

BİR BOYUTLU KESME PROBLEMİ İÇİN ÜÇ AMAÇLI BİR MATEMATİKSEL MODEL VE ÇÖZÜM ALGORİTMASI

Nergiz Kasimbeyli*, Duygu Demirci

Endüstri Mühendisliği Bölümü, Eskişehir Teknik Üniversitesi, İki Eylül Kampüsü, Eskişehir
nkasimbeyli@anadolu.edu.tr, dmrcdyg@gmail.com

Geliş Tarihi: 11.06.2018; Kabul Ediliş Tarihi: 23.01.2019

ÖZ

Bu makalede, bir boyutlu kesme ve ana malzeme seçimi problemi ele alınmıştır. Bu problemin matematiksel modelinin kurulması ve çözülmesindeki temel zorluklarından biri, kesme planlarının parametre kümesi olarak kullanılmak istenmesidir. Oluşturulması gereken kesme planlarının toplam sayısının çok fazla olması, hem kesme planları kümesinin oluşturulmasını hem de problemin çözüm sürecini oldukça zorlaştırmaktadır. Bu makalede, söz konusu problem için önceden kesme planları kümesi oluşturulmaksızın, yeni bir üç amaçlı matematiksel model önerilmiştir. Amaç fonksiyonları, kesme kayıpları (fire), farklı ana malzeme türü sayısı ve talep fazlası kesilen ürün miktarları minimize edilecek şekilde formüle edilmiştir. Geliştirilmiş olan matematiksel model için çözüm algoritması sunulmuş ve hem model hem de algoritma test problemleri üzerinde yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bir boyutlu kesme problemi, ana malzeme seçimi problemi, çok amaçlı optimizasyon, kesme kaybı en küçüklenmesi

A THREE OBJECTIVE MATHEMATICAL MODEL FOR ONE DIMENSIONAL CUTTING STOCK PROBLEM AND SOLUTION ALGORITHM

ABSTRACT

In this paper, a one-dimensional cutting stock problem is studied. One of the main difficulties in formulating and solving mathematical models for one-dimensional cutting stock problems, is the use a set of cutting patterns as a parameter set. Since the total number of cutting patterns to be generated may be numerous, both the generation and the use of such a set, lead to computational difficulties in solution process. In this paper, a new three-objective linear integer programming model that does not use a set of cutting patterns, is formulated. The objectives are related to the trim loss amount, the total number of different standard lengths used, and the production amount that exceeds the given demand for each cutting order. A solution algorithm for the presented mathematical model is given. Both the mathematical model and the solution algorithm are illustrated on test problems.

Keywords: One dimensional cutting stock problem, stock size selection, trim loss minimization, multi objective optimization

* İletişim yazarı

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, bir boyutlu kesme ve ana malzeme seçimi problemi ele alınmıştır. Bir boyutlu kesme problemleri, genellikle ana malzeme olarak nitelendirilen uzun bir çubuktan (örneğin metal, ahşap, plastik bir çubuk veya saç rulo vb.), sipariş parçaları olarak nitelendirilen daha kısa parçaların kesilmesi problemidir. Bu tür problemlerde, daha kısa parçalar, bu parçalara olan talepler (sipariş miktarları) kadar kesilmek istenmektedir. Sipariş edilen parçalar, talepler doğrultusunda ana malzemeden kesildiğinde, ana malzemenin hiçbir siparişi karşılamayacak kadar kısa olan arta kalan kısmına fire denir. Bu firelerin toplam miktarı, her bir ana malzemeden arta kalan firelerin toplam boyutuna eşittir. Her bir ana malzemeden arta kalan ve tek başına hiçbir siparişi karşılayamayacak boyutta olan bu küçük parçalar aslında çok büyük paralar karşılığında satın alınmış olduğundan, onların da maliyeti üretici firma tarafından satılacak ürünün fiyatına eklenmek zorundadır. Daha çok fire, aslında daha yüksek üretim maliyeti demektir. Fire maliyetinin artması, üretici firmanın rekabet gücünü olumsuz etkileyen en önemli faktörlerden biridir. Fire maliyetinin düşürülmesi, bu yüzden önemli bir problem haline gelmektedir. Bu problem, hem optimal kesme planlarının bulunması problemi, hem de toplam kullanılan ana malzeme boyutunun minimizasyonu problemi şeklinde ele alınabilmektedir. Literatürde bu problem daha çok elde var olan tek çeşit ana malzeme türüne göre toplam fireyi minimize edecek kesme planlarının bulunması problemi şeklinde ele alınmıştır (Dyckhoff, 1990, Hinxman, 1980). Bu problem de aslında iki farklı yaklaşımla ele alınabilmektedir. Birinci yaklaşım, elde var olan ana malzeme türü ve kesilecek sipariş parçalarının boyutları dikkate alınarak ve olası “bütün” kesme planları oluşturularak, bunların içinden talepler doğrultusunda fireyi en küçükleyecek kesme planlarının seçilmesine dayanır. Fakat bu yaklaşım, olası kesme planlarının çok büyük sayıda olmasından dolayı hesapsal zorluklara neden olmaktadır (Belov ve Scheithauer, 2002) (Gasimov vd., 2007). İkinci yaklaşım ise, kesme planlarının bir parametre olarak kullanılmadığı bir yaklaşımdır. Bu durumda matematiksel model, sadece optimal kesme planlarının bulunacağı şekilde formüle edilir.

