ABMYO
Dergisi. 16, (2009)(41-49)

Ömer Hayyam'ın İkinci Ve Üçüncü Dereceden Denklemlerin Geometrik Çözümleri

Ali DÖNMEZ *

Özet

Bu çalışmada, ünlü İran'lı şair ve matematikçi Ömer Hayyam'ın (1048-1131) ikinci ve üçüncü dereceden denklemlerini geometrik yoldan nasıl çözdüğü işlenecektir.

***Anahtar kelimeler**: Ömer Hayyam, ikinci ve üçüncü dereceden denklemler ve geometrik çözümler.*

The geometrıc solutıons of the quadratıc and The cubıc equatıons given by omar al khayyam

Abstract

In this work, we have studied how the geometric solutions of the quadratic and the cubic equations were given by the fomous Persian poet and mathematian Omar al Khayyam (1048-1131)

Giriş

Baballiler, ikinci derece denklemlerinin kendi dillerindeki çivi yazılarıyla ve bazı sözel komutlarıyla, bugün bizim kullandığımız tam kareye tamamlama yöntemine eşdeğer bir yolla çözmüşler ve uygulamalar yapmışlardır. Bu çalışmalar 1940 yılından sonra yapılan kazılarla ortaya çıkarılabilmiş ve okunabilmiştir. Mezopotamya'daki uygarlıktan çok sonra denklem çözümleri Çin, Hindistan, Yunanistan ve İslam ülkelerinde önem kazanmıştır. Rönesans öncesinde de Avrupa'ya geçmiştir.
Karekökleri hesaplamanın en kolay yolu, ikinci derece denklemlerini çözme yöntemleridir. Matematik tarihi kitaplarına bakıldığında Babillilerin, Çinlilerin, Hintlilerin, Yunanlıların ve İslam ülkeleri matematikçilerinin bu konuya yoğun olarak eğildiğini görüyoruz. 800 ile 1100 yılları arasında İslam ülkeleri matematikçilerinde ikinci ve üçüncü derece denklemlerinin çözümleri özel bir ilgi görmüştür. Özel olarak Türk matematikçisi Harizmi (780-850) ve şair Ömer Hayyam'ın (1048-1131) bu konulardaki çalışmaları ilginçtir. Harizmi'nin ve Ömer Hayyam'ın aynı cebir

* Prof.Dr. Ali DÖNMEZ, İstanbul Aydın Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Bölümü Florya Kampüsü

isminde yazdıkları kitaplarında denklem çözümlerinin geometrik yolları ve sayısal uygulamalarına yer verilmiştir.Her iki yazar da $ax^2+bx+c=0$ biçimindeki ikinci derece genel denkleminin bugün

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Olarak bilinen çözümünü vermemiştir. Bu yazarların çözümlerinde negatif katsayılar ve negatif köklerden özellikle kaçınılmıştır.
Ömer Hayyam, x^2 olan terimin katsayısını 1 olarak ikinci derecede denklemlerini pozitif olan b ve c sayılarının b bir uzunluğu ve c de alanı göstermek üzere,

1. $bx=c$ ise $x=c/b$ olur.
2. $x^2=bx$ ise $x=b$ olarak çözmüştür.
3. $x^2=c$ ise $x=\sqrt{c}$ olur.
4. $x^2+bx=c$ ise, kökü

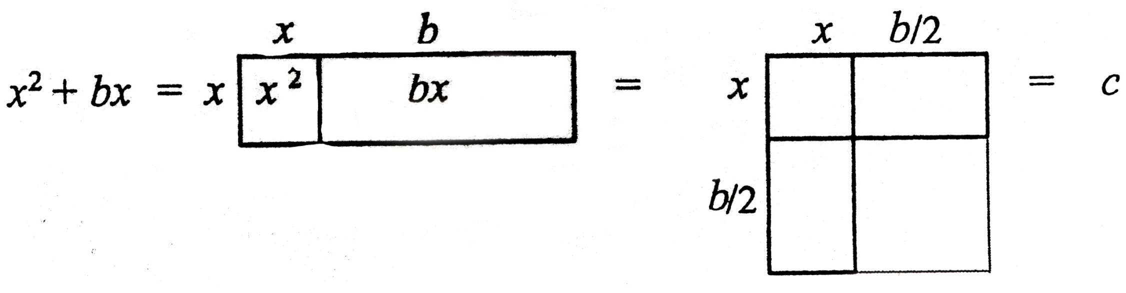
$$x=\sqrt{(b/2)^2+c}-\frac{b}{2}$$

olarak bulmuştur.

