Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)
Cilt 13, Sayı 1, Haziran 2019, sayfa 196-216. ISSN: 1307-6086

Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education
Vol. 13, Issue 1, June 2019, pp. 196-216. ISSN: 1307-6086

Araştırma Makalesi/ Research Article

Investigating 7th Grade Students' Proof Levels About Quadrilaterals

Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK [1], Aslıhan ÜSTÜN [2]

[1] Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Eğitim Fakültesi No:324, zulfiye.zeybek@gop.edu.tr, http://orcid.org/0000-0003-1601-8654

[2] MEB, Kızık Ortaokulu, 60aslihanustun@gmail.com, http://orcid.org/0000-00015508-7607

Received : 18.03.2019 Accepted : 04.05.2019
Doi: 10.17522/balikesirnef.541576

Abstract – Proof is considered to be an essential aspect of mathematics education from kindergarten through high school as highlighted by current educational reforms. The importance of proof has also been recognized by current curriculum in Turkey. This study aims to investigate 7th grade students proof schemes on the topic of quadrilaterals. According to the findings of the study, it is evident that the participants struggle to construct arguments to prove mathematical statements. The students, who are able to construct an argument to justify the correctness of the presented statements, construct arguments that are coded as empirical arguments. When asked to evaluate presented arguments, the majority of the participants find empirical arguments as the most convincing. Even though the students struggle to construct arguments to prove the correct mathematical statements, the majority of them are able to provide a valid counterexample to refute the incorrect mathematical statement.

Key words: counterexample, geometry, mathematics education, proof, proof schemes.

Corresponding author: Zülfiye Zeybek Şimşek, Tokat Gaziosmanpaşa University

Summary

Proof is considered as one of the most significant elements of mathematics education (Schoenfeld, 2009). The importance of mathematical proofs has also been emphasized in recent educational reform movements (CCSSI, 2010; NCTM,2000). In particular, The National Council of Teachers of Mathematics (NTCM) highlighted the importance of

mathematical proofs as a significant element of mathematics curriculum from kindergarten through high school mathematics. Through new curriculum reforms in Turkey, the significance of the concept of mathematical proof has also been emphasized (Ministry of National Education (MEB), 2018). Although the importance of proof has been emphasized by current educational reforms (CCSSI, 2010; NCTM, 2000, MEB,2018) and various researchers (Balacheff, 1988; Harel and Sowder, 1998; Schoenfeld, 2009) , studies have demonstrated that students at all levels struggle with the concept of proof (Harel & Sowder,1998b, 2007; Knuth & Sutherland, 2004; Özer &Arıkan, 2002).

The aim of this study is to analyze 7th grade students' conceptions of proof on the topic of quadrilaterals. The following research question guided the study:

1- What are 7th grade students' conceptions proofs on the topic of quadrilaterals?

Method

The purpose of this study is to investigate proof conceptions of 7th grade students. Therefore, the study was designed as a qualitative study . Since this study only focuses on one particular 7th grade classroom, it was designed as a case study. The participants consisted of six 7th grade students who attends at a public middle school in the province of Tokat. The participants were selected to exemplify different academic achievement levels as low, intermediate and upper-intermediate, in a way of placing two students in each level.

To identify participants' proof conceptions, individual interview forms were developed by using the proof schemes suggested by several researchers. For instance, Harel and Sowder (1998) categorize students' proof schemes in three main categories with several sub-categories as: (1) externally based proof schemes, (2) empirical proof schemes and (3) analytic proof schemes. The individual interview forms included three correct and one incorrect mathematical statement on the topic of quadrilateral, which constitutes an important concept in 7th grade. For each correct statement, four arguments at different proof schemes (externally, experimental, analytic) were developed by the researchers. For the incorrect statement, no argument was provided to the participants. Instead, they were expected to construct a justification by themselves.

In the process of data collection, participants were interviewed individually for about 40-45 minutes and all of the interviews were recorded by a video-camera. The participants were provided correct mathematical statements first and asked to decide whether the statement was true or false and then to provide a justification. Later, the arguments that were developed for the statements by the researchers were provided one by one and the participants were asked to evaluate the presented arguments. In the process of data analysis, the interview videos were watched several times and transcribed. The transcripts of the videos were analyzed by using content analysis technique (Büyüköztürk et al., 2010). Two researchers coded the data individually and then compare and contrast their codings.

Results

According to the findings of this study, the participants have difficulty in proving and they demonstrate several misconceptions regarding to the concept of proving. The majority of the participants struggle constructing an argument to justify the correctness of the statements. When they construct an argument, the majority of the arguments constructed are empirical arguments. In addition to constructing empirical arguments, the majority of the participants also choose empirical arguments as the most convincing arguments among others presented. Although the participants struggle to construct an argument to justify the correct mathematical statements, they struggle less when they attempt to construct counterexamples to refute the incorrect statement.

Discussion and Conclusion

This study evidence that students struggle while constructing arguments to justify mathematical statements. This finding is consistent with the results of many other studies (Coe & Ruthven, 1994; Healy & Hoyles, 2000; Harel & Sowder, 1998; Ozer & Arikan, 2000). In addition to struggling to construct arguments, participants also struggle while evaluating researcher generated arguments. The majority of the participants ignored the fact that mathematical proofs should be general, which shows that the statement is true for all cases. This result aligns well with the results of other studies in the literature. For instance, Stylianides (2007), Harel and Sowder (1998) and Balacheff (1988) stated that students tend to ignore the fact that mathematical proofs should be general.

Although the participants struggle to construct arguments to justify the correctness of mathematical statements, they are more easily able to construct valid counterexamples to refute the incorrect statement. When their counterexamples analyzed, it is evident that all of the participants construct specific counterexamples. It is align well with the result of Zeybek's (2017) study which states that constructing general counterexamples that explains why a statement is false in addition to only refuting is a complex process.

7.Sınıf Öğrencilerinin Dörtgenler Konusundaki İspat Seviyelerinin İncelenmesi

Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK [1], Aslıhan ÜSTÜN [2]

[1] Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Eğitim Fakültesi No:324, zulfiye.zeybek@gop.edu.tr, http://orcid.org/0000-0003-1601-8654

[2] MEB, Kızık Ortaokulu, 60aslihanustun@gmail.com, http://orcid.org/0000-0001-5508-7607

Gönderme Tarihi: 18.03.2019 Kabul Tarihi: 04.05.2019

Doi: 10.17522/balikesirnef.541576

Özet – Güncel eğitim reformları ve matematik eğitimcileri matematiksel ispatların ana okuldan lise son sınıfa kadar matematik eğitiminin önemli bir parçası olması gerektiğini savunurlar. Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yayınlanan yeni öğretim programı ile de matematiksel ispatların önemi vurgulanmış ve matematiksel ispatlara tüm matematik sınıflarında yer verilmesi önerilmiştir. Bu araştırmada 7.sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın bulgularına göre öğrencilerin verilen matematiksel ifadeleri ispatlarken argüman oluşturmada zorlandıkları tespit edilmiştir. Sunulan matematiksel ifadeler için argüman geliştirebilen öğrencilerin ise, argümanları incelendiğinde bu argümanların deneysel düzeyde argümanlar olduğu görülmüştür. Doğru matematiksel ifadeler için araştırmacılar tarafından çeşitli düzeylerde hazırlanmış argümanların incelenmesi aşamasında ise, öğrencilerin çoğunlukla deneysel düzeydeki argümanları en ikna edici buldukları görülmüştür. Yanlış olan matematiksel ifadenin ispatında ise öğrencilerin çoğunun karşıt örnek oluşturabildiği gözlemlenmiştir.