Bu makalede, birden fazla ana malzeme türünün var olduğu durumda ikinci yaklaşım kullanılmış ve hem ana malzeme türünün, hem firenin hem de talep fazlası üretimin en küçüklenmesi problemi aynı matematiksel modelde ele alınmıştır. Problemin çözülmesi için literatürde görmeye alıştığımız yaklaşım dışında bir çözüm önerisi geliştirilmiştir. Genellikle kesme problemleri, hem matematiksel modellenmeleri açısından hem de çözüm üretilmesi açısından zor olarak bilinen tam sayılı problemler sınıfına aittir. Hatta bu problemler, çözüm zorluğu açısından NP-zor (NP-hard) olarak bilinen problem sınıfına dahil edilmektedir. Bu yüzden bir boyutlu kesme ve ana malzeme seçimi problemi günümüzde de güncel problemlerden biri olup, üzerinde yoğun olarak çalışılan problemlerdendir. Literatürde bu tür problemleri çözmek için, genellikle kesme ile ana malzeme seçiminin ayrı ayrı ele alındığı yaklaşımlar daha fazla araştırılmıştır. Bu makalede sunulan çalışmanın en temel özelliklerinden biri, hem kesme probleminin hem de ana malzeme seçimi problemini aynı matematiksel modelde ele alınmasıdır. Çalışmamızın bir diğer özelliği de kesme planları kümesinin önceden türetilmesine ihtiyaç duyulmadan hem kesme probleminin hem de ana malzeme seçimi probleminin tek bir matematiksel modelde ele alınmasıdır. Geliştirilen model kesme planları kümesini parametre kümesi olarak kullanmamakta, sadece optimal kesme planlarının çözüm olarak üretilmesini öngörmektedir. Bir boyutlu kesme problemleri için, kesme planlarının parametre kümesi olarak kullanılmadığı ilk matematiksel model, bilgimiz dâhilinde Kasimbeyli vd. (2011) ‘nin çalışmasında ele alınmış ve sezgisel bir algoritma geliştirilerek çözümler üretilmiştir. Bu makale, Kasimbeyli vd. (2011) çalışmasının devamı olup, o çalışmada geliştirilen matematiksel modele yeni bir amaç fonksiyonu eklenmiş ve çözümleri bulmak için de benzer bir sezgisel algoritma kullanılmıştır. Kasimbeyli vd. (2011) çalışmasından farklı olarak talep fazlası üretim miktarlarının minimize edilmesi, bu çalışmada ek bir amaç fonksiyonu olarak araştırılmış ve sezgisel algoritma da bu yeni amaç fonksiyonunu da en küçükleyecek şekilde güncellenmiştir. Ayrıca, bu makalede önerilen algoritma, daha önceki çalışmada önerilen algoritmadan farklı olarak, amaçların öncelik sıralamasını da dikkate alacak şekilde ve ürün sayısı kadar kesme planı üret-

mek yerine sadece bir adet (amaçların öncelik tercihini yansıtan) kesme planı üretecek şekilde tasarlanmıştır. Bu makalede önerilen sezgisel algoritmada her üç amaç fonksiyonunun öncelik sıralamasının nasıl dikkate alınacağı ve buna bağlı olarak da bu algoritmanın farklı bir versiyonunun nasıl uygulanacağı da açıklanmıştır.

Yeni bir amaç fonksiyonunun modele eklenmesi oluşturulacak kesme planlarının etkinliği açısından oldukça önemlidir, zira model, ürün taleplerini sağlamak ve firenin küçüklenmesi için bazı durumlarda talebin çok üzerinde üretim yapılmasına izin verebilmektedir. Diğer amaç fonksiyonları ile birlikte, talep fazlası üretimin de minimize edilmesi, bilginiz dâhilinde literatürde ilk kez bu makalede araştırılmıştır.

2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL MODELİ

2.1 Parametreler

i ile ana malzeme indisi işaretlenmiştir. m çeşit ana malzeme olduğu varsayılmaktadır, $i=1, \dots, m$;

j ile ürün çeşidi indisi işaretlenmiştir. n çeşit ürün olduğu varsayılmaktadır, $j=1, \dots, n$;

c_j : j . çeşit ürünün boyutu (uzunluk);

L_i : i . çeşit ana malzemenin boyutu (uzunluk);

d_j : j . çeşit ürüne olan talep miktarı (sayı);

K_i : i . çeşit ana malzemenin üretim süresinde kullanılabilir maksimum miktarı.

2.2 Karar Değişkenleri

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & i.\text{çeşit ana malzeme } k.\text{kez kullanılırsa,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$z_i = \begin{cases} 1, & i.\text{çeşit ana malzeme kullanılırsa,} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

y_{ijk} : i . çeşit ana malzeme k . kez kullanıldığında kesilen j . ürün sayısı.

2.3 Matematiksel Modelin Amaç Fonksiyonları

1. Toplam fire:

$$f_1(x, y, z) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{K_i} (L_i x_{ik} - \sum_{j=1}^n c_j y_{ijk}). \quad (1)$$

2. Talepten fazla yapılan üretim miktarı:

$$f_2(x, y, z) = \sum_{j=1}^n [\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{K_i} y_{ijk} - d_j] \quad (2)$$

3. Kullanılabilir toplam ana malzeme çeşidi:

$$f_3(x, y, z) = \sum_{i=1}^m z_i. \quad (3)$$

Bu işaretlemeler dahilinde, problemin matematiksel modeli aşağıdaki şekilde formüle edilir.

