ABMYO
Dergisi. 20, (2010) (4-11)

Matematikte ilginç sayılar

Ali DÖNMEZ[1]

Özet

Bu çalışmanın özünde doğal ya da yapay bir biçimde ilginç olan sayılar tanıtılacaktır. Matematikte bu tür sayılar çok fazladır. Burada bunların ilginç olanlarını göreceksiniz.

Interesting numbers in mathematics

Abstact

In this work we will introduce the interesting numbers where some of them are natural and some of them are artificial. We have a lot of such numbers in mathematics and you will see some of them here.

Giriş

Rakamların ve sayıların yazılışlarını ilk kez mağara dönemi insanlarında görürüz. Bunlar daha çok çentikler ve oyuklar biçimindedir. Daha ileri doğal boyalarla mağara duvarlarına yazılmış ya da kazınmış örnekleri vardır. Biz bunların uzun tarihini ve gelişimini verecek değiliz. Yalnız, bilinçli ve bilimsel ilk rakamların ve sayıların oluşlarını sayıların oluşumu yazıda olduğu Mezopotamya'da Türk olan Sümerler tarafından oluşturulmuştur.

Sümerlerin sayılama sistemi altmış tabanlı olduğu halde Mısırlıların, Yunanlıların, Çinlilerin ve Hintlilerin on tabanlıdır. Anakaradan ayrı olarak Mayaların matematiği yirmi tabanlıdır. Tarih boyunca farklı ırkların farklı tabanlarda sayılama sistemleri oluşmuştur. Örneğin, Ugaritlerin sayılaması yüz tabanlıdır. Bugün bilgisayarların kullandığı sayılama sistemi iki tabanlıdır.

İlginç sayılar

Matematikte en ilginç sayılardan ilki ve matematikçilerin en çok uğraştığı sayı, çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna bölümü olan pi (π) sayısıdır. Bu sayı halen bilgisayarların ve bilgisayar programlarının geliştirilmesinde kullanılır.

Pi (π) sayısı irrasyonel ve aşkın bir sayıdır. İrrasyonel sayılar rakamları yinelenmeyen sonsuz ondalıklı sayılardır.

Pi (π) sayısının ondalık basamaklarını hızlı olarak veren programlar yazılmıştır. Bu programlara göre bilgisayarlar pi (π) sayısını belli bir basamağa kadar hesaplar ve durur. Bunun üzerine

[1] Prof. Dr. Ali DÖNMEZ İstanbul Aydın Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği Öğretim Üyesi

makinenin neden durduğu bulunur ve makine geliştirilerek pi (π) sayısının daha ileri basamakları hesaplanılır. Bu da makinelerin geliştirilmesiyle olanaklıdır.

Archimedes (İ.Ö. 287-212), bir dairenin içine çizdiği çokgenlerin kenarlarının sayılarını artırarak, pi (π) sayısına ait alt sınırını 3 1/7=22/7 ve üst sınırının da 3 10/71=223/71 olduğunu hesaplamıştır.

Mısırlılar ve Sümerler pi (π) sayısını 3 olarak kullanmışlardır.

Pi (π) sayısının bazı ondalık kısımları

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950\ldots$$

biçimdedir.

İkinci ilginç sayılar topluluğu Pascal (1623-1662) üçgenidir. Aslında Pascal üçgeni Pascal'ın değildir. Bu çalışma ilk kez İranlı şair ve matematikçi Ömer Hayyam (1048-1131) ve Çinli matematikçi Chu Shih Chieh'de (13.ve14.yüzyıl) görülür. Önceliğin kimde olduğu bilinmemektedir.

Pascal üçgeni kısaca

$(a+b)^0 = 1$				1				
$(a+b)^1 = 1a+1b$			1		1			
$(a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2$		1		2		1		
$(a+b)^3 = 1a^3+3a^2b+3ab^3+1b^2$	1		3		3		1	
.				.				
.				.				
.				.				

olan ve

$$(a+b)^n = C(n,0)a^n + C(n,1)a^{n-1}b + C(n,2)a^{n-2}b^2 + \ldots + C(n,n)b^n$$

biçimindeki ikili açılımın katsayılarıdır. Bu açılımdan elde edilen ve

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\ldots$$

biçiminde yazılan diziye de Fibonacci dizisi denir. Bu da $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ formülü ile bulunur.