Anahtar kelimeler: geometri, matematik eğitimi, ispat, ispat şeması, karşıt örnek verme

----

Sorumlu yazar: Zülfiye Zeybek Şimşek, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Eğitim Fakültesi

Giriş

Matematiksel ispatlar, matematik eğitimi ve öğretiminin önemli parçalarından biridir (Balacheff, 1988; Stylianides, 2007). Bu önem, son yıllarda yapılan eğitimsel reformlarda da sıkça vurgulanmaktadır (CCSSI, 2010; NCTM, 2000). Özellikle, Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) yayınlamış olduğu raporda ispat kavramı üzerinde oldukça durulmuş ve ispat kavramının ana okuldan lise son sınıfa kadar matematik müfredatının önemli bir parçası olması gerektiği vurgulanmıştır. Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] tarafından yayınlanan öğretim programı ile de ispat kavramının önemi belirtilmiş ve program içerisinde problem çözme, ilişkilendirme, akıl yürütme gibi üst düzey becerileri geliştirici faaliyetler yapılması gerekliliği ele alınmıştır (MEB, 2018). Matematik öğretim programında akıl yürütme becerisinin kazandırılmasına yönelik göz önünde bulundurulması gereken durumlar şu şekilde belirtilmiştir:

> Çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma, mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma, bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanma, yuvarlama, uygun sayıları gruplandırma, ilk veya son basamakları kullanma gibi stratejileri veya kendi geliştirdikleri stratejileri kullanarak işlem ve ölçümlerin sonucuna dair tahminlerde bulunma ve belirli bir referans noktasını dikkate alarak ölçmeye ilişkin tahminde bulunmadır (MEB, 2013, s.V).

Her ne kadar ispat kavramının matematik eğitim ve öğretimindeki önemi öğretim programlarında belirtilmiş olsa da, yapılan çalışmalar öğrencilerin ispat sevilerinin istenilen düzeyde olmadığını göstermektedir. Öğrencilerin büyük çoğunluğu örnek vererek doğrulamayı ispat yapmak için yeterli görmektedirler (Coe ve Ruthven, 1994; Harel ve Sowder, 1998, 2007; Healy ve Hoyles, 2000; Knuth ve Sutherland, 2004; Özer ve Arıkan, 2002). Yapılan çalışmalar öğrencilerin erken yaşlardan itibaren matematiksel akıl yürütme ve ispat yapabileceklerini kanıtlamaktadır (Ball ve Bass, 2003; Lannin, 2003; Maher ve Martino, 1996; Stylianides ve Ball, 2008; Stylianides ve Stylianides, 2008). Bu çalışmada, 7.sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Alan yazın incelediğinde, ispatla ilgili yurt dışında pek çok çalışmaya rastlanmasına rağmen, ülkemizde bu konuyla ilgili daha az sayıda çalışmanın yapıldığı görülmektedir (Gökkurt, Deniz, Akgün ve Soylu, 2014). Dolayısıyla bu çalışmanın alana katkı sunacağı düşünülmektedir. Aşağıdaki araştırma problemi çalışmaya yön vermiştir.

1. 7.sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat yapabilme seviyeleri hangi düzeydedir?

Literatür Taraması

Çalışmanın amacı ışığında literatür taraması bölümünün iki alt başlık şeklinde verilmesi uygun görülmüştür. Bu alt başlıklar: (1) çalışmanın ana konusunu belirleyen ispat kavramının daha iyi anlaşılması için ispat kavramına yönelik araştırmacılar tarafından kullanılan farklı tanımların incelenmesi ve (2) öğrencilerin ispat yaparken geçtikleri bilişsel süreçleri incelemeye yönelik ortaya konulan farklı ispat şemalarının karşılaştırılması olarak kararlaştırılmıştır.

İspat Kavramına Yönelik Tanımları

Kelime anlamı olarak ispatlama eylemi (to prove), geçerliliğin test edilmesi anlamına gelen "to probe" kelimesinden türetilmiştir. İspat kavramının tarihi ve epistemik gelişimi incelendiğinde, matematik konu alanı genişledikçe ispat kavramının da geliştiği ve önem kazandığı görülmektedir (Schoenfeld, 2009; Stylianides, 2007). İspat kavramı ile ilgili literatürde birçok tanıma rastlamak mümkündür. Örneğin, Balacheff (1988) ispatı doğruluğu önceden kanıtlanan savlar üzerine mantıksal olarak inşa edilmiş dikkatlice seçilen adımlar serisi olarak tanımlarken, Harel ve Sowder (1998, 2007) ise, bir kişinin kendisini ve ya başkalarını matematiksel bir ifadenin doğruluğu (veya yanlışlığı) hakkında ikna etmek amacı ile kullanılan bir argüman olarak tanımlar. Stylianides (2007)'e göre ise ispat, "matematiksel bir iddiayı doğrulamak ve ya çürütmek amacı ile oluşturulan birbirine anlamca bağlı bir dizi savdan oluşan, aşağıdaki karakteristik özelliklere sahip matematiksel bir argümandır :

1.Sınıf toplumu tarafından doğru olarak kabul edilmiş ve herhangi başka bir kanıta ihtiyaç duyulmayan matematiksel ifadeleri (kabul edilmiş ifadeler kümesi) kullanır

2.Sınıf toplumu tarafından bilinen ve geçerli olan ve ya sınıf toplumunun kavramsal erişim sınırları içerisindeki muhakeme biçimlerini (argümentasyon modları) kullanır

3.İletişimde sınıf toplumu tarafından bilinen ve toplumun yapısına uygun olan, ve ya sınıf toplumunun kavramsal erişimi sınırları içerisindeki ifade etme biçimlerini(argümentasyon representasyon modelleri) kullanır (Stylianides, 2007, s.291).

Stylianides (2007) bu tanımında ispat kavramının biçimsel özelliklerinden ziyade sınıf topluluğu özelliklerinin göz önünde bulundurularak değerlendirilmesi gerektiğini belirtir . Bu çalışmada da öğrencilerin oluşturdukları argümanlar incelenirken 7. sınıf özellikleri (bilinen bilgiler topluluğu, ifade etme şekilleri ve gösterim yöntemleri) ve bu sınıfa özgü kavramsal erişim sınırları göz önünde bulundurulmuştur.