2.4 Matematiksel Model

$$L_i x_{ik} - \sum_{j=1}^n c_j y_{ijk} \geq 0, \quad \text{her } i \text{ ve her } k \text{ için,} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{K_i} y_{ijk} - d_j \geq 0, \quad \text{her } j \text{ için,} \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{K_i} x_{ik} \leq K_i z_i, \quad \text{her } i \text{ için.} \quad (6)$$

$$y_{ijk} \geq 0 \text{ ve tam sayı, } z_i \in \{0,1\}, x_{ik} \in \{0,1\} \quad (7)$$

Kısıtları altında;

$$\min [f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)]. \quad (P)$$

(P) probleminde;

- (4) kısıtları, her bir ana malzemeden kesilecek parçaların toplam boyutunun, bu ana malzemenin boyutunu aşmamasını garantiler.
- (5) kısıtları, her bir ürünün toplam kesilecek miktarının, en az talep kadar olmasını garantiler.
- (6) kısıtları ise ilişkilendirme kısıtları olup, her bir ana malzemenin sadece seçilirse, üretimde kullanılabilirliğini garantiler.
- (7) kısıtları, modelde kullanılan karar değişkenlerinin değer kümelerini ifade eder.

Amaç fonksiyonlarını kıyaslayacak olursak, bunların çelişen amaçlar olduğu kolaylıkla anlaşılabilir. Talepten fazla üretime izin verilerek, aslında toplam firenin daha küçük olması sağlanabilir. Fakat talep fazlası üretim en küçükleğinde, fire artışına katlanılacak şekilde bir ödünleşimin göz önünde bulundurulması gerekiyor ki bu da çok amaçlı optimizasyonun temel unsurlarından biridir. Pratikte, talep fazlası üretimin en küçüklemediği durumlarda, fire miktarı küçük olsa da talepten fazla üretilen ürün miktarının büyük boyutlara ulaşabileceği görülmüştür ki, bu da çoğu zaman kabul edilebilir bir durum değildir, çünkü talep fazlası üretilen parçalar da yönetim tarafından fire olarak görülebilir. Benzer şekilde, birinci ve üçüncü amaç fonksiyonları da çelişen

amaçlardır, öyle ki ana malzeme türü en küçüklenmediği durumda, yani üretici firma, deposunda “her çeşit” ana malzeme bulundurabilse aslında fireyi de sınırlayabilir veya problemi sifıra yakın bir fire ile çözebilir. Fakat bunun için çok büyük miktarda ana malzeme çeşidinin depoda bulundurulması gerekir ki, pratik olarak böyle bir şeyin gerçekleşmesi mümkün olmamaktadır. Buradan hareketle, “ne kadar fire”, “kaç çeşit ana malzeme” ödünleşiminin çok iyi analiz edilmesi gerektiği anlaşılır. Benzer bir ödünleşim analizi, ikinci ve üçüncü amaç fonksiyonları arasında da yapılmalıdır. Böyle bir ödünleşim, amaç fonksiyonlarına ağırlık veya önem katsayıları verilerek yapılabilir. Fakat bu durumda da kesin çözüm yöntemlerini kullanabilmek için, ağırlık katsayılarını, başka bir deyimle karar vericinin amaç fonksiyonları açısından tercihlerini yansıtan önem derecelerini ve hatta referans noktası tercihlerini göz önünde bulundurma olanağı sağlayan skalerleştirme yöntemlerinin kullanılması gündeme geliyor. Kesme problemleri zaten zor çözülen problemler sınıfına girdiğinden, bu durum, kesin çözümlerin bulunmasını daha da zorlaştırmaktadır. Bunu göz önünde bulundurarak bu çalışmada, geliştirilmiş olan matematiksel modeli çözmek için sezgisel bir çözüm algoritması önerilmiştir.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Bu bölümde, kesme ve ana malzeme seçimi probleminin bir önceki bölümde açıklanan matematiksel modelinin çözülmesi için önerilen sezgisel algoritma açıklanacak ve algoritmanın performansı bir test problemi üzerinde tartışılacaktır.

Algoritmada, bir önceki bölümde açıklanan parametre listesine ek olarak aşağıdaki parametreler kullanılacaktır:

s indisi, güncellenmiş ürün kümesindeki ilk ürünün numarası.

h_s : seçilen ana malzeme türüne yerleştirilebilecek s . ürünün maksimum sayısı.

t : izin verilen fire miktarı için üst sınır.

a : izin verilen fire miktarını arttırmak için kullanılacak adım uzunluğu.

d : talep fazlası üretilen miktar için izin verilecek üst sınır.

b : izin verilen talep fazlası üretim miktarını arttırmak için kullanılacak adım uzunluğu.

COUNT: güncellenmiş ürün kümesindeki “birinci” ürünün oluşturulacak kesme planındaki sayısını gösteren parametre olup, alabileceği değerler, $COUNT = 0, 1, \dots, h_s$ şeklinde tanımlanmıştır.

Makalede araştırılan problem için geliştirilen matematiksel model tam sayılı olduğundan, talebin tam olarak belirlenen miktarının uygun çözüm alanının dışında olması beklenen bir durumdur. Bu yüzden, bütün ürünler için, talebin tam olarak sağlanacak şekilde kesme planlarının oluşturulması, her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda, talep fazlası üretime izin verilmesi istenen bir durum olmasa da buna mecbur kalınabilir. Fire miktarının, talep fazlası üretim miktarının ve kullanılacak ana malzeme sayısının en küçüklenmesi, bir biri ile çelişen amaçlar olduğundan, karar verici hangi amacın ne kadar önemli olduğunu veya hangi amaçtan ne kadar ödün verilebileceğini belirlemek durumundadır.

