ABMYO
Dergisi. 15, (2009) (45-50)

Bulanık Enformasyon

İsmail TOK*

Özet

Bu çalışmada ilk olarak, bulanık olasılık uzayının bazı temel özellikleri detaya ve ispatlara girilmeksizin incelenmektedir. Daha sonra, kararsızlık ve bulanık enformasyon tanımları veriliyor. Son olarak da, bulanık enformasyonun bazı özellikler ispatlanıyor.

Anahtar kelimeler : *Bulanık küme, bulanık olasılık uzayı, kararsızlık, bulanık enformasyon.*

Fuzzy Information

Abstract

In this work firstly, we investigate some basic properties of the fuzzy probability space without into details and all proofs.After that,we give the definition of the uncertainty and fuzzy information.Finally,we prove some properties of the fuzzy information.

Key words : Fuzzy set,fuzzy probability space,uncertaity,fuzzy information.

Giriş

Zadeh 1965 ve 1968 yıllarında yaptığı çalışmalarında ilk defa bulanık küme kavramını ve bulanık olasılık uzayının bazı özelliklerini matematiğe kazandırmıştır.(Zadeh-a ve Zadeh-b). 1979 yılında yaptığı bir başka çalışmasında da enformasyon ile ilgili bazı sonuçlar elde etmiştir.(Zadeh-c)).

*İstanbul Aydın Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü İstanbul-Türkiye.

Daha sonra, birçok bilim adamı ortaya atılan bu yeni kavramlar üzerine eğilerek 1965 ' den günümüze kadar yoğun bir çalışma göstererek klasik matematik kavramlarını ve sonuçlarını bulanık anlamda da ifade etmeye çalışmışlardır. Böylece, çeşitli matematik konularında birçok çalışma ortaya çıkmıştır.

Halen bulanık anlamda ifade edilemeyen klasik matematik konularındaki çalışmalar devam etmektedir. Çok az istatistik konuları da bulanık anlamda irdelenmiştir. Bulanık anlamda incelenmeyen birçok klasik istatistik sonuçları vardır.
Enformasyon kuramında, bir enformasyon kaynağının entropisi kavramının çok önemli yeri vardır. Bu konudaki klasik sonuçlar birçok araştırmacının çalışmalarında mevcuttur.(Ash, Bezedek ve Billingsley'e bakınız).
Yazar bir çalışmasında bulanık enformasyon fonksiyonun bazı özelliklerini incelemiştir.(Tok-b 'ye bakınız)).Bu konu ile ilgili diğer sonuçlar için, Dimitrov,Dubois-a ve Diğerleri ve Klir ve diğerleri 'ne bakınız.Entropi ile ilgili özellikler bu çalışmada incelenmeyecektir. Bu makalenin gayesi, kararsızlık ve bulanık enformasyon ile ilgili bazı sonuçları elde etmektir.

Bulanık küme kavramı

Tanım II.1 . X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere I = [0,1] kapalı aralığı verilsin. A, X' in boş olmayan bir alt kümesi olsun. f_A : X$\to$I ' ye tanımlı olan fonksiyona üyelik fonksiyonu denir. Bir üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen kümeye X ' in bir bulanık alt kümesi denir. Yani, I^X 'in bir elemanı X ' in bir bulanık alt kümesi olur. Her x$\in X$ için, f_A(x) ' e A içindeki x noktasının üyelik derecesi denir. X ' in boş olmayan tüm bulanık alt kümelerinin sınıfına bulanık sınıf denir ve **F** ile gösterilir.
Uyarı II. 2. (i) f_A üyelik fonksiyonun tanım kümesi X ' in bir alt kümesine kısıtlanmıştır.

(ii) A, X 'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \ \ ise \\ 0 & x \notin A \ \ ise \end{cases}$ ile tanımlı fonksiyona A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Karakteristik fonksiyon sadece 0 ve 1 değerlerini alır. A kümesinin f_A üyelik fonksiyonu ise, I = [0,1] birim kapalı aralığı üzeride tüm değerleri alır.
Önerme II. 3. A ve B X kümesinin boş olmayan iki bulanık alt kümesi olsun. O halde,

(i) A = B $\Leftrightarrow$ *Her* $x \in X$ *için*, $f_A(x) = f_B(x)$ olmasıdır. (Bulanık eşitlik).

(ii) A$\subset B$ $\Leftrightarrow$ *Her* $x \in X$ *için*, $f_A(x) \le f_B(x)$ olmasıdır. (Bulanık kapsam veya monotonluk).

(iii) C = A $\cup B \Leftrightarrow$ *Her* $x \in X$ *için*, $f_C(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$ olmasıdır.(İki bulanık kümenin birleşimi).

(ıv) D = A$\cap B \Leftrightarrow$ *Her* $x \in X$ *için*, $f_D(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$ olmasıdır.(İki bulanık kümenin arakesiti).