İrrasyonel olan bazı sayılar

$$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1.73205081\ldots$$
$$\sqrt{5} = 2.23606797\ldots$$
$$e = 2.71828182\ldots$$
$$\pi = 3.14159265\ldots$$

yaklaşık değerlerdedir.

$$1 \text{ gogol} = 10^{100} \quad \text{ve } 1 \text{ gogolpleks} = 10^{gogol} = 10^{10^{100}}$$

sayılarıdır.

Ln 10 = 2.30258… olduğu bilinmektedir.

Altın oran denilen sayı da φ =1.61803398… haldedir. 1 ve kendisinden başka böleni olmayan sayılara asal sayılar denir. Asal sayılar dizisi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23… biçimdedir. 2 çift olduğu halde asal sayıdır. Asal sayıları veren genel bir formül bugüne kadar bulunamamıştır. 1979 yılında bulunan 2^{23209}-1 sayısı asal bir sayıdır.

$\sqrt[3]{2}$ sayısı pergel ve ölçümsüz cetvelle sonlu sayıda olan işlemle çizilemediği için, verilen bir küpün bir kenarı çizilemez. Ayrıca, π sayısı transandant olduğu için bir daire karelenemez ve bir dar açı pergel ve cetvelle üç eşit parçaya bölünemez.

8x8 olan satranç tahtasının birinci gözüne 1 buğday tanesi, ikinci gözüne bunun iki katı olan iki buğday tanesi, üçüncü gözüne 2 kere 2, yani 4 buğday tanesi, dördüncü göze 2 kere 2 kere 2 sayısı = 8 tane buğday tanesi, … altmış dördüncü göze 2^{63} tane buğday tanesi konulursa, toplam buğday tanesi

$$1+2+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{63}$$

olur. Bu da 18.446.744.073.709.551.615 yani, on sekiz ketrilyon, dört yüz kırık altı katrilyon, yedi yüz kırk dört trilyon, yetmiş üç milyar, yedi yüz dokuz milyon, beş yüz elli bir bin, altı yüz on beş tane buğday yapar.

abcabc biçiminde yazılan tüm sayılar 7, 11, 13, 77, 91, 143 ve 1001 sayıları ile tam olarak bölünebilir.

Örneğin

$$783.783:7=111.969$$
$$783.783:11=71.253$$
$$783.783:77=10.179$$
$$783.783:91=8.613$$
$$783.783:143=5.481$$
$$783.783:1001=783$$

ya da

$$111.111:7=15.873$$
$$111.111:11=10.101$$
$$111.111:77=1.443$$
$$111.111:91=1.221$$
$$111.111:143=777$$
$$111.111:1001=111$$

olarak yazılırlar. Ayrıca,

$$1!+4!+5!=145$$
$$2^5.9^2=2592$$

sonuçları doğrudur.

Hintli matematikçi Ramanujan (1887-1920), yakalandığı verem hastalığından dolayı hastanede yatıyordu. Bir gün İngiliz matematikçi Hardy (1877-1938), Ramanujan'ı hastanede ziyarete gelir ve gönlünü almak ister. Hastaneye gelirken, bindiği otomobilin plaka numarasının 1729 olduğunu ve bu sayının asal çarpanlarının 1729 = 7.13.19 biçiminde 13 uğursuz sayısının bulunduğunu düşündü. Hastanede Ramanujan'ın ölümü ile karşılaşan haber alacağını sandı. Ramanujan'ı sağlıklı görünce, kuşkularını ona anlattı. Bunun üzerine Ramanujan, "Hayır dostum, bu özellik çok ilginç bir sayıdır. Çünkü iki yolla iki küp toplamına eşit olan en küçük sayı budur". Diyerek yanıt verdi. Bu da $1729=9^3+10^3=1^3+12^3$ biçimindedir.

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f(x)$ fonksiyonuna Dirichlet fonksiyonu denir. Bu fonksiyonun herhangi kapalı bir aralıkta Riemann integrali olmadığı halde Lebesgue integrali vardır.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (1+1/2+1/3+\ldots+1/n+\ldots-\ell n n)=0.5772157\ldots$$

sayısına Euler sabiti denir. Bu sayının daha cebirsel yoksa aşkın mı olup olmadığı bilinmektedir.

$$e = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n=2.7182818284\ldots$$

sayısına e sayısı denir ve aşkın bir sayıdır.