5. $c<(b/2)^2$ ise $x^2+c=bx$ olan ikinci derece denklemini geometrik yolla $x=b\pm\sqrt{(b/2)^2-c}$ biçiminde hesaplanmıştır.
6. $x^2=bx+c$ olan ikinci derece denkleminin kökünü geometrik yolla $x=\frac{b}{2}+\sqrt{(b/2)^2+c}$ olarak bulmuştur.

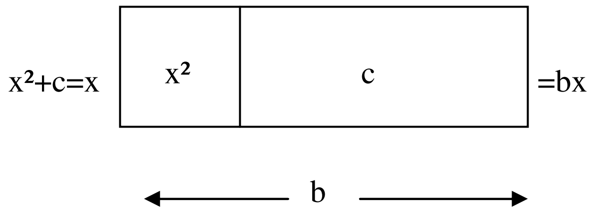
b ve c sayılarının negatif halleri on altıncı yüzyılda Cardano (1501-1576) ve Francis Maseres'te (1731-1824) görürüz. Çünkü, Yunanlılarda ve İslam Ülkeleri matematikçilerinde sayılar pozitif olan doğru parçaları ile gösteriliyordu. Buna bağlı olarak pozitif olan doğru parçalarının çarpımı da pozitif olan alanı gösterdiği için (-2)x(3)=-6 sonucunun alan olarak anlamı yoktur.

Şimdi, Ömer Hayyam'ın $x^2+bx=c$ olan ikinci derece denklemini geometrik yolla nasıl çözdüğünü gösterelim.
$x^2+bx=c$ denklemi için



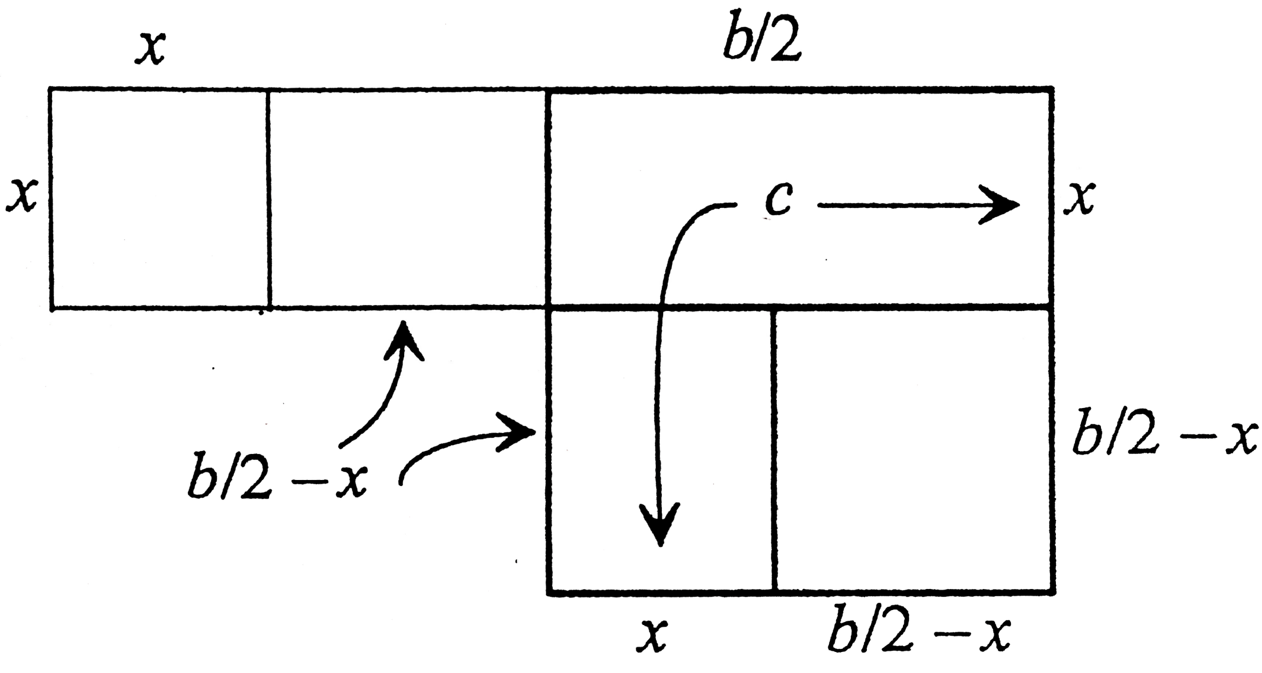
çizimi yapar. Böylece $x+b/2$ kenarı üzerine kurulan karenin alanı $c+(b/2)^2$ olur ve bu $(x+b/2)^2=c+(b/2)^2$ olarak yazılır. Buradan x^2 alanlı karenin bir kenarını bulacağız. Önce, alanı $c+(b/2)^2$ olan kareyi çizeriz. Birer köşesinden kenarları b/2 ve olan dikdörtgenleri çıkarırsa geriye kalan uzunluk x olarak bulunur. Yani x uzunluğu $x=-b+\sqrt{(b/2)^2+c}$ olur. Bu da ,Ömer Hayyam'ın (4) ile verilen formülüdür.

