(\omega) & H_{52}(\omega) & H_{53}(\omega) & H_{54}(\omega) & H_{55}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (97)$$

Burada $H_{ij}(\omega)$, ($i,j=1,2,3,4,5$) frekans parametresine bağlı olarak hesaplanan katsayılardır. Sistemin doğal frekansları Eş. 98'deki gibi katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek, mod şekilleri ise elde edilen doğal frekansların Eş. 97'de yerine yazılmasıyla elde edilir.

$$\begin{vmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & H_{13}(\omega) & H_{14}(\omega) & H_{15}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & H_{23}(\omega) & H_{24}(\omega) & H_{25}(\omega) \\ H_{31}(\omega) & H_{32}(\omega) & H_{33}(\omega) & H_{34}(\omega) & H_{35}(\omega) \\ H_{41}(\omega) & H_{42}(\omega) & H_{43}(\omega) & H_{44}(\omega) & H_{45}(\omega) \\ H_{51}(\omega) & H_{52}(\omega) & H_{53}(\omega) & H_{54}(\omega) & H_{55}(\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (98)$$

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR (RESULTS AND DISCUSSIONS)

Dikdörtgen kesitli EB kiriş modelinde, kiriş genişliği ve uzunluğu sabit tutulup sadece Y yönünde lineer olarak bir kesit daralması göz önüne alınmıştır. Kiriş boyunca kesit alanı ve alan atalet momentlerinin değişimi $A(x)=A_0(1-c_h x/L)$, $I_1(x)=I_{10}(1-c_h x/L)$, $I_2(x)=I_{20}(1-c_h x/L)$ olup $c_h=1-h_1/h_0$ kesit daralma oranını göstermektedir. Kiriş ve uç kütle malzemeleri çelik olup, Şekil 1'deki sistemin fiziksel özellikleri Tablo 3 ve Tablo 4'de verilmiştir.

Bu çalışmada iki farklı sınır koşuluna sahip sistem için doğal frekanslar ve mod şekilleri belirlenmiş ve sonuçlar sonlu eleman modeli (ANSYS) ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca farklı kesit daralma oranları, kiriş uzunluğu ve uç kütle boyutlarının doğal frekanslar üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Sistemin ANSYS Workbench ortamındaki analizinde SOLID187 elemanı kullanılmış, otomatik mesh (uniform, fine mesh) uygulanarak 2779 elemana bölünmüş

ve mesh görüntüsü Şekil 2' de verilmiştir. Modal analiz için Block Lanczos yöntemi uygulanmıştır. Bu tanımlamaların yanı sıra, kiriş üzerinde Z-ekseni ve Y-ekseni doğrultusundaki eğilme modlarını elde etmek için Şekil 3'de gösterilen yollar (*path*) tanımlanmış ve mod şekilleri bu yollar üzerinden elde edilmiştir. Zira böyle bir sistemin deneysel mod şekli ölçülecek olsaydı ivmeölçer muhtemelen bu yollar üzerinde uygun bir konuma yerleştirilecekti.

Tablo 5'de farklı sınır şartları için kiriş-uç kütle sisteminin Y ve Z eksenleri boyunca ilk üç doğal frekansı gösterilmiştir. MDTM ile elde edilen frekanslar ANSYS ile elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Tablodan görüldüğü gibi söz konusu yarı analitik yöntem sonuçları ile sonlu eleman sonuçları oldukça uyumludur.

Diğer bir parametrik çalışma olarak kiriş uzunluğunun doğal frekanslar üzerindeki etkisi ankastre sınır şartı için incelenmiş, uç kütle ve kirişin geometrik özellikleri Tablo 3 ve 4'deki gibi dikkate alınmıştır. Tablo 6'dan açıkça görülmektedir ki kiriş boyu kısaltıkça sistemin doğal frekansları artmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminin kullandığı kiriş modeli ve EB kiriş hipotezi arasındaki fark nedeniyle frekans arttıkça iki yöntemin sonuçları arasındaki fark da (özellikle kısa kirişlerde) belirginleşmektedir.