3.1 Algoritma

Başlangıç Adım. $I = \{1, \dots, m\}$ uzunluklarına göre, küçükten büyüğe sıralanmış ana malzeme çeşidi kümesi olsun. $J = \{1, \dots, n\}$ uzunluklarına göre büyükten küçüğe sıralanmış ürün kümesi olsun. Başlangıç ürün kümesi $J = \{1, \dots, n\}$ şeklinde tanımlandığından, $s = 1$ olacaktır. (İlerleyen bir iterasyonda, $J = \{2, 1, 3, 4, \dots, n\}$ olarak güncellendiğinde $s = 2$ olacaktır ve. s.) $COUNT = 0, i = 1, j = 1, t = 0$, ve a parametresi için uygun bir değer seçilir (bu parametrenin değeri, ürünlerin uzunlukları ölçeği ile orantılı olarak belirlenmelidir, örneğin ürün uzunlukları santimetre cinsinden belirlenmiş ve en kısa ürün 10 cm civarında ise, $a = 1$ cm veya 0.5 cm seçilebilir).

Adım 1. i . ana malzeme ve J kümesinin ilk elemanı olan s . sipariş parçası için, fire miktarı t 'yi aşmayacak şekilde olası bir kesme planı aşağıdaki şekilde oluşturulur: i . ana malzemeye yerleştirilecek s . parça için h_s değeri hesaplanır. $h_s \times c_s \leq L_i$ ve $h_s \leq d_s$ olacak şekilde en büyük tamsayı h_s değeri bulunur. ($h_s - COUNT$) kadar ürün ana malzemeye yerleştirilir.

Adım 2. $L_i - ((h_s - COUNT) \times c_s)$ değeri hesaplanarak ana malzemeden kalan miktar bulunur. Ana malzemeden kalan miktar, sıradaki ürünün yerleştirilmesine izin veriyorsa, yani

$L_i - ((h_s - COUNT) \times c_s) > c_2$ (veya $L_i - ((h_s - COUNT) \times c_s) < c_2$ fakat $L_i - ((h_s - COUNT) \times c_s) > c_3$) ise bu ürünün kalan miktara yerleştirilebilecek maksimum sayı olan h_2 belirlenerek h_2 adet 2. ürün (veya h_3 adet 3. ürün), kalan miktara yerleştirilir ve s. Bu süreç, kalan miktara başka hiç bir ürün yerleştirilemeye kadar devam ettirilir. $L_i - ((h_s - COUNT) \times c_s + h_2 \times c_2 + h_3 \times c_3 + \dots)$ hesapla ve **Adım 3'e git.**

Adım 3. Eğer $L_i - ((h_s - COUNT) \times c_s + h_2 \times c_2 + h_3 \times c_3 + \dots) \leq t$ ise, Adım 4'e git. Değilse, yani $L_i - ((h_s - COUNT) \times c_s + h_2 \times c_2 + h_3 \times c_3 + \dots) > t$ ise, **Adım 5'e git.**

Adım 4. $(h_s - COUNT) \times c_s + h_2 \times c_2 + h_3 \times c_3 + \dots$ şeklinde bir kesme planının oluşturulabilmesi, hesaplanacak talep fazlası üretim miktarına bağlı olarak aşağıdaki şekilde belirlenecektir. Bu planda yer alan s nolu, 2 nolu, 3 nolu ve s. ürünlerin talep miktarları d_s, d_2, d_3 ve s. için $\min\{d_s / h_s - COUNT, d_2 / h_2, d_3 / h_{3,\dots}\}$ sayısı belirlenir. Eğer p sayısı olarak bu sayıdan küçük olan en büyük tam sayı değeri seçilirse, ve $\min\{d_s / h_s - COUNT, d_2 / h_2, d_3 / h_{3,\dots}\}$ tam sayı değilse, bu kesme planı i. ana malzemeye p kez uygulandığında d_s, d_2, d_3 ve s. talep miktarlarından daha az miktar elde edilecektir. Böylece bu ürüne (veya ürünlere) olan talebi sağlayabilmek için güncellenmiş (kesilen ürün miktarını talepten çıkartarak elde edilmiş) talep miktarları için süreci tekrarlamak gerekecektir. Bu şekilde süreci devam ettirerek ve tamamen yeni bir kesme planı oluşturularak talep fazlası üretimi en küçükleme mümkün olabilmektedir. Fakat yeni bir kesme planı beraberinde yeni bir fire miktarı oluşumunu ve yeni bir ana malzeme çeşidi kullanımını gerektirebilir. Yani, p sayısı bu şekilde seçilirse, "talep fazlası üretimin en küçüklemesi" amacına, "firenin en küçüklemesi" amacına göre daha yüksek öncelik verilmiş olacaktır. Ancak p sayısı olarak $\min\{d_s / h_s - COUNT, d_2 / h_2, d_3 / h_{3,\dots}\}$ sayısından büyük olan en küçük tam sayı değeri seçilirse, ve $\min\{d_s / h_s - COUNT, d_2 / h_2, d_3 / h_{3,\dots}\}$ tam sayı değilse, bu kesme planı i. ana malzemeye p kez uygulandığında d_s, d_2, d_3 ve s. talep miktarlarından daha fazla miktar elde edilecektir. Bu talep fazlası miktar, izin