Şimdi de (5) ile verilen ikinci derece denklemini geometrik yolla çözelim. $x<b/2$ olduğunu varsayalım. Buna göre



$x<b/2$

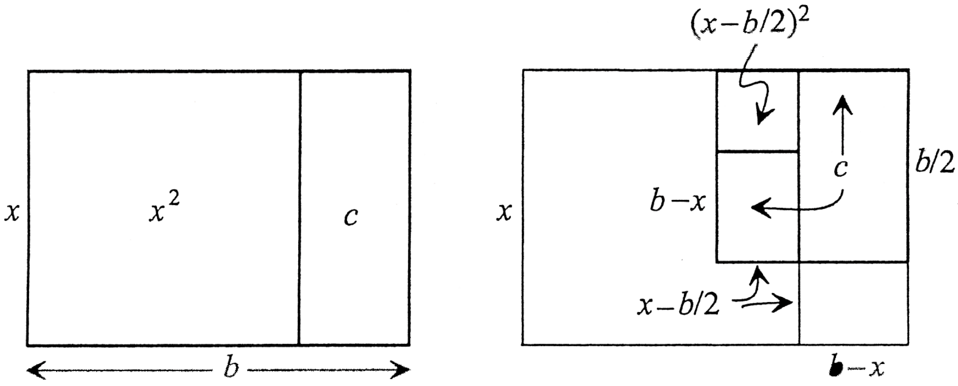
şeklini çizelim. b/2 kenarı üzerine kurulan karenin alanı $(b/2-x)^2+c$ olur ve bu hal



$x<b/2$

olarak çizilir. b/2 uzunluğu üzerine kurulan karenin alanına göre $x<b/2$ koşulunda x çözümü $x=b-\sqrt{(b/2)^2-c}$ olarak bulunur. Eğer $c>(b/2)^2$ise yukarıdaki çizim olanaksızdır.

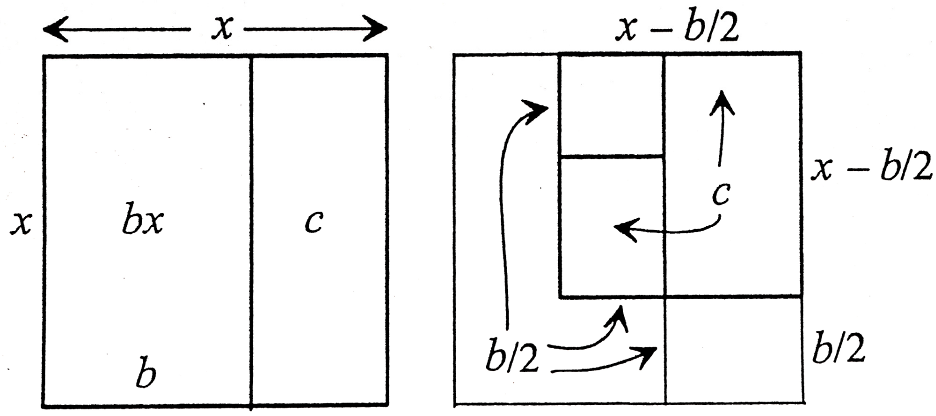
Bir de x>(b/2) halini ele alalım. Ömer Hayyam $x^2+c=bx$ denklemi için bu kez



x>b/2

geometrik şekillerini çizer. Bu halde de çözüm $x=\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b}{2})^2-c}$ olarak bulunur.