(v) E = A . B $\Leftrightarrow$ *Her* $x \in X$ *için*, $f_E(x) = f_A(x).f_B(x)$ olmasıdır.(İki bulanık kümenin çarpımı).

(vı) F=A$\oplus B \Leftrightarrow$ *Her* $x \in X$ *için*, $f_F(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x).f_B(x)$ olmasıdır. (İki bulanık kümenin toplamı).

(vıı) Her x∈ X için, $f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$ olmasıdır.(Bulanık kümenin tümleyeni).

(vııı) A = Ø ⇔ Her x∈ X için, $f_A(x) = 0$ olmasıdır.(Boş bulanık küme).

İspat. (Bkz. Dubois-a ve Diğerleri,Zadeh-a veZimmermann).

Uyarı II. 4. (i) Önerme II. 3 (i), (ii), (iii), (ıv) ve (vıı) özelliklerine bulanık küme işlemleri denir.

(ii) Önerme II. 3 (iii) ve (ıv) özellikleri kolayca sonlu veya sayılabilir bulanık kümeler için de geçerli olduğu görülür.

Bulanık olasılık uzayı

Tanım III. 1. F, X üzerinde tanımlı bir bulanık sınıf olsun. Eğer **F** bulanık sınıf aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise, **F** ‘ ye X üzerinde tanımlı olan bulanık σ-cebir denir.

(i) X∈ **F.**

(ii) Eğer A∈ **F** ise, $A^C \in$ **F** olur.

(iii) Eğer her n∈ N için $A_n \in$ **F** ise, $\bigcup_{n\in N} A_n \in$ **F** olur.

Bu şekilde elde edilen (X,**F**) sıralı ikilisine bulanık ölçülebilir uzay denir. **F** ‘ nin elemanlarına da bulanık ölçülebilir kümeler denir. Bu uzay ile ilgili detaylı bilgi için, Klir ve Diğerleri ve Tok-a ‘ ya bakınız.

Tanım III. 2. (X,**F**) bir bulanık ölçülebilir uzay olmak üzere, P : (X,**F**)$\rightarrow$ [0,1] ‘ ye tanımlı olan bir küme fonksiyonu verilsin. Eğer P küme fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise, P ‘ ye (X,**F**) bulanık ölçülebilir uzay üzerinde tanımlı bulanık olasılık ölçümü veya kısaca bulanık olasılık denir.

(i) P(Ø) = 0 ve P(X) = 1 olur.

(ii) Her A∈ **F** için, P(A) ≥ 0 olur.

(iii) Eğer $(A_n)_{n\in N}$ bulanık kümelerin bir ayrık dizisi ve her n ∈ N için, $A_n \in$ **F**

Olduğunda, P$\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} P(A_n)$ elde edilir.

Böylece, elde edilen (X,**F**,P) sıralı üçlüye bulanık olasılık uzayı denir. **F** ‘ nin elemanlarına da bulanık olaylar denir.

Uyarı III. 3. Tanım II. 2 (iii) özelliğine bulanık σ-toplamsallık özelliği denir. Bulanık olasılık uzayı ile ilgili detaylı bilgi için Tok-a ‘ ya bakınız.

Tanım III. 4. A = { $A_1,...,A_n$} bir sonlu bulanık sınıf verilsin. Eğer her $i \neq j$ için, $A_i \cap B_j$ = Ø olmak üzere, X = $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ oluyor ise, **A**’ ya sonlu bulanık ayrışım denir.

Kararsızlık

Bazı durumlarda, yapılan çeşitli anketler sonucunda veya gözlemler sonunda veya üzerinde çalışılan konularda kararsızlık halleriyle karşılaşılır. Bu gibi hallerinde kendi içlerinde irdelenmesi veya yorumlanması söz konusu olur. Karasızlık terimi etimolojik olarak incelenirse, aşağıda belirtilen karasızlık kavramları ile karşılaşılır. Bunlar;

(i) Kesin olarak bilinmeyen.

(ii) Bulanıklık veya pusluluk.

(iii) Şüphelilik veya emin olmama durumu.

(iv) Birden fazla anlamlılık.

(v) Düzensizlik.
(vi) Bağımsızlık.

Yukarıda verilen kavramlar incelendiğinde karasızlığı iki grupta toplayabiliriz. Bu iki grubun sırası ile bulanıklılık ve çok anlamlılık oldukları görülür.

Üzerinde çalışılan konuların belirli ayrılıkların zorluğu bulanıklık kavramının özellikleri ile çözüm aranarak irdelenmeye çalışılır.Bulanıklık kavramı içinde belirsizlik, farklılık ve net olmayan gibi konular yer alır.