Pi (π) sayısının

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4\ldots2n.2n\ldots}{1.3.5.5\ldots(2n-1)(2n-1)\ldots}$$

biçimindeki haline Wallis (1616-1703) formülü denir.

Bazı toplama formülleri

$$1+2+3+4+\ldots = \frac{1}{2}\, n\,(n+1),$$

$$1+3+5+7+\ldots +(2n-1) = n^2,$$

$$2+4+6+8+\ldots+2n = n\,(n+1),$$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+3+\ldots+n)^2,$$

$$2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=n^2(n+1)^2,$$

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1),$$

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

ve

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1,$$

biçimindedir.

$r \neq 1$ ve pozitif n sayısı için geometrik seri

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

olarak yazılır. $-1 \leq r \leq 1$ ise, bu toplam

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\frac{a}{r-1}$$

olur.

Altıncı yüzyılda yaşayan Çinli matematikçi Chang Chiu Chien'in Matematiksel Klasik isimli kitabında çok ilginç bir problem vardır. Problem şöyledir. 100 lira paranız var. Tanesi 5 lira olan hindilerden, tanesi 3 lira olan kazlardan ve üç tanesi 1 lira tavuklardan 100 tane satın almak için her birinden kaçar tane almalısınız?

Problemin ilginç bir çözüm vardır. Hindilerin sayısına x, kazların sayısına y ve tavukların sayısına da z denirse

$$5x+3y+z/3=100 \text{ ve } x+y+z=100$$

denklemleri yazılır. Buradan $z=100-x-y$ denirse $5x+3y+(100-x-y)=100$ ya da $7x+4y=100$ olur. $x=4t$ denirse $y=25-7t$ ve $z=75+3t$ yazılır. $t = 1, 2$ ve 3 sayıları için istenen üçlüler

$$(x=4,\quad y=18,\quad z=78)$$
$$(x=8,\quad y=11,\quad z=81)$$
$$(x=12,\quad y=14,\quad z=84)$$

olarak bulunurlar.

775 yıllarında Yorklu Alcuin bu problemi şöyle düzenlemiştir. 100 ölçek buğdayı, toplamı 100 olan erkeklere üçer, kadınlara ikişer ve çocuklara da yarımşar ölçek dağıtırsa, erkek, kadın ve çocukların sayıları ne olur? Problemin çözümünden bu sayılar

Erkek	*Kadın*	*Çocuk*
17	*5*	*78*
14	*10*	*76*
11	*15*	*74*
8	*20*	*72*
5	*25*	*70*
2	*30*	*68*

olarak dağılır.

850 yıllarında yaşayan Hintli matematikçi Mahavirarya buna benzer problemi şöyle düzenlemiştir. Her birinde eşit sayıda muz olan 63 çotanak muz ile 7 tane ayrık olan muz 23 yolcuya eşit olarak dağıtılacaktır. Bir çotanakta bulunan muz sayısı nedir? Çözüm : Her çotanakta x tane muz olsun ve her yolcuya y tane muz düşsün. Buna göre 63x+7=23y olan iki bilinmeyenli Diophantus denklemi kurulur. y=7t/23 denirse x=(t-1)/9 olur. t=46 için y=14 ve x=5 olarak bulunur.

t=63 için y=21 olur. Fakat x=(92-1)/9 pozitif bir tamsayı olamaz.

t=92 için y=28 olur. Oysa x=(92-1)/9 pozitif bir tamsayı değildir.

Çinli Yan Kung,1372 yılında şöyle bir problem düzenledi. Sayıları bilinmeyen boncuklar yetmiş yedili olarak dizilirse 50 boncuk daha gerektiği halde, her ipe yetmiş sekizli dizerseniz hiç boş kalmıyor. Boncuk sayısı nedir? Boncuk sayısı N ise, x ve y tamsayıları için N= 77x+50=78y olan Diophantus denklemi kurulur.

Alman matematikçi Christoff Rudolff, bu tür problemi şöyle yazmıştır: Erkek, kadın ve çocuklardan oluşan 20 kişilik bir grup tümü 20 lira vererek bir geziye katılıyorlar. Erkekler üçer, kadınlar ikişer ve iki çocuk da birer lira veriyor.