Ömer Hayyam, $x^2=bx+c$ türündeki ikinci derece denkleminin geometrik çözümü için



biçimde bir şekil çizer . Bu şekle göre çözümü $x=\frac{b}{2}+\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}$ olarak bulunur.

Harizmi'nin ve Ömer Hayyam'ın yöntemlerinde negatif uzunluk olmadığından negatif kökleri kabul etmiyorlardı. Oysa, her ikisinin çözüm yöntemlerinde negatif kökler vardı. Bunu görememişlerdi.

r>0 olsun ve –r sayısı $x^2+bx=c$ denkleminin kökü ise $(-r)^2+b(-r)=c$ yazılır. Bu da $r^2=br+c$ denklemine dönüşür.Yani, r sayısı $x^2=bx+c$ denkleminin pozitif köküdür. Bu tür denklemler de her iki matematikçi tarafından çözülmüştü. Öyleyse $x^2+bx=c$ denkleminin negatif kökünün mutlak değerli hali $x^2=bx+c$ denkleminin pozitif köküdür. Bu önermenin tersi de doğrudur. Aynı zamanda $x^2+bx+c=0$ denkleminin negatif köklerinin mutlak değerli halleri $x^2+c=bx$ denkleminin pozitif kökleridir. Bu önermenin tersi de doğrudur. Öyleyse, $x^2+c=bx$ denkleminin pozitif kökleri

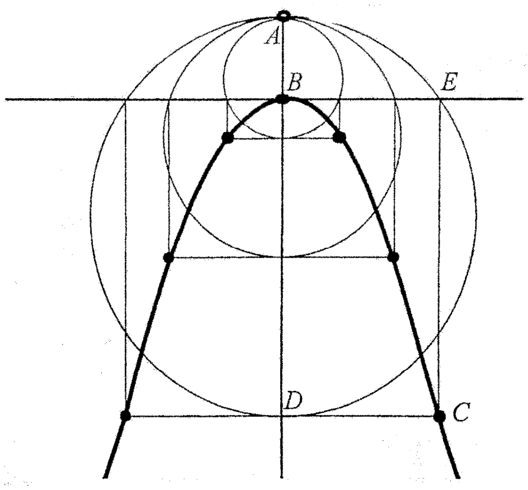
$x^2+bx+c=0$ denkleminin negatif kökleridir. Böylece, ikinci derece denklemlerinin tüm gerçek kökleri bulunabilir.

Harizmi ve Ömer Hayyam, karmaşık kökleri bilmiyorlardı. Yunanlıların, Hintlilerin ve İslam ülkeleri matematikçilerin ikinci derece denklemlerinin geometrik yolla çözümleri bu halleri içermiyordu. İslam ülkelerinin etkisi altında kalan bazı Avrupalı matematikçiler de uzun bir süre negatif sayıları kök olarak kabul etmemişler ve bunlara yabancı kök ismini vermişlerdir. Zaten köklerin negatif olabileceklerini ilk kez Girard (1595 - 1632) kullanmıştır. Sanal sayılar ve karmaşık kökleri de ilk kez Girard işlemiştir. Böylece, Ömer Hayyam'ın yöntemleriyle $x^2+2x=2$ $x^2=2x+2$ ve $x^2+3x+1=0$ denklemlerinin tüm kökleri bulunabilir.

Konik kesitleri ve Küp Kökler.