verilen d sayısı ile kıyaslanarak planın kabulüne veya reddine karar verilir. Kabulüne karar verildiği durumda, bu adıma gelindiğinde belirlenmiş olan fire miktarı ve aynı ana malzeme çeşidinin kullanımı garanti edilmiş olacaktır. Örneğin $\min\{d_s / h_s - COUNT, d_2 / h_2, d_3 / h_{3,\dots}\} = d_2 / h_2 = 2.3$ olsun. Bu durumda $p=3$ olacak ve bu kesme planı 3 kez aynı ana malzemeye uygulanacak ve aynı fire miktarı 3 ile çarpılacaktır. Bu plan 3 kez uygulanırsa 2. üründen $(3 \times h_2 - d_2)$ adet fazla kesilmiş olacak. Eğer bu fazlalık, izin verilen d sayısından küçükse bu plan, kesme planı olarak kabul edilecek ve 2. ürünün talebi tamamen karşılandığından bu ürün listeden çıkartılacaktır. Bu durumda, "firenin en küçüklemesi" amacına, "talep fazlası üretimin en küçüklemesi" amacına göre daha yüksek öncelik verilmiş olacaktır. p parametresi için olası iki versiyondan birinin seçilmesi, karar vericinin görüşüne bağlı olarak, daha az talep fazlası üretim, olası daha fazla fire miktarı ve/veya daha fazla ana malzeme çeşidi kullanımı arasında bir ödünleşimin göz önünde bulundurulması gerektirir.

Bu "kesme planı kısmının" kabul edildiği durumda **Adım 8'e git.** Eğer talep fazlası üretim, izin verilen d sayısından büyükse bu plan, kesme planı olarak kabul edilmeyecek ve bu durumda **Adım 5'e git.**

Adım 5. $COUNT = COUNT + 1$ olarak güncelle. Eğer $COUNT < h_s$ ise **Adım 1'e git.** Değilse, yani $COUNT \geq h_s$ ise **Adım 6'e git.**

Adım 6. $s = s+1$ olarak güncelle. Eğer $s \leq n$ ise, bu durumda $J = \{s, 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n-1, n\}$ olacak şekilde güncelle ve Adım 1'e git; değilse, yani $s > n$ ise, bu durumda Adım 7'ye git.

Adım 7. $i = i+1$ olarak güncelle. Eğer $i \leq m$ ise Adım 1'e git, değilse, yani $i > m$ ise $t = t+a$ ve $i = 1$ olarak güncelle ve Adım 1'e git.

Adım 8. Adım 3'te i. ana malzemeden üretilen kesme planı kısmı C olsun. Adım 4'te bu kesme planı kısmının i. ana malzemeye p kez uygulanmasına karar verildiğini varsayalım. Bu kesme planını p kez uyguladıktan sonra talep miktarlarını ve yeni talep miktarlarına karşı gelen J ürün listesini güncelle (talepleri sıfırlanan ürünler listeden çıkartılacaktır). Eğer $J = \emptyset$ ise bütün ürünlere olan talepler sağlanmıştır, elde edilen kesme planı, karar

vericinin tercihlerine cevap veren çözümdür – *Dur*. Eğer $J \neq \emptyset$ ise güncellenmiş bu ürün listesi için *Adım 1'e git*.

3.2 Algoritma Üzerine Tartışma

Bu bölümde kısaca, Algoritmanın nasıl çalıştığı ve matematiksel modelde yer alan 3 adet amaç fonksiyonunun algoritma tarafından nasıl önceliklendirildiği açıklanacaktır.

Öncelikle bu makalede araştırılan problemin, daha önce de vurgulandığı üzere, Kasimbeyli vd. (2011) çalışmasının devamı olduğunun ve o çalışmada geliştirilen matematiksel modele yeni bir amaç fonksiyonu eklenerek ele alındığının bir kez daha altını çizmek istiyoruz. Matematiksel modele eklenen bu yeni amaç fonksiyonunun, çalışmaya önemli bir yenilik getirdiğini de vurgulamakta yarar var, zira bu amaç fonksiyonu olmaksızın bakılan matematiksel modelin çözümlerinde talep fazlası üretimin epey yüksek boyutlarda olabileceği açıktır ve ilerleyen bölümlerde bu durum örneklerle de desteklenmiştir. Bu çalışmada ele alınan üç amaçlı problem için kullanılan ve yukarıda kapsamlı bir şekilde tarif edilen algoritma da, Kasimbeyli vd. (2011) çalışmasında verilen algoritmanın bu yeni modele uyarlanması gibi görünse de aslında epey yenilikler içermektedir.

1. Öncelikle algoritmanın adımları gayet kapsamlı ve hiçbir soru işareti bırakmayacak şekilde tarif edilmiştir.
2. Yeni algoritma ile eski algoritma arasındaki en köklü fark, yeni algoritmanın sadece bir tane kesme planı üretmesi ve bu kesme planının da karar vericinin amaçlar arasındaki tercih önceliğini dikkate almasıdır. Algoritmanın bu konuda esnek bir yapıya sahip olması, eski algoritmadan en büyük farklılıklarından biridir. Örneğin, yukarıda açıklanan şekli ile algoritmada amaç fonksiyonlarının öncelik sırası, Adım 4'te p parametresi için seçilecek değere bağlı olarak: “Fire” – “Talep Fazlası Üretim” – “Ana Malzeme Çeşitliliği” veya “Talep Fazlası Üretim” – “Fire” – “Ana Malzeme Çeşitliliği” şeklinde olacaktır. Bu arada, eski algoritmanın, her defa çalıştırıldığında ürün sayısına eşit miktarda kesme planı ürettiğini ve amaç fonksiyonlarının tercih sırasını net bir şekilde yansıtmadığını vurgulamakta yarar var.