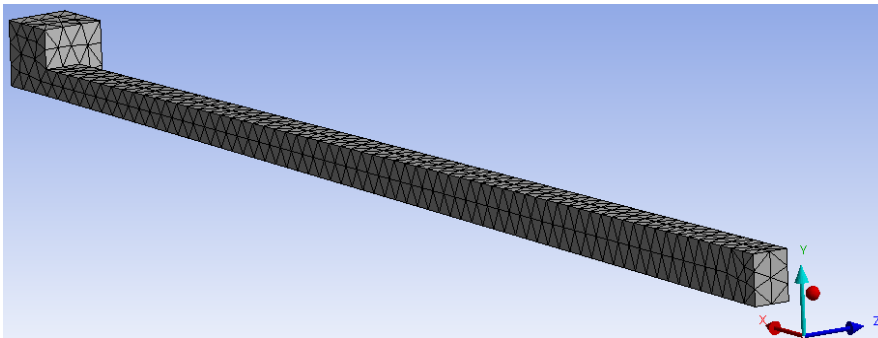
Tablo 7, 8 ve 9 uç kütle boyutlarının doğal frekanslar üzerindeki etkisini göstermektedir. Oguamanam ve Arshad [17] yaptıkları çalışmada uç kütle merkezinin sadece tek bir eksende çakışık olmadığı durumu dikkate almışlardır. Bu çalışmada diğer doğrultudaki kaçıklıkların etkisi de incelenmiştir. Tablo 7 uç kütle boyutlarının eşit oranlarda artırılması durumunda sistemin doğal frekanslarındaki değişimi göstermektedir. Bu durumda sistemin doğal frekansları, uç

Tablo 3. Kirişin geometri ve malzeme özellikleri (Beam geometry and material properties)

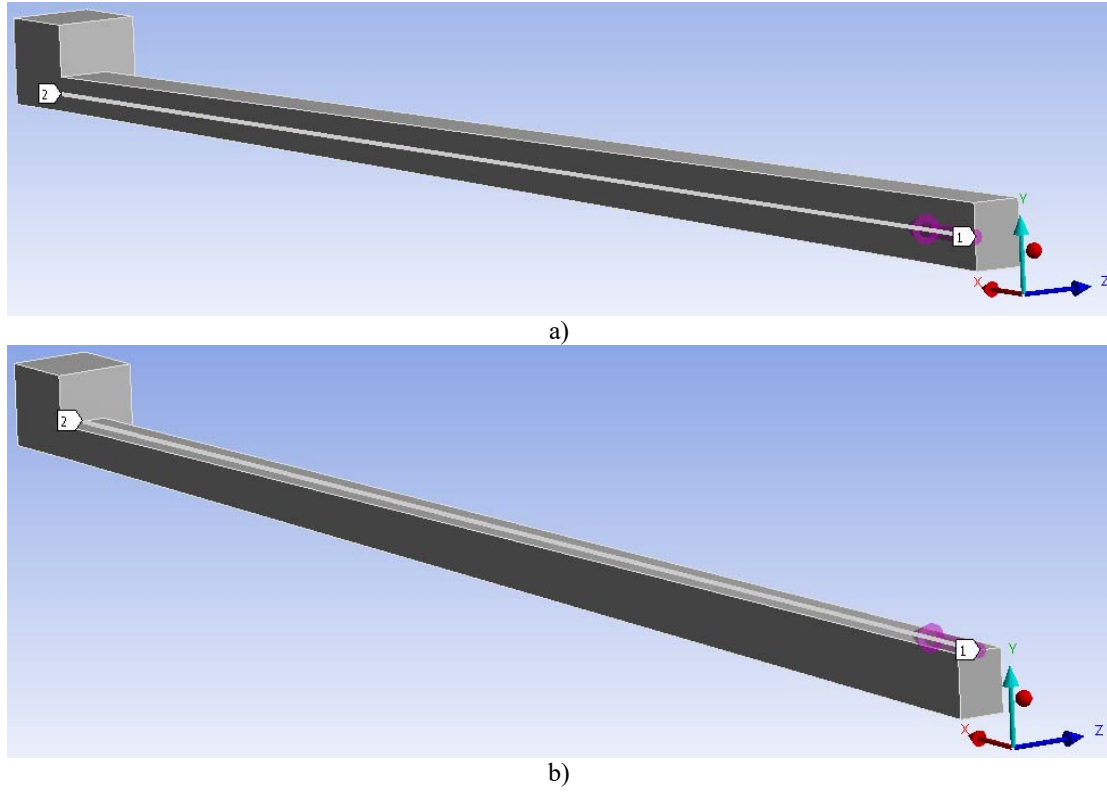
Elastisite Modülü (E)	Yoğunluk (ρ)	Poisson Oranı (ν)	Uzunluk (L)	İlk yükseklik (h_0)	Son yükseklik (h_1)	Genişlik (b_0, b_1)
200GPa	7850 kg/m ³	0,3	1 m	40 mm	20 mm	30 mm