Birden fazla bağıntılarla ifade edilen konular da çok anlamlılık özellikleri ile incelenir. Çok anlamlılık kavramı ise, çoklu, bağıntılar, değişkenlik, genellik ve ıraksaklık gibi konular içerir.

Bulanıklık özelliklerinden yararlanılarak bulanık küme kavramı, klasik matematiğin ve klasik istatistiğin bazı sonuçlarını irdeler.

Çok anlamlılık özelliklerinden hareketle de bulanık ölçüm kavramı, evrensel bir X kümesinin keyfi elemanlarının üyelik derecelerini inceler. Bu konularla ilgili daha geniş bilgi için Dubois-b ve Diğerleri ve Klir ve Diğerleri ‘ ne bakınız.

Kararsızlık hallerinde, çalışılan konular üzerinde birçok uygun ölçüm tanımlanarak bunların önemli özellikleri incelenebilir. Bu çalışmada sadece bulanık ölçüm tanımlanıp, bu ölçümün bazı özellikleri detaya girilmeden incelecektir.

Tanım III. 1. F, X kümesi üzerinde tanımlı bir bulanık sınıf olmak üzere, μ : **F**$\rightarrow$R ‘ye tanımlı olan fonksiyon verilsin. A, X ‘in bir bulanık alt kümesi olsun. Eğer her A bulanık alt kümesine A ‘ nın bulanıklık derecesini karakterize eden μ(A) değerini karşılık getir ise, μ küme fonksiyonuna bulanık ölçüm denir.

Uyarı III. 2. (i) μ bulanık ölçümün tek olması gerekmez.

(iii) Aşağıda verilen önermenin özelliklerini sağlayan μ fonksiyonları vardır. Bunlardan birisi tek diğer ikisi de bulanıklık derecesine bağlıdır.

Önerme III. 3. μ **:** **F** $\rightarrow$R ‘ tanımlı olan bulanık ölçümü verilsin. O halde,

(i) $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow$ A ‘ nın bir belirli küme olmasıdır.

(ii) Eğer A$\subset$ B ise, $\mu(A) \leq \mu(B)$ olur.

(iii) μ(A) ‘ nın maksimum değere sahip olması için gerek ve yeter koşul A ‘ nın maksimal bulanık küme olmasıdır.

İspat. Tanım III. 1 ‘ den hemen görülür.

Bulanık enformasyon

Tanım IV. 1. (X,**F** ,P) bulanık olasılık uzayı olsun.**A** ={ $A_1,...,A_n$} X’ in sonlu bulanık ayrışımı olmak üzere, her i = 1,…,n için, I(A_i) $= \log_a \dfrac{1}{P(A_i)} = -\log_a P(A_i)$ ifadesine A_i bulanık olayın bulanık enformasyonu denir. Burada, a > 1 olan gerçel sayıdır. Bulanık enformasyonun bazı özellikleri (Tok-b) ‘ de incelenmiştir.

Bulanık kümeler kuramından önce karasızlığın iki ölçümü Hartley (1928) ve Shonnon (1949) tarafından tanımlanmıştır. Hartley tarafından tanımlanan ölçüm sadece klasik küme kuramı üzerinde oluşturulmuştur.Shannon’un ölçümü de olasılık kurallarına göre tanımlanmıştır. Bu ölçümlerin ortak özelliği çok anlamlılığın bazı türlerinde ortaya çıkmalarıdır. Böylece, her iki ölçüm enformasyon ölçümü olarak göz önüne alınabilir.

X, n elemanlı herhangi bir küme olsun. Yani, X incelenen bir sistemin mümkün olan tüm sonuçların kümesi veya tüm basit mesajların kümesi olarak ele alınabilir.Ardışık seçim yöntemi ile X kümesinin elemanlarından diziler oluşturulur.Böylece de her seçim sonunda X 'in elemanları alternatif seçim durumları meydana getirirler. Dolayısı ile de çok anlamlılık konusu içinde yer alırlar.

Teorem IV.1. n = card(X) = |X| olsun. X kümesinin elemanlarından ardışık olarak k∈ N tane seçim yapalım. O halde, bu k ardışık seçim sonunda X ' in elemanlarından oluşan dizilerin sayısı n^k olur. Bu seçime karşılık gelen enformasyon toplamı I(n^k) = K(n) . k olur. Burada K(n), n ' ye bağlı olan bir bilinmeyendir.

İspat. X kümesinin elemanlarının seçilme özelliğinden hemen görülür.

Sonuç

n_1 elemanlı X_1 kümesi ile n_2 elemanlı X_2 kümesini göz önüne alalım. k_1 seçim X_1 kümesinde ve k_2 seçimde X_2 kümesi üzerinde yapılsın. O halde, kümelerden seçilen sayıları aynı ise, bu dizilere karşılık gelen enformasyonların toplamlarıda aynıdır.