İspat Şemaları

İspat şemaları bireylerin ispat yaparken kullandığı açıklamaları, savunmaları ve kanıtları içeren bir düşünce biçimidir. İspat şemaları ile ilgili literatürde birçok sınıflamaya rastlamak mümkündür (Balacheff, 1998 ; Harel ve Sowder, 1998 ; Blum ve Kirsch, 1991). İspat şemalarına yönelik çalışmalar incelendiğinde, araştırmacıların genellikle oluşturulan ispatları iki ana kategoride incelediği görülür: deneysel (indüktif) ve analitik (dedüktif) (Balacheff, 1988; Bell, 1976; van Dormolen, 1977). Daha sonra yapılan çalışmalarda ise bu iki ana kategorinin alt kategorilere bölünerek daha kapsamlı bir şema çıkarılmaya çalışıldığı görülmektedir. Örneğin, Simon ve Blume (1996), ispatları dört seviyede—dışsal, deneysel, belirli bir duruma bağlı analitik, analitik—incelerken, Quinn (2009) deneysel seviyeyi naif örneklem (naive empiricism) ve stratejik örneklem (crucial empiricism) olmak üzere iki alt kategoriye ayırır.

Harel ve Sowder (1998) da geliştirdikleri ispat şemasında, dışsal, deneysel (indüktif) ve analitik (dedüktif) ana kategorilerini alt kategorilere ayırarak daha kapsamlı olarak ele almışlardır. Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin dışsal ispat şemasında bir otoriteye (bilir kişi ve ya argümanın görünüşü) dayalı ikna olma eğilimi gösterdiklerini, deneysel ispat şemasında ise örneklerden bir genellemeye varma eğiliminde olduklarını belirtirler. Harel (2001) öğrencilerin örnek kullanımını ikiye ayırır: (**1**) rastgele seçilmiş örneklerden bir genelemeye varmak, (**2**) dedüktif düşünmeye varan genellenebilir bir süreç başlatmak. Rowland (2002) genellenebilir örneği bir ispatı bünyesinde barındıran belirli bir örnek olarak tanımlar. Genellenebilir örnekte kullanılan örnek ve ispat iç içe geçmiş bir haldedir (Weber, 2012). Movshovitz-Hadar (1998) "genellenebilir örnekte bir kişi genel bir ispat görür çünkü duruma özel hiç bir şey yoktur" diyerek genellenebilir örnekte örnekten çok ispat kavramının öne çıktığını belirtir (s. 19). Analitik ispat şemasında ise öğrenciler, deneyle ve ya otoriteye bağlı olarak doğrulamanın yeterli olmadığının, önceden bilinen (ispatlanan) bilgiler ışığında matematiksel muhakeme kullanılarak bir argüman oluşturmanın gerekliliğinin farkına varırlar (Harel ve Sowder, 1998). Bu bilişsel şemalar ve genel özellikleri Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1 İspat Şemaları ve Özellikleri

İspat Şemaları	**Alt Şemalar**	**İspat Şemalarının Özellikleri**
Dışsal İspat Şeması	Otoriter İspat Şeması	Kitapta yazan veya öğretmenin söylediği bilgiler bir ispata gerek duyulmadan kabul edilme eğilimi gösterilir.
	Ritüel İspat Şeması	Yapılan (sunulan) argümanın dış görünüşüne dayalı ikna olma eğilimi gösterilir.
Deneysel İspat Şemaları	Empirik İspat Şeması	Örnek (Örnekler) kullanılarak bir genellemeye ulaşma eğilimi gösterilir.
	Algısal İspat Şeması	İlk öğrenmeler sonucunda akılda kalan gösterimlerle doğrulama yapma eğilimi gösterilir
Analitik İspat Şemaları	Genellenebilir Örnek	Genel mantıksal argümanı örnek üzerinden açıklama eğilimi gösterilir (Örnek mantıksal açıklamayı yapmak için bir araç olarak kullanılır).
	Aksiyomatik İspat Şeması	Aksiyomlar, tanımlar, önceden doğruluğu kanıtlanmış bilgiler kullanılarak mantıksal bir argüman oluşturma eğilimi gösterilir.

Tablo 1 de sunulan ispat şemaları, çalışmanın veri toplama araçlarının hazırlanma ve öğrenci cevaplarının analiz edilme aşamalarında yol gösterici olmuştur. Bu şemaların nasıl kullanıldığı yöntem bölümünde daha detaylı açıklanacaktır.

Yöntem

Araştırmanın Modeli

Bu araştırma 7.sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat yapabilme seviyelerini belirlemek amacıyla yapıldığından, nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması modeli kullanılarak düzenlenmiştir. Durum çalışmaları bir ya da daha fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun ya da diğer birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntem olarak tanımlanmaktadır (McMillan, 2000; Yin, 2003).

Çalışma Grubu

Çalışma grubunu 2016-2017 eğitim-öğretim yılı ikinci döneminde Tokat ilindeki bir devlet okulunda öğrenim gören üç kız ve üç erkek öğrenciden oluşan toplamda altı yedinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Öğrenciler birinci dönem karne notları ve matematik öğretmenlerinin görüşü dikkate alınarak düşük, orta ve yüksek seviye olarak üç grup ve her grupta ikişer öğrenci olacak şekilde belirlenmiştir. Öğrencilerin başarı seviyeleri belirlenirken belirli not aralıkları göz önünde bulundurulmuştur. Düşük seviye öğrenciler 0-45 not aralığı, orta seviye öğrenciler 45-85 not aralığı, yüksek seviye öğrenciler ise 85-100 not aralığından seçilmiştir. Öğrencilerin farklı düzeylerde seçilmesinin sebebi heterojen bir grup üzerinde çalışıp güvenilirliği artırmaktır. Çalışma grubunu oluşturan katılımcıların genel özellikleri Tablo 2’ de gösterilmektedir.

Tablo 2 Çalışma Grubu Genel Özellikleri

Öğrenci Adı	Cinsiyet	Başarı Notu	Başarı Seviyesi
Ali	Erkek	28,3	Düşük
Arzu	Kız	94,3	Yüksek
Emre	Erkek	28,6	Düşük
Engin	Erkek	55,3	Orta
Serap	Kız	96,3	Yüksek
Nazlı	Kız	84	Orta

Not. Bu tablodaki öğrenci isimleri öğrencilerin gerçek isimleri değildir.