Tablo 4. Uç kütle geometri ve malzeme özellikleri (Tip mass geometry and material properties)

E	ρ	ν	x	y	z	x_t	y_t	z_t
200 GPa	7850 kg/m ³	0,3	50 mm	50 mm	50 mm	25 mm	15 mm	10 mm



Şekil 2. Sistemin ANSYS ortamındaki mesh görüntüsü (The mesh view of the system in the ANSYS environment)



Şekil 3. Kiriş üzerinde a) Z-eksenindeki b) Y-eksenindeki eğilme modlarının eldesi için yol (*path*) tanımlanması
(Paths along the beam axis for bending modes along (a) Z-axis (b) Y-axis)

Tablo 5. Ankastr ve serbest sınır şartları için MDTM (M) ve ANSYS (A) sonuçlarının karşılaştırılması
(Comparison of MDTM and ANSYS results for clamped and free boundary conditions)

Sınır Şartı	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
Ankastr	M	22,447	128,774	357,480	25,896	129,592	344,939
	A	22,480	128,620	354,170	25,915	129,410	344,370
Serbest	M	117,337	335,830	702,108	124,186	353,498	666,825
	A	115,790	331,550	690,810	124,760	352,330	655,540

kütlenin artması ile ters orantılıdır. Ayrıca MDTM ve ANSYS sonuçlarının yeterince yakın olduğu görülmektedir.

Diğer bir parametrik çalışma olarak uç kütle boyutlarının eğilme eksenleri doğrultularındaki değişimi ele alınmış, bunun doğal frekanslara etkisi incelenmiştir (Tablo 8 ve Tablo 9). Beklenildiği gibi, ilgili tablolar, uç kütle boyutları arttıkça doğal frekansların azaldığını göstermektedir. Ayrıca MDTM ve ANSYS sonuçları diğer tablolarda olduğu gibi oldukça uyumludur, fakat uç kütle büyüdükçe yüksek frekanslarda (Y ve Z eksen boyunca 3. frekans) hata oranı artmaktadır. Bunun da sebebi, yukarıda ifade edildiği gibi, yüksek frekanslarda EB kiriş hipotezinin yeterli olmamasıdır. Son olarak, uniform olmayan kirişin kesit daralma oranının doğal frekanslar üzerindeki etkisi

incelenmiştir. Tablo 10'da görüldüğü gibi artan kesit daralma oranıyla doğal frekanslar artmaktadır. Çünkü kiriş kesit alanı artmakta, bu da eğilme mukavemetini arttırmaktadır. Yine iki yöntem de birbiriyle gayet uyumludur.

5.1. Mod Şekilleri (Mod Shapes)

Şekil 3-4 ve Şekil 5-6 sırasıyla ankastr ve serbest sınır şartları için, özellikleri Tablo 3 ve Tablo 4'te verilen kiriş ve uç kütle özelliklerine sahip sistemin mod şekillerini göstermektedir. MDTM ile elde edilen mod şekilleri ANSYS'de elde edilen mod şekillerine oldukça benzemektedir. Serbest sınır şartı için Z-eksenindeki 3. mod çok hatalı olarak elde edilmiş, dolayısıyla Şekil 6'ya

Tablo 6. Kiriş uzunluğunun doğal frekanslar üzerindeki etkisi (Ankastre sınır şartı)
(The effect of beam length on the natural frequencies (Clamped boundary condition))

L (m)	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0,5	M	72,800	443,000	1225,800	82,600	450,600	871,300
	<u>A</u>	72,814	439,360	1146,700	82,632	444,080	852,450
0,6	M	53,889	323,249	898,878	61,487	326,230	750,345
	<u>A</u>	53,940	321,490	856,210	61,505	323,230	738,750
0,7	M	41,586	246,165	685,968	47,624	247,352	628,157
	<u>A</u>	41,639	245,270	661,700	47,647	245,850	624,500
0,8	M	33,100	193,652	539,390	38,019	194,325	510,681
	<u>A</u>	33,140	193,060	526,370	38,040	193,580	509,170
0,9	M	27,000	156,259	434,713	31,079	156,989	416,700
	<u>A</u>	27,036	155,980	428,640	31,102	156,670	416,110
1	M	22,447	128,774	357,480	25,896	129,592	344,939
	<u>A</u>	22,480	128,620	354,170	25,915	129,410	344,370
1,1	M	18,967	108,016	299,300	21,918	108,875	289,872
	<u>A</u>	18,982	107,790	296,210	21,926	108,670	288,530
1,2	M	16,243	91,936	254,258	18,798	92,805	246,833
	<u>A</u>	16,256	91,784	252,170	18,805	92,665	245,850
1,3	M	14,070	79,227	218,694	16,304	80,081	212,684
	<u>A</u>	14,081	79,124	217,230	16,310	79,981	211,950
1,4	M	12,307	69,006	190,130	14,277	69,830	185,163
	<u>A</u>	12,317	68,934	189,080	14,283	69,757	184,600
1,5	M	10,858	60,658	166,842	12,609	61,448	162,671
	<u>A</u>	10,866	60,609	166,070	12,614	61,394	162,240