İspat. Teorem IV.1 gereği, I($n_1^{k_1}$) = $K_1(n_1).k_1$ (4-1) ve I($n_2^{k_2}$) = $K_2(n_2).k_2$ (4-2) yazılır. X_1 ' in elemanlarından oluşan dizilerin sayısı $n_1^{k_1}$ ve X_2 ' in elemanlarından oluşan dizilerin sayısı $n_2^{k_2}$ olup hipotez gereği $n_1^{k_1} = n_2^{k_2}$ (4-3) yazılır. Bu son (4-3) eşitliğinin her iki yanın a > 0 olmak üzere a tabanına göre logaritmasını alırsak,

$k_1 \log_a n_1 = k_2 \log_a n_2$ (4-4) yazılır. Buranda da, $\dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{\log_a n_1}{\log_a n_2}$ (4-5) elde edilir. Ayrıca I($n_1^{k_1}$) $= I(n_2^{k_2})$ olduğu göz önüne alınırsa, (4-1) ve (4-2) eşitliklerinden ,

$\dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{K_1(n_1)}{K_2(n_2)}$ (4-6) bulunur.(4-5) ve (4-6) eşitlikleri birlikte düşünülürse,

$\dfrac{\log_a n_1}{\log_a n_2} = \dfrac{K_1(n_1)}{K_2(n_2)}$ (4-7) elde edilir. K_0 ortak bir sabit olmak üzere göz önüne alındığında, (4-7) eşitliği K(n) = $K_0 \log_a n$ (4-8) için de geçerli olur. Buradan da,

I(n^k) = $K_0 . k \log_a n$ (4-9) elde edilir.

Tanım IV. 3. Teorem IV. 1 ve Sonuç IV. 2 ' ye göre elde edilen I(n) = $K_0 . k \log_a n$ ' ye Hartley enformasyonu denir. K_0 = 1 ve a = 2 özel değerler alınır ise, I(n^k) $= k \log_2 n = \log_2 n^k$ bulunur. Burada m ∈ N olmak üzere, m = n^k olarak alınırsa da, I(m) = $\log_2 m$ elde edilir.

Önerme IV. 4. Hartley enformasyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) Her m_1 , $m_2 \in N$ için, I(m_1 , m_2) $= I(m_1) + I(m_2)$ olur.(Toplamsallık).

(ii) Her m∈ N için, I(m)≤ $I(m+1)$ olur.(Monotonluk).

(iii) I(2) = 1.(Birim hale getirilmesi).

İspat. Teorem IV.1, Sonuç IV.2 ve Tanım IV. 3 ' den kolayca görülür.

Tanım IV. 5. X ve Y iki sonlu küme olsun. I(X) = $\log_2 |X|$ ve I(Y) = $\log_2 |Y|$ ifadelerine yalım enformasyon denir. R⊂ X x Y olmak üzere, I(X,Y) = $\log_2 |R|$ ' ye de birleşik enformasyon denir.

Sonuç IV. 6. X ve Y iki sonlu küme olsun. O halde, I(X,Y) = I(X) + I(Y) olur

İspat. R = X x Y alalım. $I(R) = \log_2 |X \times Y|$

$$= \log_2 (|X|\,,|Y|) = I(X) + I(Y)$$

bulunur.

Kaynaklar

Ash,R., B.,(1965).Information Theory, Interscience, New York.

Bezdek, J., C.,(1985).Analysis of Information, CRC Pres Boca Raton Fla.

Billingsley, P., (1965). Ergodic Theory and Information, Jonh Wiley, New York.

Dimitrov, V., ,(1983). Group Choice Under Fuzzy Information, Fuzzy Sets and Syst., 925-39.

Dubois-a, D. ve Prade, H., (1980).Fuzzy Sets and Systems Theory and Applications, Academic Pres New York.

Dubois-b, D. ve Prade, H., (1987). Properties of Measures of Information in Evidence and Possibility Theories,Fuzzy Sets and Syst., 24 161-182.

Klir, G. J. Ve Folger, T. D.,(1988). Fuzzy Sets Uncertainty and Information,Pratice Hall,New Jersey.

Tok-a, İ., ,(1985).Fuzzy Measure Space, E. U. J. Sci. Fac. Series A, Vol. VIII,No.1 89-100.

Tok-b, İ., (1986).On the Fuzzy Information Function, Doğa J. Math. 10 No.2,312-318.

Zadeh-a,L. A., (1965). Fuzzy sets,Information and Control,8 338-353.

Zadeh-b,L. A., (1968). Probability Measures of Fuzzy Events, J. Math. Anal. Appl.,23 421-427.

Zadeh-c,L. A., (1979).Fuzzy Sets and Information Granularity, In. Gupta Ragade and Yager, 3-18.

Zimmermann, H., J.,(1985).Fuzzy Set Theory and Its Applications,KluwerNijhoff, Boston.