Erkeklerin, kadınların ve çocukların sayıları nedir?

Erkekleri x, kadınları y ve çocukları da z ile gösterirsek x+y+z/2=20 ve x+y+z=20 denklemi kurulur. Buradan çözüme gidilir.

İsviçreli matematikçi Leonhard Euler 1770 yılında, 100 sayısını 7 ve 11 ile bölünecek biçimde iki parçaya ayırınız sorusunu sormuştur. Bu da 7x+11y=100 olan Diophantus denkleminin çözümüdür.

$r \neq 1$ ve pozitif n sayısı için geometrik seri

$$a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

olarak yazılır. r sayısı $-1<r<1$ ise, bu toplam $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}+\ldots = \dfrac{a}{r-1}$

olur.

Matematiği ve problem çözmeyi çok seven Dionisius, arkadaşı Diophantus'un mezar taşına şunları yazdırıyor." Yaşamının altıda biri çocukluğudur. On ikide birinden sonra sakal bırakmıştı. Yedide birinden sonra evlendi. Bu evliliğinden beş yıl sonra bir oğlu oldu. Oğlu, babasının yarı yaşında öldü. Baba ancak dört yıl daha yaşayabildi. Diophantus öldüğünde kaç yaşındaydı?

Diophantus x yaşında ölsün. Buna göre

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{6} + 4 = x$$

denklemi kurulur. Bu denklem çözülürse Diophantus'un 84 yıl yaşadığı anlaşılır.

Aralarında iki fark olan asal sayılara ikiz asal sayılar denir.

Örneğin (5,7), (11,13), (17,19), ...,(1.000.000.000.061, 1.000.000.000.063),… birer ikiz asal sayı çiftleridir. İkiz asal sayı çiftlerinin sonsuz tane olduğu henüz çözülemedi. Bilgisayarlarla 30.000.000 sayısından küçük 152.892 tane ikiz asal sayı çifti bulundu. 10^{12} ile 10^{12} + 10.000 sayıları arasında sadece 20 tane ikiz asal sayı çifti vardır. 2000 yılında bulunan ve her biri 24099 rakamlı olan

$$66555035.2^{80025} \pm 1$$

ikiz sayı çiftleri bilinen en büyükleridir.

Her çift sayı, sonsuz bir şekilde iki asal sayının farkı biçiminde yazılabilir. Örneğin, 2=5-3, 4=7-3

$$6=29-23=137-131=599-593=1019-1013=...$$

olarak yazılabilir. Yalnız bu soru halen çözülememiş ve bir tahmin olarak kalmıştır.

Özellikle 10 çift tamsayısı art arda gelen asal sayıların 15 farklı yolla yazımlı biçimi vardır.

Asal sayıların sonsuz tane olduğunu Euclides çok zarif ve kolay bir yolla kanıtlamıştır.

İkiz iki asal sayıların çarpımına 1 eklenirse bu sayı bir tam kare sayı olur. Örneğin, $5.7+1=36=6^2$, $11.13+1=144=12^2$, $17.19+1=18^2$, $19.21+1=400=20^2$, $21.23+1=22^2$, … olurlar.

$$(10^{n-1} + 2.\ 10^{n-2} + 3.\ 10^{n-3} + n)(10-1)+(n+1) = \frac{10^{n+1}-1}{9}$$

olduğundan

$$\begin{gathered}
1.9+2=11\\
12.9+3=111\\
123.9+4=1111\\
1234.9+5=11111\\
12345.9+6=111111\\
123456.9+7=1111111\\
1234567.9+8=11111111\\
12345678.9+9=111111111\\
123456789.9=111111111
\end{gathered}$$

yazılır.

Fermat,

$$2^{2^n} + 1$$

sayısının asal olduğunu ileri sürmüştür. Oysa Euler, 1732 yılında bu önerinin yanlış olduğunu

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6.700.47$$

biçimindeki ters örnekler kanıtlamıştır. Bu nedenle daha sonraki yüzyıllarda

$$2^{2^n}$$

türündeki sayılara Fermat sayıları ismi verilmiştir.

Kaynaklar

1. Dönmez , A. , Matematik Tarihi 10 Cilt.