Tablo 7. Uç kütle boyutlarının doğal frekanslar üzerindeki etkisi (L=1 m)
(The effect of tip mass dimensions on the natural frequencies)

Uç Kütle Boyutları (x,y,z) (mm)	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
50x50x50	M	22,447	128,774	357,480	25,896	129,592	344,939
	<u>A</u>	22,480	128,620	354,170	25,915	129,410	344,370
60x60x60	M	19,398	119,733	337,612	22,172	120,261	316,747
	<u>A</u>	19,428	119,770	331,910	22,190	119,980	320,180
70x70x70	M	16,611	112,470	316,653	18,835	112,972	263,101
	<u>A</u>	16,635	112,440	306,790	18,852	112,830	274,380
80x80x80	M	14,219	105,940	306,790	16,017	107,101	201,830
	<u>A</u>	14,240	105,910	293,619	16,024	107,020	213,350
90x90x90	M	12,228	99,765	279,670	13,702	101,173	156,225
	<u>A</u>	12,245	99,246	268,477	13,718	101,410	165,970
100x100x100	M	10,588	92,639	242,916	11,812	94,958	124,489
	<u>A</u>	10,603	91,931	222,630	11,829	95,240	132,640

eklenmemiştir. Bu moda ait doğal frekanstaki hata yaklaşık %2 civarında iken mod şekillerinin oldukça farklı çıkmasının muhtemel bir sebebi bu modda burulma genliklerinin de önemli derecede etkili olmasıdır. Yani burulma hareketi de

baskın olduğu için ANSYS ile hesaplanan mod şekli daha farklı olabilir. Halbuki MDTM'de sadece eğilme hareketine ait mod şekilleri çizdirilmiştir. Bir diğer muhtemel sebep de EB giriş modelinin yüksek frekanslarda yetersiz kalmasıdır.

Tablo 8. Uç kütle boyutlarının doğal frekanslar üzerindeki etkisi (L=1 m, x ve z sabit)
 (The effect of tip mass dimensions on the natural frequencies ((L=1 m, x and z are constant))

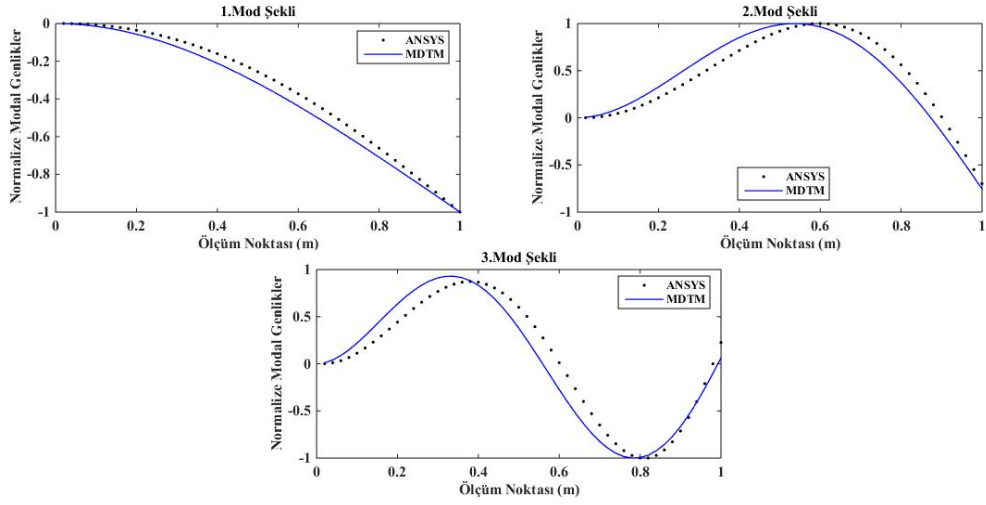
y (mm)	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
50	M	22,447	128,774	357,480	25,896	129,592	344,939
	<u>A</u>	22,480	128,620	354,170	25,915	129,410	344,370
60	M	21,503	126,000	351,764	24,738	126,645	336,146
	<u>A</u>	21,520	125,620	343,770	24,746	126,310	335,210
70	M	20,665	123,618	346,232	23,717	124,139	324,158
	<u>A</u>	20,681	123,160	334,020	23,724	123,740	323,130
80	M	19,914	121,474	340,499	22,806	121,916	306,750
	<u>A</u>	19,929	120,920	324,780	22,814	121,420	303,070
90	M	19,237	119,462	334,261	21,987	119,876	284,093
	<u>A</u>	19,250	118,770	315,150	21,987	119,230	277,940
100	M	18,622	117,487	327,285	21,246	117,950	259,808
	<u>A</u>	18,632	116,630	304,430	21,257	117,090	252,760