3. Yeni algoritmanın, amaç fonksiyonlarının önem sırasını net bir şekilde yansıtmaması, Algoritmanın 4 - 8 Adımlarında tarif edilmiştir. Öyle ki, Adım 4'te p parametresi için seçilecek değere bağlı olarak “Fire” ile “Talep Fazlası Üretim” arasında tercih yapılabilecek. Fakat “Fire” miktarı ve aynı şekilde “Talep Fazlası Üretim” istenen düzeyde sağlanmayana kadar olası tüm “COUNT” değerleri ve olası tüm s değerleri (yani güncellenmiş J kümeleri) aynı ana malzeme için deniyor. Eğer bütün COUNT değerleri ve bütün s değerleri, yani ürünlerin kesme planına hangi sırada dahil edilmesini belirleyen olası tüm J kümeleri deneyerek, fire ve talep fazlası üretim için izin verilen üst sınırları sağlayan kesme planı üretilemez ise (bakınız: Adım 5-6) bu durumda Adım 7'ye gidilerek bir sonraki ana malzeme deniyor. Böylece aslında ana malzeme çeşidinin de en küçüklenmesi temin edilmiş oluyor. Bu sebeptendir ki Algoritmanın yukarıda açıklanan şekli ile kullanımı, amaç fonksiyonlarının tercih sırasının 2. sıfta açıklandığı sırada olmasını sağlıyor. Sonuç itibarı ile yeni algoritma çok net bir şekilde, oluşturulacak kesme planında bütün amaç fonksiyonlarının en küçüklenmesini temin etmiş oluyor. Eski algoritmada ise, aynı “COUNT” değeri, “fire” $\leq t$ eşitsizliği sağlanana kadar tüm ana malzemeler deniyor, olmayınca güncelleniyor.
4. Yeni algoritma ile eski algoritma arasındaki en önemli farklılıklardan birisi de, yeni algoritma, karar vericinin tercihlerini sağlayan bir tek kesme planı üretirken; eski algoritmanın ise amaç fonksiyonlarını en küçükleme sırası için tercihlere bakılmaksızın, ürün sayısı miktarda kesme planı üretilip, onların içinden seçim yapılacak şekilde tasarlanmış olmasıdır.

3.3 Algoritmada Ana Malzeme Çeşidinin En Küçüklenmesinin En Yüksek Önceliğe Sahip Olduğu Durumun Göz Önünde Bulundurulması

Algoritmanın yukarıda Bölüm 3.1'de açıklanan şeklinin, amaç fonksiyonlarının öncelik sırasının “Fire” – “Talep Fazlası Üretim” – “Ana Malzeme Çeşitliliği” veya “Talep Fazlası Üretim” – “Fire” – “Ana Malzeme Çeşitliliği” şeklinde dikkate alındığı, bir önceki bölümde de vurgulanmıştır. Bu bölümde, öncelik sırası değiştirilirse, algoritmanın böyle bir durumu nasıl göz önünde bulunduracağı açıklanmıştır.

“Ana Malzeme Çeşitliliği” - “Fire” – “Talep Fazlası Üretim” veya “Ana Malzeme Çeşitliliği” – “Talep Fazlası Üretim”- “Fire” önceliklerinin dikkate alınabilmesi için 3.1 Bölümünde açıklanan Algoritmada Adım 7, aşağıdaki şekilde değiştirilebilir:

Adım 7. $t = t+a$ (ve gerekirse $d = d+b$) olarak güncelle. Eğer t ve d değerleri, izin verilen maksimum sınır değerinden küçük ise (aynı i için) Adım 1’e git. Bu adımda fire üst değeri ile talep fazlası üretim miktarları arasında bir seçim – tercih yapılarak öncelik sırası belirlenebilir. Eğer t ve d değerleri güncellendikten sonra, izin verilen maksimum sınır değerinden küçük olmaz ise $i = i+1$ olarak güncelle. Eğer $i \leq m$ ise $t = 0$ (ve gerekirse $d = 0$) olarak güncelle ve Adım 1’e git, değilse, yani $i > m$ ise DUR – KARAR: kabul edilen fire üst sınır ve talep fazlası üst sınır değerlerine karşı gelen kesme planı yoktur. Böyle bir durumla karşılaşılması son derece ekstrem bir durum olup, “fire üst sınır” ve “talep fazlası üst sınır” değerlerinin makul sınırlarda tanımlanması bu durumu önleyebilecektir.

4. ÖRNEK PROBLEM VE HESAPLAMA SONUÇLARI

Önceki bölümlerde açıklanan matematiksel model ve bu modelin çözümü için geliştirilen sezgisel algoritma aşağıdaki problem üzerinde denenmiştir. Bu makalede geliştirilen matematiksel modelin ve yeni amaç fonksiyonunun rolünün vurgulanabilmesi ve sezgisel algoritmanın da performansının görülebilmesi için, problemin çeşitli versiyonlarının GAMS program paketi ile de çözümlenerek, elde edilen çözümlerin karşılaştırılabilmesi açısından, makul boyutlarda bir test problemi seçilmiştir.

4.1 Test Problemi

Ana malzeme sayısı: $m = 5$;

Ana malzemelerin uzunlukları vektörü: $L = (100, 120, 130, 140, 160)$;

Ürün sayısı: $n = 8$;

Ürün uzunlukları vektörü: $c = (45, 36, 31, 14, 13, 12, 11, 10)$;

Ürün talepleri vektörü: $d = (50, 70, 90, 30, 20, 14, 28, 10)$.