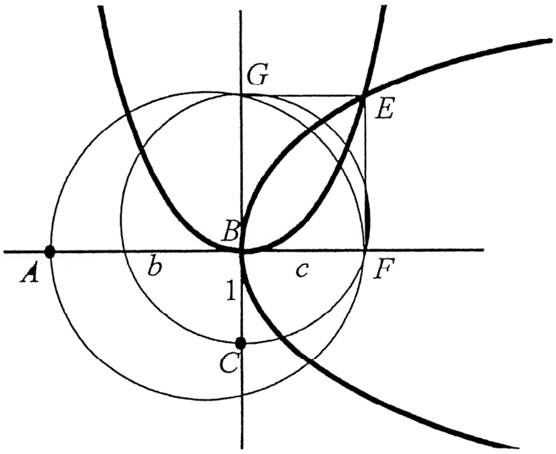
Güney İtalya'da yaşayan ve Yunanlı Pisagor'un öğrencilerinden olan Tarentumlu Archytas (İ.Ö.428-347) ile Ege Denizi'nde Koslu olan Hippocrates (İ.Ö. 470-377), $a/c=c/d=d/b$ olan a,b,c ve d uzunluklu doğru parçalarından $(a/c)^2=(c/d)(d/b)=c/b$ ve buradan; $c^3=a^2b$ elde edilebileceğini göstermişlerdi. Özel olarak a=1 olarak alınırsa $c^3=b$ olur. Böylece $c^2=d$ ve $d^2=bc$ olacak biçimde c ve d doğru parçaları bulunabilirse, b sayısının küp kökü bulunabilir. Bunun için c ve d sayılarını değişken gibi düşünelim. Buna göre $c^2=d$ ve $d^2=bc$ ifadelerini aynı köşeli ve eksenlerini birbirine dik olan iki parabolü gösterir. Bu nedenle, Eflatun Akademisinden Menaechmus (İ.Ö.375-325), $x^2=ay$ ve $y^2=2ax$ parabollerini çizer. Bu denklemde y değerini yok ederek $x^3=2a^3$ ve $x=a2^{1/3}$ değeri hacmi ikiye katlamış olan küpün bir kenarının uzunluğu olur. Paraboller pergel ve cetvelle çizilmeyen eğriler oldukları için Eflatun bu çözüme karşı çıkmıştır.

Yunanlılarda olduğu gibi Ömer Hayyam AB doğru parçası parametreli ve B köşeli parabolü nokta nokta çizer. C noktası P parabolü üzerinde olsun. AED çemberindeki kesenlerin özelliğine göre $(BE)^2=BD.AB$ yazılır. Çünkü, C noktasının koordinatı (BE,BD) biçimindedir. Böylece $(BE)^2=BD.AB$ bilenen bir parabol denklemidir. Bu parabol de nokta nokta



olarak çizilir.

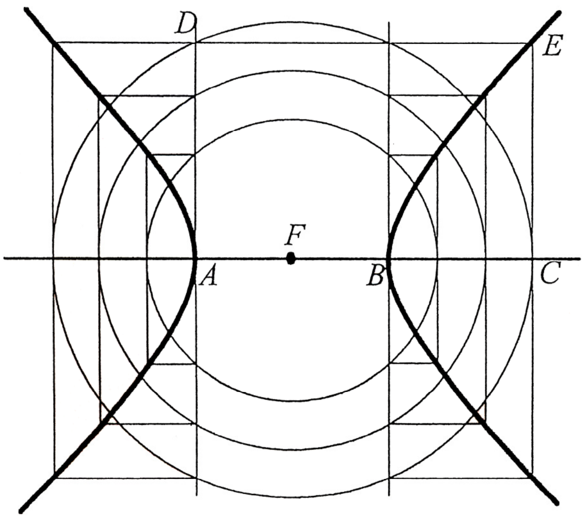
Şimdi küp kökü bulalım. AB=b olacak biçimde b pozitif sayısını alalım. AB doğru parçasına B noktasında dik olan BC=1 olan C noktasını alalım. Böylece B köşeli AB parametreli parabol ile, yine B köşeli CB=1 parametreli diğer bir parabolü çizelim. BGEF dikdortgenini çizelim. Buna göre



$(EF)^2$=BF.AB ve $(GE)^2$=GB.CB olur. c=GE=BF ve d=GB=EF denirse d^2=cb ve c^2=d olur. Buradan c^3=b elde edilir. Böylece parabollerin E kesim noktasının apsisi BF=c sayısı AB=b sayısının küp köküdür.

Ömer Hayyam'ın bu çizimi ve yorumu, daha önce Yunanlılar tarafından yapılmış ve Bergamalı Apollonius (İ.Ö.260,170) İ.Ö. 200 yıllarında bu çizimi kübik denklemlerin çözümüne başarılı olarak uygulamıştır.