Tablo 9. Uç kütle boyutlarının doğal frekanslar üzerindeki etkisi (L=1 m, x ve y sabit)
 (The effect of tip mass dimensions on the natural frequencies ((L=1 m, x and y are constant))

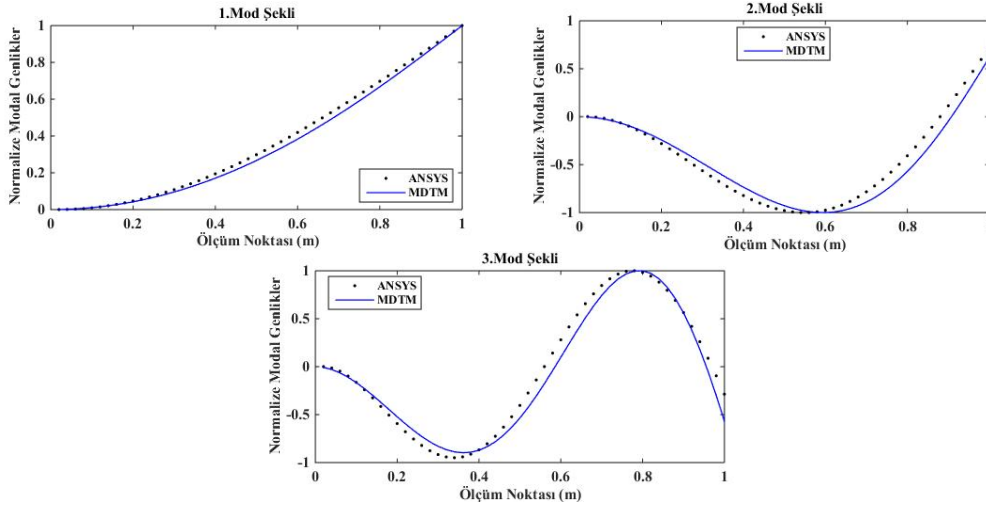
z (mm)	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
50	M	22,447	128,774	357,480	25,896	129,592	344,939
	<u>A</u>	22,480	128,620	354,170	25,915	129,410	344,370
60	M	21,504	126,033	350,391	24,738	126,657	337,653
	<u>A</u>	21,520	125,700	347,150	24,748	126,430	335,020
70	M	20,667	123,650	341,999	23,718	124,158	327,767
	<u>A</u>	20,681	123,550	342,000	23,727	124,020	323,640
80	M	19,917	121,481	332,689	22,809	121,938	311,349
	<u>A</u>	19,931	121,260	336,780	22,818	121,890	306,430
90	M	19,240	119,410	323,359	21,993	119,891	287,523
	<u>A</u>	19,254	119,310	331,080	22,001	119,930	283,460
100	M	18,625	117,352	313,589	21,254	117,926	261,563
	<u>A</u>	18,638	117,410	324,540	21,261	118,080	258,710

Tablo 10. Kesit daralma oranının (c_h) doğal frekanslar üzerindeki etkisi (L=1 m)
 (The effect of taper ratio on the natural frequencies)