Veri Toplama Araçları

Çalışmada veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış bireysel görüşme formları kullanılmıştır. Bu formlar uzman görüşü alınarak araştırmacılar tarafından hazırlanmıştır. Bireysel görüşme formu öğrencilerin ispat şemalarını ortaya çıkarmaya yönelik olup Harel ve Sowder (1998)'ın öne sürdüğü ispat şemaları (Bkz:Tablo1) temel alınarak hazırlanmıştır. Bireysel görüşme formunda yedinci sınıf müfredatında yer alan dörtgenler konusu ile ilgili üç doğru ve bir yanlış matematiksel ifadeye yer verilmiştir. Doğru olan matematiksel ifadeler : "Paralelkenarın ardışık iki açısının toplamı daima 180° 'dir.", " n>3 olmak üzere; n kenarlı bir konveks çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı daima 360° 'dir.", "Eşkenar dörtgenin köşegenlerinin çarpımının yarısı eşkenar dörtgenin alanını verir." Yanlış olan matematiksel ifade ise "Çevre uzunlukları eşit olan çokgenlerin alanları da birbirine eşittir." şeklinde belirlenmiştir Araştırmacılar tarafından bireysel görüşme formunda yer alan her bir doğru ifade için farklı ispat şemalarına uygun (dışsal-deneysel-analitik-genellenebilir örnek) dört argüman geliştirilmiştir. Hazırlanan argümanlardan dışsal ispat şeması olarak kodlanan argümanlarda, "Kitapta öyle yazıyordu o yüzden doğrudur" ve ya "Öğretmenimiz söylemişti o halde doğrudur" şeklinde ifadelerle sunulan ifadenin doğruluğu bir otoriteye dayandırılarak desteklenmiştir. Deneysel ispat şeması olarak kodlanan argümanlarda ise ifadenin doğruluğunun desteklenmesi belirli birkaç örnek üzerinden gösterilerek sağlanmıştır. Analitik ispat şeması düzeyindeki argümanlarda sunulan ifadelerin doğruluğu matematiksel bilgiler ışığında mantıksal olarak kanıtlarken; genellenebilir örnek düzeyindeki argümanlarda ise mantıksal açıklama belirli bir örnek üzerinden yapılmıştır. Anlaşılırlığın sağlanması amacıyla bireysel görüşme esnasında sunulan doğru bir ifade için hazırlanan çeşitli seviyelerdeki (dışsal-deneysel-analitik-genellenebilir örnek) argüman temsilleri EK 1'de sunulmuştur. EK1' de sunulan argümanlardan argüman 1 deneysel ispat şeması, argüman 2 genellenebilir örnek şeması olarak kodlanan argümanlar iken; argüman 3 dışsal ispat şeması ve argüman 4 ise analitik ispat şemasında kodlanan argümanlardan oluşmaktadır. Yanlış olan matematiksel ifade için ise herhangi bir argüman sunulmamış olup öğrencilerden kendilerinin yorum yapması ve karşıt örnek geliştirmeleri beklenmiştir.

Verilerin Toplanması ve Analiz Süreci

Çalışmanın verileri yarı yapılandırılmış bireysel görüşme formları ile toplanmıştır. Her bir öğrenci ile yaklaşık 40-45 dakika süren görüşmeler gerçekleştirilmiş ve bu görüşmeler video kaydına alınmıştır. Öğrencilere ilk olarak bireysel görüşme formlarının birinci bölümünde yer alan üç doğru ve bir yanlış olmak üzere toplam dört matematiksel ifade sırasıyla sunulmuştur. Öncelikle, öğrencilerden sunulan bu matematiksel ifadelerin doğruluk ve yanlışlığına karar vermeleri beklenmiştir. Daha sonra, öğrencilerden doğru olan matematiksel ifadeler için, bu ifadelerin doğruluğunu ispatlayan bir argüman geliştirmeleri beklenmiş ve bunun için yeterli süre tanınmıştır. Doğru olan her bir matematiksel ifade için dört farklı seviyede hazırlanan argümanlar sırayla öğrencilere sunularak öğrencilerin bu argümanları değerlendirmeleri istenmiştir. Ayrıca, her bir doğru ifade için tüm argümanlar sunulduktan sonra, öğrencilerden bu argümanlardan en ikna edici olanı seçmeleri ve nedenlerini belirtmeleri istenmiştir. Yanlış matematiksel ifade için ise öğrencilere her hangi bir argüman sunulmamış, öğrencilerden bu ifadenin yanlış olduğunu fark edip yanlışlığını ispatlamaları beklenmiştir. İfadenin yanlış olduğuna karar veren öğrencilere bu görüşlerini ispatlamaları için yeterli süre verilmiştir.

Araştırmada elde edilen verilerin analizinde betimsel analiz tekniği kullanılmıştır. Betimsel analizde elde edilen veriler daha önceden belirlenen temalar altında sınıflandırılır (Büyüköztürk vd., 2010). Bu çalışmada, Tablo 1 de açıklanan ispat şemaları öğrencilerin cevaplarını sınıflandırmak amacı ile kullanılmıştır. Verilerin analizi üç aşamada gerçekleştirilmiştir. Birinci aşamada video kaydı olarak elde edilen bireysel görüşme verilerinin çözümlemesi gerçekleştirilmiştir. İkinci aşamada çözümlenen bireysel görüşme kayıtları ve öğrencilerin kendilerine yöneltilen sorulara sundukları argümanlar Tablo 1 de yer alan seviyelere göre araştırmacılar tarafından sınıflandırılmıştır. Üçüncü aşamada ise öğrencilerin her bir doğru matematiksel ifade için oluşturulan farklı düzeydeki argümanları değerlendirmeleri, bu argümanlari en ikna ediciden en az ikna edici olana doğru sıralamaları, ve bu sıralama için sundukları sebepler sınıflandırılmıştır. Veriler iki farklı araştırmacı tarafından ayrı ayrı zamanlarda sınıflandırılmış ve bir araya gelerek sınıflandırmalar karşılaştırılmıştır.

Bulgular ve Yorumlar

Bu çalışmanın genel amacı 7.sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi olarak belirlenmiştir. Bu amaç doğrultusunda oluşturulan doğru ve yanlış matematiksel ifadelerin ispatına yönelik bulgular ayrı başlıklar halinde sunulacaktır.