4.2 Sezgisel Algoritma ile Elde Edilen Çözüm Sonuçları

Geliştirilen sezgisel algoritmanın kullanılması ile 5 farklı “ana malzeme türünün” 4 türü kullanılmış, “talepten fazla üretim” = 0, “fire miktarı” = 68 olacak şekilde bir çözüm elde edilmiştir. Uygulanmış olan algoritmada amaç fonksiyonlarının öncelik sırası, “Talep Fazlası Üretim” – “Fire” – “Ana Malzeme Çeşitliliği” şeklinde dikkate alınmıştır, bakınız Tablo 1.

Algoritma ile oluşturulan kesme planı:

$[(45*1) + (10*1)] \rightarrow 10$ adet; 100 cm’lik ana malzeme; fire=0;

$[(45*1) + (31*1) + (12*2)] \rightarrow 7$ adet; 100 cm’lik ana malzeme; fire=0;

$[(45*1) + (11*5)] \rightarrow 5$ adet; 100 cm’lik ana malzeme; fire=0;

$[(36*2) + (14*2)] \rightarrow 15$ adet; 100 cm’lik ana malzeme; fire=0;

$[(36*1) + (31*1) + (11*3)] \rightarrow 1$ adet; 100 cm’lik ana malzeme; fire=0;

$[(45*1) + (36*1) + (13*3)] \rightarrow 6$ adet; 120 cm’lik ana malzeme; fire=0;

$[(45*1) + (31*2) + (13*1)] \rightarrow 2$ adet ; 120 cm’lik ana malzeme; fire=0;

$[(36*1) + (31*3)] \rightarrow 26$ adet; 130 cm’lik ana malzeme; fire=1;

$[(45*1) + (36*2)] \rightarrow 6$ adet; 120 cm’lik ana malzeme; fire=3;

$[(45*2) + (36*1)] \rightarrow 1$ adet; 130 cm’lik ana malzeme; fire=4;

$[(45*3)] \rightarrow 4$ adet; 140 cm’lik ana malzeme; fire=5.

Böylece 100 cm’lik ana malzeme türünden toplam 38 adet, 120 cm’lik ana malzeme türünden toplam 14 adet, 130 cm’lik ana malzeme türünden toplam 27 adet ve 140 cm’lik ana malzeme türünden toplam 4 adet olmak üzere, toplamda 83 adet ana malzeme kullanılmıştır.

Tablo 1. Sezgisel Algoritma ile (P) Problemi (Üç Amaçlı Model) İçin Elde Edilen Çözüm Sonuçları

	Amaç Fonksiyonu Değeri
Fire	68
Talepten Fazla Üretim	0
Kullanılan Ana Malzeme Türü	4

Makalenin bundan sonraki kısmında, “Talep Fazlası Üretim” amaç fonksiyonunun ve geliştirilen algoritmanın önemini örnekler üzerinde de vurgulamak için, problemin çeşitli versiyonları araştırılmış ve çözüm sonuçları kıyaslamalı olarak yorumlanmıştır. Önce tek amaçlı problem - sadece “fire” ‘nin en küçüklendiği durum ele alınmış, daha sonra, üç amaçlı (P) problemi, bu bölümde ele alınan örnek problem üzerinde denenmiş ve GAMS program paketi kullanılarak bulunan çözümler yorumlanmıştır.

4.3 Problemin Sadece Tek Amaçlı – Firenin En Küçüklenmesi Şeklinde Ele Alındığı Durum

Bu bölümde (P) problemi (bakınız Bölüm 2), aşağıdaki (8) kısıdı eklenerek ve amaç fonksiyonları kısmı aşağıdaki şekilde değiştirilerek, yani sadece firenin en küçüklendiği şekilde ele alınmıştır:

$$\sum_{i=1}^m z_i \leq M \quad (8)$$

(4) - (8) Kısıtları altında

$$\min f_1(x, y, z) \quad (P1)$$

Burada M parametresi, olası ana malzeme çeşitlerinin en üst sayısıdır. Bu problem yukarıdaki test örneği için GAMS program paketi CPLEX çözücüsü kullanılarak çözülmüş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuçlar:

Tablo 2. ($P1$) Probleminin Amaç Fonksiyonu İçin Bulunan Değer

	Amaç Fonksiyonu Değeri
Fire	16

Tablo 3. ($P1$) Problemi İçin Elde Edilen Ana Malzeme Türleri

	Kullanılan Ana Malzeme Sayısı (Adet)
Ana Malzeme Çeşidi 1 (100 cm)	51
Ana Malzeme Çeşidi 2 (120 cm)	74
Ana Malzeme Çeşidi 3 (130 cm)	62
Ana Malzeme Çeşidi 4 (140 cm)	72
Ana Malzeme Çeşidi 5 (160 cm)	70

Tablo 4. ($P1$) Problemi İçin Elde Edilen “Üretilen Ürün” Adetleri

	Talep (Adet)	Üretilen (Adet)
Ürün 1	50	55
Ürün 2	70	105
Ürün 3	90	523
Ürün 4	30	71
Ürün 5	20	464
Ürün 6	14	78
Ürün 7	28	794
Ürün 8	10	414

Yorum: Problemin amaç fonksiyonu değeri 16 olarak bulunmuştur. Fakat kesilen ürünlerin sayısına baktığımızda, talepten çok fazla üretim yapıldığı ve toplamda 5 çeşit ana malzemeden 329 adet kullanıldığı görülmüştür. Bu, gerek ana malzeme gerekse depo maliyetinin artması bakımından istenmeyen bir durumdur. Elde edilen sonucu, (P) probleminin, sezgisel algoritma kullanılarak elde edilen sonuçla kıyasladığımızda, “Fire” = 68, “toplam kullanılan ana malzeme sayısı” = 83 ve “talep fazlası üretim” = 0 olarak bulunduğu göz önünde bulundurulursa, algoritmanın ve üç amaçlı modelin etkinliği bariz şekilde görülmüş olur.