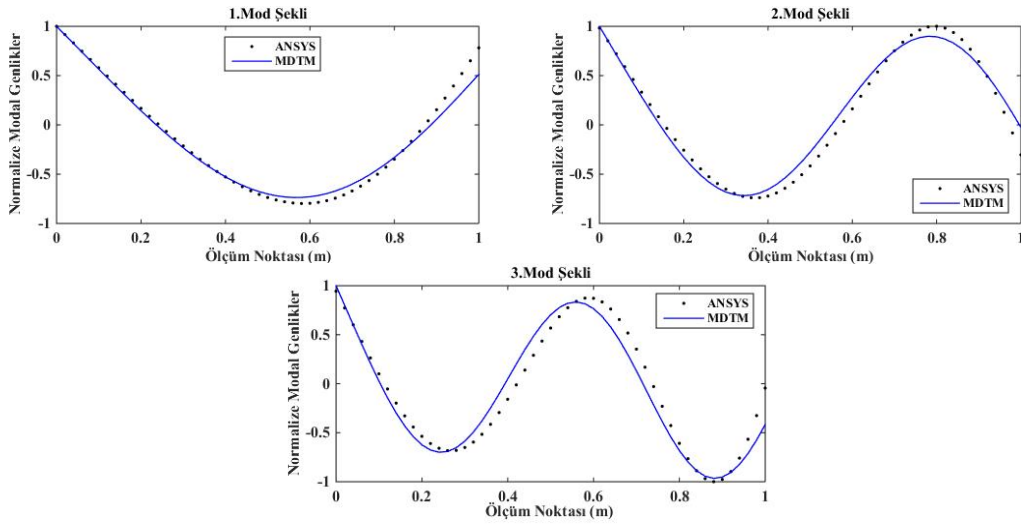
c_h	Yöntem	Z-ekseni boyunca (Hz)			Y-ekseni boyunca (Hz)		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0,5	M	22,447	128,774	357,480	25,896	129,592	344,939
	<u>A</u>	22,480	128,620	354,170	25,915	129,410	344,370
0,6	M	24,205	131,499	397,249	33,480	152,647	360,170
	<u>A</u>	24,244	131,340	394,500	33,490	152,210	357,020
0,75	M	28,193	137,739	543,944	57,799	219,189	366,783
	<u>A</u>	28,263	137,680	531,030	57,743	217,410	363,930



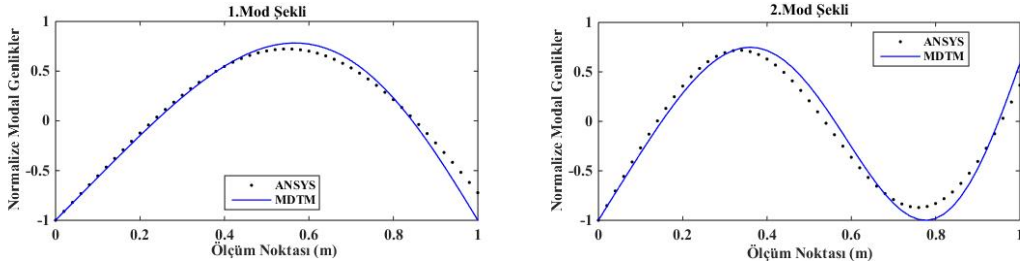
Şekil 3. Ankastré kirişin Y-ekseni boyunca mod şekilleri (Mode shapes along Y-axis for Clamped beam)



Şekil 4. Ankastré kirişin Z-ekseni boyunca mod şekilleri (Mode shapes along Z-axis for Clamped beam)



Şekil 5. Serbest kirişin Y-ekseni boyunca mod şekilleri (Mode shapes along Y-axis for Free beam)



Şekil 6. Serbest kirişin Z-ekseni boyunca mod şekilleri (Mode shapes along Z-axis for Free beam)

6. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Birçok mühendislik probleminin matematiksel modellenmesinde adi veya kısmi diferansiyel denklemler sıklıkla kullanılmaktadır. Bu denklemler çoğunlukla yüksek mertebeden lineer ya da nonlineer diferansiyel denklem şeklinde olup, analitik çözümü zordur. Bu yüzden birçok araştırmacı, alternatif çözüm olarak yarı-analitik ya da nümerik yöntemler uygulamakta, daha basit algoritmalarla daha hızlı ve doğru sonuçlar elde etmektedir. DTM ya da MDTM, son yıllarda ilgi çeken ve sıklıkla kullanılan nümerik yöntemlerden biridir. Bu çalışmada 3B uç eklenti taşıyan değişken kesitli EB kirişinin serbest titreşim analizi MDTM yöntemiyle incelenmiş ve elde edilen sonuçlar sonlu eleman yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Parametrik çalışmalarla göre, sistemin doğal frekansları kiriş ve uç kütle boyutlarıyla ters orantılı, kesit daralma oranı ile doğru orantılıdır. Ayrıca MDTM ve ANSYS sonuçlarının genel olarak birbirine yakın olduğu, aralarındaki farkın kısa kiriş ve yüksek frekanslarda daha belirgin olduğu gözlenmiştir. Bunun asıl sebebi EB hipotezinin kısa kirişlerin yüksek frekanslarında yetersiz kalmasıdır. Öte yandan ANSYS'de SOLID187 elemanı kullanılmış olup bu eleman üç eksen de deforme olabilmekte, dolayısıyla daha gerçekçidir. Bu durum mod şekilleri arasında da sapmalara sebep olur. Sapmanın önemli bir sebebi de kirişin burulma deformasyonudur. MDTM yöntemi ile elde edilen mod şekilleri sadece eğilme hareketlerine ait iken ANSYS eğilme ve burulma kombine deformasyonuna ait sonuçları vermektedir. Bu durum da her iki yöntem arasında farka sebep olabilir. Tüm bu farklılıklara rağmen, özellikle ilk birkaç frekansta MDTM'nin de kabul edilebilir sonuçlar verdiği görülmüştür. Bundan sonraki çalışmalarda EB yerine Timoshenko modelinin kullanılması, sonuçların deneysel veri ile karşılaştırılması, ele alınan sistemdeki kirişin fonksiyonel derecelendirilmiş (*functionally graded*) malzeme özelliklerine sahip olması, böyle bir kirişin sabit hızla belli bir eksen etrafında dönmesi halinde eğilme-burulma kombine titreşimlerinin MDTM ile incelenmesi gibi hususların ele alınması planlanmaktadır.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Boyce W.E., Handelman G.H., Vibration of Rotating Beams with Tip Mass, Journal of Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 12 (5), 369-392, 1961.
2. Craig R.R., Rotating Beam with Tip Mass Analyzed by a Variational Method, Journal of the Acoustical Society of America, 35 (7), 990, 1963.
3. Gürgöze M., Özgür K., Erol H., On the Eigenfrequencies of a Cantilevered Beam with a Tip Mass and In-Span Support, Computers & Structures, 56 (1), 85-92, 1995.
4. Gürgöze M., On the Eigenfrequencies of a Cantilever Beam with Attached Tip Mass and a Spring-Mass System, Journal of Sound and Vibration, 190 (2), 149-162, 1996.
5. Mabie H.H., Rogers C.B., Transverse Vibrations of Tapered Cantilever Beam with End Loads, Journal of the Acoustical Society of America, 36 (3), 463, 1964.
6. Kuo Y.H., Wu T.H., Lee S.Y., Bending Vibrations of a Rotating Non-Uniform Beam with Tip Mass and an Elastically Restrained Root, Computers & Structures, 42 (2), 229-236, 1992.
7. Auciello N.M., Transverse Vibrations of a Linearly Tapered Cantilever Beam with Tip Mass of Rotatory Inertia and Eccentricity, Journal of Sound and Vibration, 194 (1), 25-34, 1996.
8. Auciello N.M., Nole G., Vibrations of a Cantilever Tapered Beam with Varying Section Properties and Carrying a Mass at the free end, Journal of Sound and Vibration, 214 (1), 105-119, 1998.
9. Auciello N.M., Free Vibration of a Restrained Shear-Deformable Tapered Beam with a Tip Mass at its Free End, Journal of Sound and Vibration, 237 (3), 542-549, 2000.
10. Wu J.-S., Chen C.-T., An Exact Solution for the Natural Frequencies and Mode Shapes of an Immersed Elastically Restrained Wedge Beam Carrying an Eccentric Tip Mass Moment of Inertia, Journal of Sound and Vibration, 286, 549-568, 2005.
11. Boiangiu M., Ceausu V., Untariou C.D., A Transfer Matrix Method for Free Vibration Analysis of Euler-Bernoulli Beams with Variable Cross Section, Journal of Vibration of Control, 22 (11), 2591-2602, 2014.
12. Yang K.Y., The Natural Frequencies of a Non-Uniform Beam with a Tip Mass and With Translational and Rotational Springs, Journal of Sound and Vibration, 137 (2), 339-341, 1990.
13. Tang H.-L., Shen Z.-B., Li D.-K., Vibration of Nonuniform Carbon Nanotube with Attached Mass via Nonlocal Timoshenko Beam Theory, 28 (9), 3741-3747, 2014.