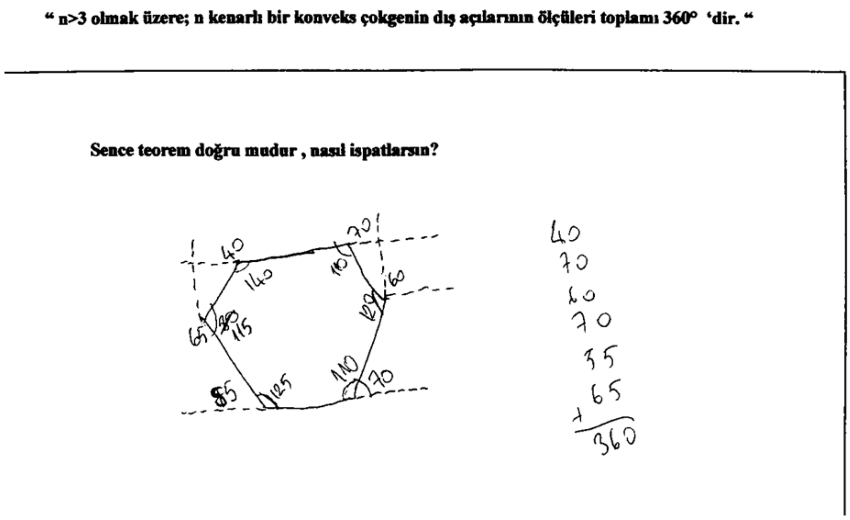
Doğru Matematiksel İfadelerin İspatına Yönelik Bulgular

Öğrencilerin sunulan doğru matematiksel ifadelere yönelik verdikleri cevaplar Tablo 1 de yer alan ispat şemaları analitik çerçevesi ışığında sınıflandırılmıştır (bknz. Tablo 1). Öğrencilerin doğru matematiksel ifadeler için oluşturdukları argümanlara yönelik bulgular Tablo 3 de özetlenmiştir.

Tablo 3 Doğru Matematiksel İfadelere Argüman Oluşturabilme Seviyeleri

	1.Matematiksel İfade	2.Matematiksel İfade	3.Matematiksel İfade
Dışsal İspat Şeması	1	-	-
Deneysel İspat Şeması	2	4	3
Analitik İspat Şeması	-	-	-

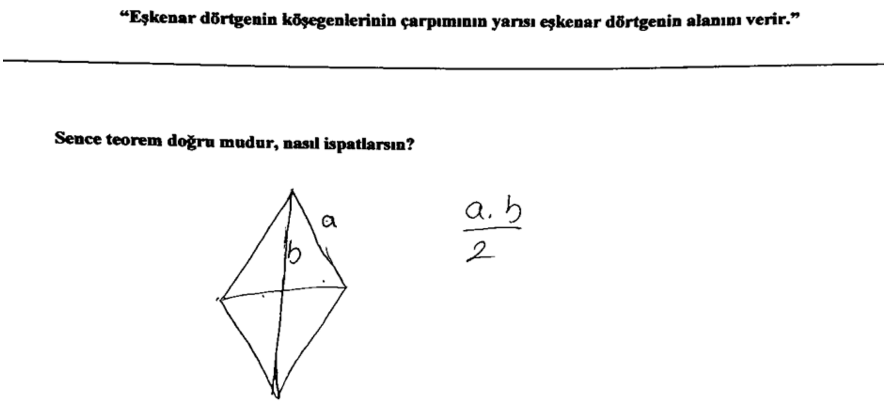
Tablo 3 incelendiğinde çalışmaya katılan 6 öğrenciden, ispatlanması için sunulan birinci matematiksel ifade için 3, ikinci matematiksel ifade için 4 ve üçüncü matematiksel ifade için sadece 3 öğrencinin bir argüman geliştirebildiği görülmüştür. Sunulan matematiksel ifadeler için argüman geliştirebilen öğrencilerin argümanları incelendiğinde ise, bir argümanın dışsal ispat düzeyinde, kalanlarının ise deneysel ispat şeması düzeyinde argümanlar oldukları bulunmuştur. Aşağıda farklı düzeyde yer alan argüman temsillerine yer verilmiştir.



Şekil 1 Deneysel İspat Şeması Düzeyinde Geliştirilen Argüman Temsili

Şekil 1'de verilen temsilde, öğrenci kendisine sunulan "Çokgenlerin dış açıları toplamı 360 derecedir" matematiksel ifadesini ispatlamak için belirli bir örnek —altıgen— üzerinden genel bir kanıya varma çabası göstermektedir. Belirli bir örnekten genelleme yapılarak, tüm çokgenlerin dış açıları toplamının 360 derece olduğunun gösterilmesi öğrencinin deneysel ispat şeması düzeyinde olduğunu göstermektedir. Aynı matematiksel ifadenin sorulduğu bir diğer öğrenci ise, ifadenin doğruluğunu "Öğretmenimiz anlatmıştı. O yüzden doğrudur." şeklinde bir söylemde bulunarak açıklamıştır. Öğrencinin otoriteye bağlı kalarak ispat yapma eğiliminde olması öğrencinin dışsal ispat düzeyinde olduğu göstermektedir.

İspatlanması istenen bir diğer matematiksel ifade—Eşkenar dörtgenin köşegenleri çarpımının yarısı eşkenar dörtgenin alanını verir—için argüman geliştirebilen bir öğrencinin argümanı Şekil 2 de sunulmuştur.



Şekil 2 Deneysel İspat Şeması Düzeyinde Argüman

Araştırmacı: Sence matematiksel ifade doğru mu yanlış mı ?

Serap: Doğru

Araştırmacı: Neden doğru açıklar mısın?

Serap: Eşkenar dörtgeni ikiye bölünce iki eş üçgen oluşur. Yani iki tane üçgen elde etmiş oluyoruz. Bir daha bölünce üçgenin dikmesi oluyor. Yükseklikle kenarı çarpıp ikiye bölüyoruz her ikisi içinde. (şekil çizip alanlarını bulmaya çalışıyor (Bkz: Şekil 2)). İkisinin alanını bulup toplarız.

Şekil 2'de verilen argüman temsili incelendiğinde, öğrencinin belirli bir örnek sunmak yerine ifadenin neden doğru olduğunu kanıtlamaya yönelik açıklamalar yapmaya çalıştığı görülmektedir. Ancak öğrencinin oluşturduğu argümanda bazı önemli hatalar ve eksik açıklamalar göze çarpmaktadır. Örneğin öğrenci çizdiği şekilde köşegen uzunluğunu "a" olarak belirtmesi gerekirken eşkenar dörtgenin bir kenarını "a" olarak belirmiştir. Ayrıca köşegenlerin neden birbirine dik olduğunu ve aynı şekilde köşegenlerin ayırdığı üçgenlerin neden eş üçgenler olduğu açıklama yapılmadan kabul edilmesi, argümanın analitik düzeyde bir ispat olmasına engel olmaktadır. Bunun yerine öğrenci, önceki öğrenmelerden akılda kalan gösterimlerle doğrulama yapma eğiliminde olduğu görülmüştür. Bu sebeplerden ötürü, öğrencinin yapmış olduğu argüman algısal ispat şeması olarak kodlanmıştır.

Öğrencilerin doğru olan matematiksel ifadeler için sunulan argümanları değerlendirmelerine yönelik bulgular Tablo 4'te özetlenmiştir.