Ömer Hayyam, üçüncü derece denklemlerinin çözümünde bir de B köşeli ve AB parametreli hiperbolü kullanmıştır. Eğer E hiperbol üzerinde bir nokta ve ACED bir dikdörtgense $(EC)^2$=BC.AC olur. Bu bağlantıya göre E noktaları bulunabilir.



F noktası AB doğru parçasının ortası olsun. F merkezli ve FC yarıçaplı çember, A noktasından AB doğru parçasına çıkılan dik doğruyu D noktasında kessin. Bu biçimde çizilen çemberin yardımıyla hiperbolün A köşeli diğer kanadını çizebiliriz.

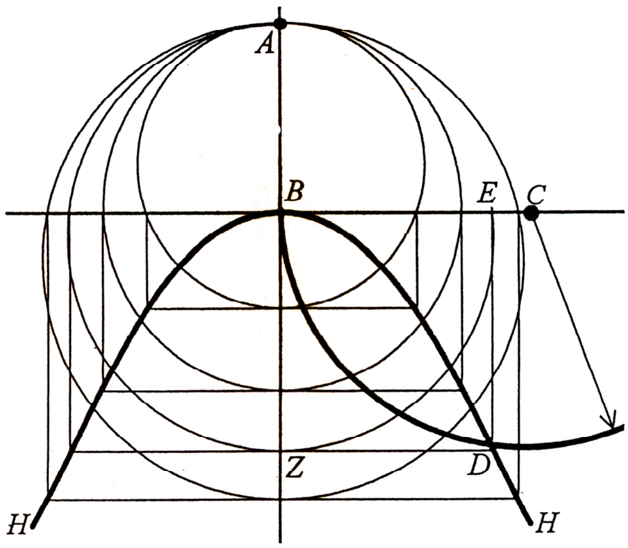
Ömer Hayyam, üçüncü derece denklemleri katsayılarına bağlı olarak on dokuz türde yazmıştır. Bunların içinde $x^3+ax=bx$ türde olan beşi $x^2+ax^2=b$ haline indirgenir. Geriye on dört türü kalır. Ömer Hayam bu geri kalan on dört türü konikleri kesiştirerek, geometrik yolla çözer. Şüphesiz Ömer Hayyam'ın çözümlerinde yine negatif kökler yoktur.

p, g ve r katsayılarının pozitif, negatif ya da sıfır olmalarına göre $y^3+py^2+gy+r=0$ olan genel üçüncü derece denklemi, $y=x-(p/3)$ dönüşümü ile $x^3+sx+t=0$ biçimine döner. Tüm katsayıların pozitif olması halinde geriye

1- $x^3+ax=b$,
2- $x^3+b=ax$,
3- $x^3=ax+b$ ve
4- $x^3+ax+b=0$

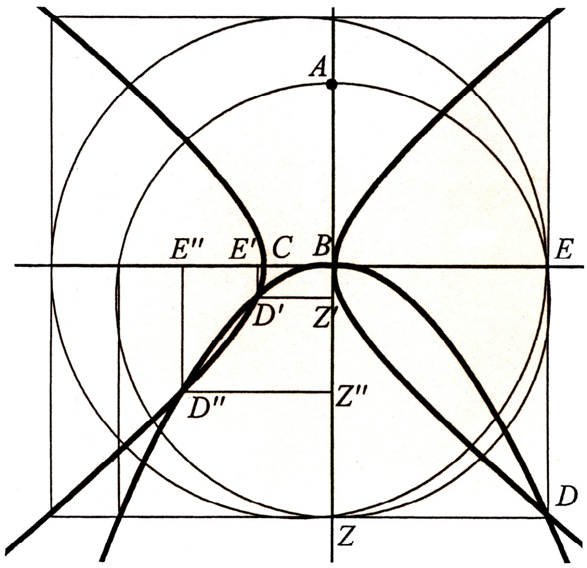
olan halleri kalır. Hayyam da bunları çözmüştür.

Önce $x^3+ax=b$ olan denklemi çözelim.