14. Hoa S.V., Vibration of a Rotating Beam with Tip Mass, *Journal of Sound and Vibration*, 67 (3), 369-381, 1979.
15. Oguamanam D.C.D., Free Vibration of Beams with Finite Mass Rigid Tip Load and Flexural-Torsional Coupling, *International Journal of Mechanical Science*, 45, 963-979, 2003.
16. Gökdağ H., Kopmaz O., Coupled Bending and Torsional Vibration of a Beam with in-span and tip attachments, *Journal of Sound and Vibration*, 287, 591-610, 2005.
17. Oguamanam, D.C.D., Arshad, M., On the Natural Frequencies of a Flexible Manipulator with a Tip Load, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 219, 1199-1205, 2005.
18. Salarieh H., Ghorashi M., Free Vibration of Timoshenko Beam with Finite Mass Rigid Tip Load and Flexural-Torsional Coupling, *International Journal of Mechanical Science*, 48, 763-779, 2006.
19. Vakil M., Sharbati E., Vakil A., Heidari F., Fotouhi R., Vibration Analysis of a Timoshenko Beam on a Moving Base, *Journal of Vibration and Control*, 21 (6), 1068-1085, 2013.
20. Ansari M., Esmailzadeh E., Jalili N., Coupled Vibration and Parameter Sensitivity Analysis of Rocking-Mass Vibrating Gyroscopes, *Journal of Sound and Vibration*, 327, 564-583, 2009.
21. Ansari M., Esmailzadeh E., Jalili N., Exact Frequency Analysis of a Rotating Cantilever Beam With Tip Mass Subjected to Torsional-Bending Vibrations, *Journal of Vibration and Acoustics*, 133 (4), 041003, 2011.
22. Burlon, A., Failla, G., Arena, F., Coupled Bending and Torsional Free Vibrations of Beams With In-Span Supports and Attached Masses, *European Journal of Mechanics A/Solids*. 66, 387-411, 2017.
23. Katı, H. D., Gökdağ, H., Free Vibration of a Timoshenko Beam Carrying Three Dimensional Tip Mass: Analytical Solution and Experimental Modal Testing, *Materials Testing*, 59 (6), 591-597, 2017
24. Pukhov, G.E., Expansion Formulas for Differential Transforms. *Cybern Syst. Anal.* 17, 460-464, 1981.
25. Pukhov, G.E., Differential Transforms and Circuit Theory. *Int. J. Circ. Theor. App.* 10, 265-276, 1982.
26. Zhou, J.K., *Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits*. Huazhong University Press. Wuhan China, 1986.
27. Rashidi, M.M., Chamkha, A.J., Keimanesh, M., Application of Multi-Step Differential Transform Method on Flow of a Second-Grade Fluid over a Stretching or Shrinking Sheet. *American Journal of Computational Mathematics*. 6, 119-128, 2011.
28. Liu, Z., Yin, Y., Wang, F., Zhao, Y., Cai, L., Study on Modified Differential Transform Method for Free Vibration Analysis of Uniform Euler-Bernoulli Beam, *Structural Engineering and Mechanics*. 48, 697-709, 2013.
29. Rajasekaran, S., Differential Transformation and Differential Quadrature Methods for Centrifugally Stiffened Axially Functionally Graded Tapered Beams. *International Journal of Mechanical Science*. 74, 15-31, 2013.
30. Yesilce, Y., Determination of Natural Frequencies and Mode Shapes of Axially Moving Timoshenko Beams with Different Boundary Conditions using Differential Transform Method. *Adv. Vib. Eng.* 12 (1), 90-108, 2013.
31. Yesilce, Y., Differential Transform Method and Numerical Assembly Technique for Free Vibration Analysis of the Axial-Loaded Timoshenko Multi-step Beam Carrying a Number of Intermediate Lumped Masses and Rotary Inertias. *Structural Engineering and Mechanics*. 53 (3), 537-573, 2015.
32. Liu, B., Zhou, X., Du, Q., Differential Transform Method for Some Delay Differential Equations, *Applied Mathematics*. 6, 585-593, 2015.
33. Ghafarian, M., Ariaei, A., Free Vibration Analysis of a System of Elastically Interconnected Rotating Tapered Timoshenko Beams using Differential Transform Method, *International Journal of Mechanical Sciences*. 107, 93-109, 2016.
34. Bozyigit, B., Yesilce, Y., Catal, S., Differential Transform Method and Adomian Decomposition Method for Free Vibration Analysis of Fluid Conveying Timoshenko Pipeline, *Structural Engineering and Mechanics*. 62, 65-77, 2017.
35. Arvin, H., Free Vibration Analysis of Micro Rotating Beams Based on the Strain Gradient Theory using the Differential Transform Method: Timoshenko versus Euler-Bernoulli Beam Models, *European Journal of Mechanics A/Solids*. 65, 336-348, 2017.
36. Nourifar, M., Sani, A. A., Keyhani, A., Efficient Multi-step Differential Transform Method: Theory and Its Application to Nonlinear Oscillators, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 53, 154-183, 2017.