Tablo 4 Matematiksel İfadeler için Sunulan Argümanları Eleştirebilme Seviyeleri

	Serap	Arzu	Nazlı	Engin	Ali	Emre
1. İfade	Deneysel	Deneysel	Deneysel	Deneysel	Dışsal	Deneysel
2. İfade	Analitik	Deneysel	Deneysel	Deneysel	Deneysel	Deneysel
3. İfade	Deneysel	Deneysel	Deneysel	Deneysel	Deneysel	Dışsal

Tablo 4 incelendiğinde her bir matematiksel ifade için 6 öğrenciden 5'inin deneysel ispat şeması düzeyindeki argümanları en ikna edici argüman olarak seçtikleri görülmüştür. Bu öğrencilerden üçü—Arzu, Nazlı, Engin— tüm matematiksel ifadeler için sunulan deneysel argümanları en ikna edici argüman olarak seçerken, iki öğrenci ise—Ali ve Emre—sunulan bir matematiksel ifade için dışsal düzeydeki argümanı en ikna edici argüman olarak seçmişlerdir. Çalışmaya katılan öğrencilerden sadece birisinin —Serap—analitik düzeydeki argümanı ikna edici argüman olarak seçtiği görülmüştür.

Öğrencilerin ikna edici buldukları argüman türleri analiz edilirken sadece öğrencilerin seçtikleri argümanın türü değil, aynı zamandan öğrencilerin neden o argümanı en ikna edici buldukları yönündeki söylemleri de etkili olmuştur. Örneğin aşağıdaki bireysel görüşme kesitinde Arzu, genellenebilir örnek olarak kodlanan argümanı en ikna edici argüman olarak seçmesine rağmen sebep olarak argümanda yer alan sayların kullanılmasını belirtmiştir. Hatta "Burada (4.argümanı kastediyor) harflerle vermiş, burada (2.argümanı kastediyor) ise sayılarla vermiş. Yani bu (2. Argüman) daha açık ve anlaşılır" diye ifade ederek, argümanda yer alan belirli ölçümleri argümanın ikna edici yönü olarak bulduğunu belirtmektedir. Arzu'nun sunulan argümanları eleştirirken belirli ölçümlerden yararlanılması özelliğini ikna edici olarak bulmasından ötürü, bu seçim deneysel ispat şeması olarak kodlanmıştır.

Araştırmacı: Bu argümanlardan sana göre en ikna edici olan hangisi?

Arzu: 2. daha ispat gibi duruyor o yüzden bunu seçerdim. (Genellenebilir örnek düzeyinde kodlanan argüman)

Araştırmacı: İkinci olarak hangisini seçersin?

Arzu: 4.Argüman olabilir (Analitik ispat şeması düzeyinde kodlanan argüman).

Araştırmacı: Neden ?

Arzu: Ben de burada söyledikleri gibi düşünüyorum (2. Argümanı kastediyor).

Araştırmacı: 2.argümanı 4. Argümandan daha iyi kılan şey ne?

Arzu: Burada (4.argümanı kastediyor) harflerle vermiş, burada (2.argümanı kastediyor) ise sayılarla vermiş. Yani bu (2. Argümanı kastediyor) daha açık ve anlaşılır.

Benzer olarak, Nazlı "Paralelkenarın ardışık iki açısının toplamı daima 180°'dir." matematiksel ifadesi için sunulan argümanlardan deneysel ispat şeması düzeyindeki argümanı (1. Argüman) en ikna edici bulmuştur. Bu seçimin sebebi olarak ise Nazlı, açıların ölçülerinin verilmiş olmasını belirtmiştir. Bu seçim de deneysel ispat şemasında kodlanmıştır.

Araştırmacı: Sence bu dört argümandan senin en ikna edici bulduğun hangisi ?

Nazlı: Argüman 1. (Deneysel ispat şeması düzeyindeki argüman)

Araştırmacı: Niçin?

Nazlı: Çünkü iki paralelkenarda açıların 180 derece olduğu belli açık.

Araştırmacı: Argüman 2 (Genellenebilir örnek düzeyindeki argüman) neden olmadı?

Nazlı: Bu da oldu ama en mantıklısı o geldi. Açılar daha belli.

Araştırmacı: Senin için biraz açıları görmek önemli sanırım.

Nazlı: Evet

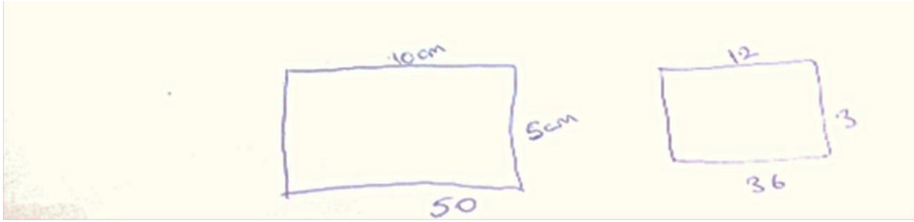
Yanlış Matematiksel İfadenin İspatına Yönelik Bulgular

Çalışmada öğrencilere doğru matematiksel ifadelerin yanında yanlış hüküm bildiren bir ifade de sunulmuş ve bu ifadenin yanlışlığının öğrenciler tarafından nasıl ispatlanacağı incelenmiştir. Öğrencilere sunulan "Çevreleri aynı olan çokgenlerin alanları da birbiriyle aynıdır" şeklindeki yanlış ifade için, 4 öğrenci bu ifadenin yanlışlığını fark edip karşıt örnek oluşturabildiği görülmüştür. İki öğrenci ise ifadenin doğru olduğunu savunmuştur. Bu bulgu, öğrencilerin karşıt örnek yoluyla ispatlama yaparken daha başarılı olduklarını göstermektedir.

Tablo 5 Yanlış Matematiksel İfade için Karşıt Örnek Oluşturabilme

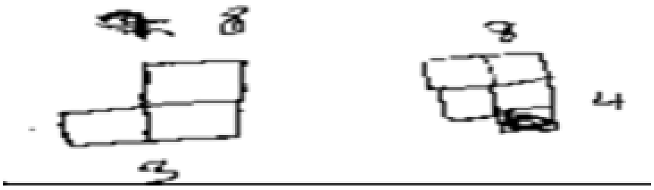
	Serap	Arzu	Nazlı	Engin	Ali	Emre
4. İfade	✓	✓	✓	✓	X	X

Şekil 3'te Arzu, çevreleri eşit olan iki dörtgen oluşturmuş—10 cm ve 5cm ile 12 cm ve 3 cm— ve bu dörtgenlerin alanlarını— 50cm^2 ile 36cm^2— hesaplamıştır. Böylece, Arzu çevreleri eşit ancak alanları farklı olan dikdörtgenleri karşıt örnek olarak sunarak ifadenin yanlış olduğunu ispatlamıştır.