Şekilde olduğu gibi $(AB)^2=a$ olsun. AB kenarlı kare üzerine $BC.(AB)^2=b$ olan hacmi gözönüne alalım. BC, katının yüksekliği olsun. Ayrıca $BC \perp AB$ olur. Buna göre B köşeli ve AB parametreli parabolü çizelim. HBD koniği BC kenarına teğet olur. BC yarıçaplı yarım çemberi çizelim. Bu çember koniği D noktasında keser. $DZ \perp BZ$ ve $DE \perp BC$ olur. Bu halde kök EB olur.
Çünkü $(DZ)^2=(EB)^2=BZ.AB$, $(ED)^2=(BZ)^2=EC.EB$ olduklarından $EB.(BZ)^2=(EB)^2.EC=BZ.AB.EC$ yazılır.
Buradan $AB.EC=EB.BZ$ ve $(EB)^3=EB.(BZ.AB)=(AB.EC).AB=(AB)^2.EC$ yazılırlar.
Böylece $(EB)^3+a(EB)=(AB)^2.(EC)+(AB)^2.EB=(AB)^2 . CB$ elde edilir. Bu da $x^3+ax=b$ demektir.

Ömer Hayyam $x^3+b=ax$ ve $x^3=ax+b$ türündeki (2) ve (3) olarak verilen denklemleri ayrı ayrı çözmüştür. Biz bunları $x^3 \pm b=ax$ biçiminde yazarak çözelim. Bunun için $(AB)^2=a$ ve $(AB)^2.BC=b$ diyelim. b katsayısının önünde eksi varsa BC doğru parçasını sola ve b katsayısının önünde artı varsa BC doğru parçasını sağa yerleştirelim. Buna göre B köşeli ve AB parametreli parabolü ile B ve C köşeli BC parametreli hiperbolü



olarak çizelim.
B noktası hariç bu parabol ile hiperbolün kesim noktaları olan D, D' ve D'' noktalarının apsisleri olan değerler $x^3 \pm b=ax$ olan üçüncü derece denkleminin kökleridir. D noktasını ele alalım. D noktasından eksenlere DE ve DZ dikmelerini inelim. BE uzunluğu solda ise kök negaitf ve sağda ise kök pozitif olur. Bu grafiğe göre BE' ve BE'' kökleri negatif işaretlidir. Yalnız Ömer Hayyam negatif kökleri bulmamıştır.

Üçüncü derece genel denkleminin cebirsel çözümünü tartışmalı da olsa ilk kez İtalyan matematikçisi Girolamo Cardano (1501-1578), 1545 yılında Ars Magna'da yayınlamıştır. $y^3+py^2+gy+r=0$ denklemini $y=x-(p/3)$dönüşümü ile $ax^3+ax+b=0$ biçimine sokulmuştur. $x=t^{1/3}+u^{1/3}$ dönüşümü ile $z^2+bz-(a/3)^3=0$ olan ikinci derece denklemine dönüştürerek
$x=[-b/2+\sqrt{(b/2)^2+(a/3)^3}]^{1/3}+[-b/2-\sqrt{(b/2)^2+(a/3)^3}]^{1/3}$ ve $y=x-p/3$ çözümünü cebirsel olarak hesaplamıştır.

Kaynaklar

Al Khowarizmi, (1915), Algebra, Macmillian, New York.

Apollonius of Perga, (1961), Treatise on Conic Sections, T.L.Heath, edition New York, Dover.

Apollonius of Perga, (1987) On Cutting Off A ratio, E.M.Macierowski, translation, The Golden Hind Pres.

Burton, D.M. (1999), The History of Mathematics, Mc Graw-Hill, New York. Calinger, R.(1999), A History of Mathematics, Prantice Hall,Tokyo

Dönmez, A.,(2002-2005), Matematiğin Öyküsü ve Serüveni, 10 CİLT, Toplumsal Dönüşüm Yayınları, İstanbul.

Euclid, (1956),T.L. Heat, Edition, New York.

Henderson, D.W., (2001), Experiencing Geometryi Prentice Hall, New Jersey.

Katz, V.J., (1998), A History of Mathematics, Addison –Wesley, New York.

Khayyam, O.,(1972), Algebra, D.S.Kasin, edition, New York ,

Khayyam, O., (1961), Kitab Uglidisi, A.I. Sabra, edition. Alexandria, Egypt.

Suziki,J., (2002), A History of Mathematics, Prentice Hall. New Jersey.

Thibaut,G., Baudhayana, (1968), Translation, S.Prakash, edition. Bombay.

Van der Wearden, (1975), Science Awakening , Princeton Junction , New Jersey.

Van der Wearden, (1965), The History of Algebra, Princeton, New Jersey.