4.4 (P) Probleminin GAMS Paketi ile Bulunan Çözümlerinin Yorumlanması

Bu bölümde, makalede ele alınan (P) problemi ve örnek test problemimiz, eşit ağırlıklar kullanılarak skalerleştirilmiş ve GAMS program paketi kullanılarak çözülmüş ve sonuçlar yorumlanmıştır.

Amaç fonksiyonları için elde edilen en iyi değerler Tablo 5’te verilmiştir.

Tablo 5. (P) Probleminin GAMS Paketi ile Bulunan Amaç Fonksiyonları Değerleri

	Amaç Fonksiyonu Değeri
Fire	74
Talepten Fazla Üretim	2
Kullanılan Ana Malzeme Türü	2

Çözüm sonucu, ürünler için elde edilen üretim miktarları Tablo 6’da verilmiştir. Tablo’dan da görüldüğü üzere, 2. ve 4. ürünlerden birer tane fazla üretilen şekilde bir çözüm bulunmuştur.

Tablo 6. (P) Probleminin GAMS Paketi ile Bulunan Üretim Miktarları

	Talep (Adet)	Üretilen (Adet)
Ürün 1	50	50
Ürün 2	70	71
Ürün 3	90	90
Ürün 4	30	31
Ürün 5	20	20
Ürün 6	14	14
Ürün 7	28	28
Ürün 8	10	10

Problemin bu şekilde çözdürülmesi sonucu, 1. Ana Malzemeden 35 adet, 5. Ana Malzemeden de 34 adet kullanılarak (bakınız Tablo 7) en iyi çözüm hesaplanmıştır. GAMS paketinin bütün dünyada optimizasyon problemlerinin çözümü için geliştirilmiş olan en etkin paketlerden biri olduğu bilinmektedir. Kullanmış olduğumuz test örneğinin özellikle küçük boyutta seçilmesinin sebebi, bu problemin skalerleştirilmiş versiyonunun GAMS tarafından da kolaylıkla çözülecek en iyi çözümünün bulunabilmesidir. Bu durumda bile, GAMS ile bulunan çözümde 2 çeşit ana malzeme kullanılarak bir çözüm bulunsa da, fire miktarı (74 cm), sezgisel algoritmanın bulduğu değerden (68 cm) fazla çıkmıştır. Aslında, talepten fazla üretilen miktarların bazı işletmelerde fire olarak değerlendirildiğini de göz önünde bulundurursak, GAMS ile bulunan çözümdeki fire miktarının daha da arttığı görülmektedir (talepten fazla üretimin 2 adet $36+14=50$ cm. olduğunu da fire miktarı $74+50=124$ cm). Benzer şekilde “talepten fazla üretilen miktar” amaç fonksiyonu için de GAMS ile bulunan değer (2 adet), sezgisel algoritma ile bulunan değerden (0) fazla çıkmıştır.

Bunun bir sebebinin, sezgisel algoritmada amaç fonksiyonlarının önem sırasının, “talep fazlası üretim

- “fire” - “kullanılan ana malzeme sayısı” şeklinde alınması olsa da algoritmanın etkinliğinin de bir göstergesi olduğunu vurgulamak gerekir.

Tablo 7. (P) Probleminin GAMS Paketi ile Bulunan Ana Malzeme Miktarları

	Kullanılan Ana Malzeme Sayısı (Adet)
Ana Malzeme Çeşidi 1 (100 cm)	35
Ana Malzeme Çeşidi 2 (120 cm)	-
Ana Malzeme Çeşidi 3 (130 cm)	-
Ana Malzeme Çeşidi 4 (140 cm)	-
Ana Malzeme Çeşidi 5 (160 cm)	34

5. SONUÇ

Makalede, bir boyutlu kesme ve ana malzeme seçimi problemi için üç amaçlı bir matematiksel model ve bu model için sezgisel bir çözüm algoritması önerilmiştir. Algoritmanın başarısı bir test problemi üzerinde denenmiş ve sonuçlar çeşitli problem versiyonları için GAMS program paketi ile elde edilen çözümlerle kıyaslanarak algoritmanın ve matematiksel modelin etkinliği gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

1. **Belov, Scheithauer G.** 2002. "A Cutting Plane Algorithm for the One-dimensional Cutting Stock Problem with Multiple Stock Length", European Journal of Operational Research, 141: 274–294.
2. **Dyckhoff, H.** 1990. "A Typology of Cutting and Packing Problems", European Journal of Operational Research, 44: 145–159.
3. **Gasimov, R. N., Sipahiolu, A., Saraç, T.** 2007. "A Multi-Objective Programming Approach to 1.5-dimensional Assortment Problem", European Journal of Operational Research, 179: 64–79.
4. **Hinxman, A. I.** 1980. "The Trim-loss and Assortment Problems: a Survey", European Journal of Operational Research, 5: 8–18.
5. **Kasimbeyli, N., Saraç, T., Kasimbeyli, R.** 2011. "A two-objective Mathematical Model Without Cutting Patterns for One-dimensional Assortment Problems", Journal of Computational and Applied Mathematics, 235: 4663–4674.