Şekil 3 Arzu'nun Geliştirmiş Olduğu Karşıt Örnek

Şekil 4'te ise Nazlı, birim kareler yardımıyla çevreleri aynı—8br— fakat alanları farklı —4br^2 ile 3br^2— olan geometrik şekiller oluşturarak ifadenin yanlışlığını ispatlamıştır.



Şekil 4 Nazlı'nın Geliştirmiş Olduğu Karşıt Örnek

Öğrencilerin oluşturdukları karşıt örnekler incelediğinde bu örneklerin duruma özgü, diğer bir deyişle ifadeyi çürüten ama neden yanlış olduğunu açıklamayan örnekler, olduğu görülmüştür.

Sonuç ve Tartışma

7. sınıf öğrencilerinin ispat yapabilme düzeylerinin incelendiği bu çalışmanın bulguları öğrencilerin sunulan doğru matematiksel ifadeleri ispatlamak için argüman geliştirmekte zorlandıklarını göstermiştir. Sunulan matematiksel ifadelerin doğruluğunu kanıtlamak için argüman geliştirebilen öğrencilerin argümanları incelendiğinde ise, bu argümanların çoğunlukla deneysel ispat şemasında olduğu bulunmuştur. Bu sonuç literatürde bulunan bir çok çalışma ile uyumluluk göstermektedir (Aylar, 2014; Chazan, 1993; Cooper vd., 2011; Çalışkan, 2012; Healy ve Hoyles, 2000; Harel ve Sowder, 1998; Kieran, 2007; Knuth, 2002). Benzer olarak, öğrenciler kendilerine sunulan argümanları incelerken de belirli örnekler ve ölçümlerin kullanıldığı argümanları daha ikna edici buldukları görülmüştür. Bu sonuçta öğrencilerin büyük çoğunluğunun deneysel ispat şemasında bulunduğunu destekler niteliktedir. Çalışmanın bulgularına göre, neredeyse hiçbir öğrenci ispatın genellenebilir olma özelliği hakkında bir fikir öne sürmediği gözlemlenmiştir. Araştırmacılar öğrencilerin sunulan argümanın ispat olup olmadığını değerlendirebilmede zorlanmalarının üniversite seviyesinde bile devam ettiğini göstermiştir. (Harel ve Sowder, 2007) Bunun sebebi olarak öğretim programında ispat kavramına çok fazla yer verilmemesi olabileceği düşünülmektedir.

Zeybek, Üstün ve Birol (2018) inceledikleri ortaokul ders kitaplarında ispat yapma etkinliği olma potansiyeline sahip etkinliklerin sayılarının çok az olduğunu eleştirmişlerdir.

Her ne kadar öğrenciler doğru bir ifadeyi ispatlamakta zorlansalar da, karşıt örnek geliştirmede daha iyi bir performans göstermişlerdir. Aylar (2014)'ın çalışmasında da benzer bir sonuçla karşılaşılmıştır. Bu bulgu öğrencilerin örnek vererek doğrulama eğiliminde olduklarını da doğrular niteliktedir. Zeybek (2017) genel karşıt örnek—ifadeyi çürüten ve aynı zamanda neden yanlış olduğu hakkında fikir sunan örnek— oluşturmanın, belirli karşıt örnek —ifadeyi çürüten ama neden yanlış olduğu hakkında bir fikir sunmayan örnek— oluşturmaya göre daha karmaşık bir durum olduğunu belirtmiştir. Genel karşıt örnek oluşturmak ifadenin yer aldığı konu alanında derin bilgi ve düşünme gerektirdiğinden daha karmaşık bir durumdur (Zeybek, 2017). Bu çalışmada da öğrencilerin oluşturdukları karşıt örnekler incelendiğinde, bu örneklerin belirli karşıt örnekler olduğu görülmüştür.

Öneriler

Akıl yürütme ve ispat genellikle matematiğin can damarı olarak görülür (Schoenfeld, 2009, p. xii). Matematiğin önemli bir sürecini oluşturan akıl yürütme ve ispat, daha karmaşık konuların kavranmasında önemli bir yapı taşı oluşturur. Örneğin, çalışmalar öğrencilerin cebirsel ifadelerde sıkıntı yaşamalarının akıl yürütme ve ispat seviyelerinin istenilen düzeyde olmamasından kaynaklanabileceğini savunmaktadırlar (Özer ve Arıkan , 2002 ; Uğurel ve Moralı, 2010 ; Aylar, 2014). Öğrencilerin erken yaşlardan itibaren matematiksel akıl yürütme yapabileceklerini savunan çalışmalar, bu yeteneğin matematiksel ifadelerin doğruluğu veya yanlışlığını kanıtlamak için argüman oluşturmaya yönelik sınıf ortamlarında gelişebileceğini göstermektedirler (Ball ve Bass, 2003; Lannin, 2003; Maher ve Martino, 1996; Stylianides ve Ball, 2008; Stylianides ve Stylianides, 2008). Quinn (2009), yaptığı çalışmada öğrencilerin ispat seviyelerinin karşılaştırma ve tartışma etkinlikleriyle yükseltilebileceğini ortaya koymuştur. Araştırmacılar ve eğitimciler müfredat materyallerinin matematiğin bu önemli sürecini öğrenebilmek için öğrencilere fırsatlar yaratacak şekilde düzenlenmesi gerektiğini savunur (Thompson, Senk ve Johnson, 2012). Ancak, yapılan araştırmalar ders kitaplarının bu konuda yetersiz kaldığını göstermiştir (Zeybek, Üstün ve Birol, 2018). Bu duruma çözüm bulmanın yollarından biri, güncel reform hareketlerince matematik eğitim ve öğretiminin en önemli bileşeni olarak kabul edilen akıl yürütme ve ispatın öğretim programları ve ders materyallerindeki görünürlüğünün tüm sınıf seviyelerinde artırılmasıdır.

Matematiksel ispat etkinliklerine sınıf içinde etkili bir şekilde yer verilmesi ve yürütülmesi, öğrencilerin ispat algılarının yanı sıra matematik öğretmenlerinin de matematiksel ispata yönelik kavram bilgilerine ve matematiksel ispat nasıl öğretilmelidir konusundaki inançlarına dayanır. Çeşitli ülkelerde yapılan araştırmalar, öğretmenlerin derslerinde matematiksel ispat etkinliklerine yer verirken zorlandıklarını tespit etmiştir (Bieda, 2010). Lise öğretmenlerinin ispat konusundaki alan ve pedagojik alan bilgilerini araştıran çalışmasında, Knuth (2002) öğretmenlerin ispat etkinliklerinin öğrencilere uygun olmadığını düşündüklerini bulmuştur. Bieda (2010) en iyi şartlar altında bile matematik öğretmenlerinin aldıkları hizmet içi eğitimlere rağmen matematiksel ispat etkinliklerini derslerine daha az oranda ve yüzeysel olarak entegre ettiklerini bulmuştur. Bu nedenle, ders materyallerinde ispat etkinliklerinin artırılmasının yanı sıra öğretmenlere yönelik etkili uygulama yönergelerinin de artırılması önemlidir.

Kaynakça

Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi.* (Yayınlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers, and children* (pp.216-238). London: Hodder & Stoughton.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In G. Martin (Ed.), *Research companion for the principles and standards for school mathematics* (pp. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bieda, K. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 351- 382.

Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics, 22*(2), 183-203.

Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2010). *Bilimsel araştırma yöntemleri* . Anakara: Pegem Yayıncılık.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41-53.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for mathematics*. Retrieved from http://corestandards.org/asserts/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Cooper, J. L., Walkington, C. A., Williams, C. C., Akinsiku, O. A., Kalish, C. W., Ellis, A. B. & Knuth, E. J. (2011). Adolescent reasoning in mathematics: Exploring middle school students‟ strategic approaches in empirical justifications, In Proceedings of *the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Boston, MA..

Çalışkan, Ç. (2012), *8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi*. (Yayınlanmamış Yüksek lisans Tezi). Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Gökkurt, B., Deniz, D., Akgün, L., & Soylu, Y.(2014). Matematik alanında ispat yapma süreci üzerine yapılmış bazı araştırmalardan bir derleme. *Baskent University Journal of Education, 1*(1), 55-63.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell &R. Zaskis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 185-212). New Jersey, Ablex Publishing.

Harel, G., & Sowder, L (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.805-842). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubiensky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (ss. 234-283). Providence, R.I.: American Mathematical Society.

Healy , L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 707-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, (5) , 379-405.

Knuth, E. J., & Sutherland, J. (2004, October). Student understanding of generality. In *Proceedings of the 26th Annual Meeting - of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 561-567). Toronto: University of Toronto

Lannin, J. K. (2003). Algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School, 8*(7), 342–348.

Maher, C. A., & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 194–214.

McMillan, H. J. (2000). *Educational research: fundamentals for the consumer* (3rd ed.). New York: Longman.

MEB (2013). *Ortaokul matematik dersi (5,6,7 ve 8. Sınıflar) öğretim programı*. Ankara: MEB.

MEB (2018). *Matematik dersi (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar) öğretim programı.* Ankara: MEB.

Movshovitz-Hadar, N. (1998). Stimulating presentations of theorems followed by responsive proofs. *Forthe Learning of Mathematics, 8*(2), 12–19, 30.

National Council for Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Özer, Ö. & Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. V.Ulusal Fen Bilimleri Ve Matematik Eğitimi Kongresinde Sunulmuş Bildiri, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

Quinn, A. L. (2009). Count on number theory to inspire proof. *Mathematics Teachers, 103* (4), 298-304.

Rowland, T. (2002). Generic proofs in number theory. In S.R. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp.157-183). Westport, CT: Ablex Publishing.

Schoenfeld, A. H. (2009). Series editor's foreword: The soul of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. xii-xvi). New York, NY: Routledge.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 3-31.

Stylianides A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics, *Journal of Research in Mathematics Education, 38*, 289-321.

Stylianides, A.J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 307-332.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(2), 103–133.

Thompson, D. R. , Senk, S. L. & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education,43* (3), 253- 295.

Uğurel, I.; & Moralı, S. (2010). Bir ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıf içi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*, 135 – 154.

Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics, 8* (1), 27-34.

Weber, K. (2012). Mathematicians' pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *43,* 463–482.

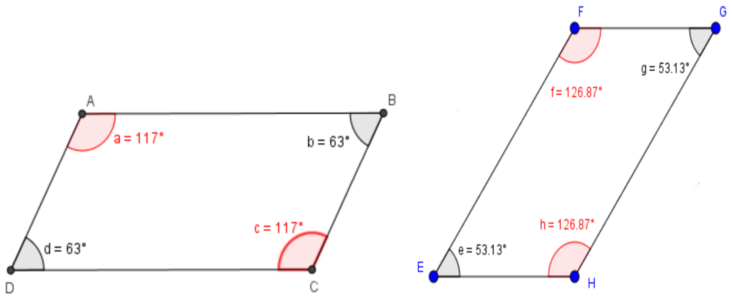
Yin, , R. K. (2003). *Case study research design and methods* (Third Edition). Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Zeybek, Z. (2017). Pre-service elementary teachers' conceptions of counterexamples. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST), 5*(4), 295-316.

Zeybek, Z., Üstün, A., & Birol, A. (2018).Matematiksel ispatların ortaokul matematik ders kitaplarındaki yeri. *İlköğretim Online, 17*(3), 1317-1335.

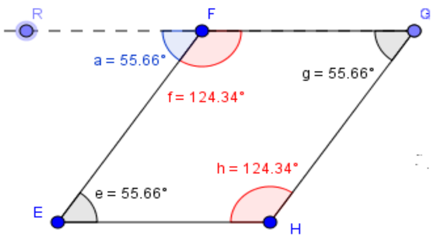
EK 1 "Paralelkenarın ardışık açıları toplamı daima 180° 'dir."

Argüman 1



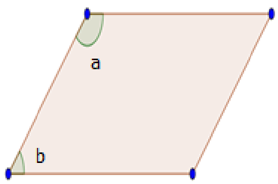
İki paralelkenar çizdim. Açıölçer ile ardışık açılarını ölçtüm ve bu açıların toplamlarının 180 derece olduğunu gördüm. Demek ki tüm paralelkenarlarda

Argüman 2



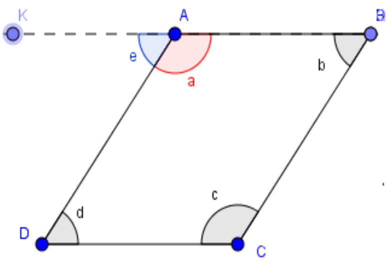
Paralel doğrularda iç ters açıların birbirine eşit olduğunu öğrenmiştik. E açısı e = 55,66° ise RFE açısı da a= 55,66° olur. EFG ile RFE açıları komşu bütünler olduğundan toplamları 180 derece olacaktır. O yüzden, EFG açısı f= 124,34 derece olur.

Argüman 3



a+b=180° dir. Çünkü paralelkenar konusunda kitapta öyle yazıyordu.

Argüman 4



Paralel iki doğru ile bir üçüncü doğru kesiştiği zaman iç ters açıların ölçülerinin eşit olduğunu öğrenmiştik. O halde buradaki d açısı ile e açısı iç ters açılar olacağı için ölçüleri eşittir. Komşu bütünler açıların toplamı 180 derece olacağı için e açısı ile a açısının toplamı da 180 derece olmak zorundadır. O halde d açısı ile e açısı da aynı olduğuna göre d + a =180 derecedir. Yani ardışık açıların toplamı her zaman 180 derece olmak zorundadır.