Eğitim ve Teknoloji
Education & Technology
dergi web sayfası: http://dergipark.org.tr/egitek

Etkileşimli Diyagramlar ve Matematiksel Düşünme: Dönüştürmenin Yönü[1]

Özlem Çeziktürk [*] [a]
[a] Dr. Öğretim Üyesi, Marmara Üniversitesi - Atatürk Eğitim Fakültesi / Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, ozlemcez@yahoo.com
ORCID ID: 0000-0001-7045-6028

Öz

Temsil yolları ile gösterim çeşitliliği ve bunlarla akıl yürütme önemlidir. Etkileşimli diyagramlar (ID); sınırlı, farklı temsillerle aynı konuya dikkat çekilen, konuya özel, temsiller arasında geçişlerle küçük bilgisayar yazılımlarıdır. Internet üzerinde ücretsiz, kullanıcı dostu butik programlar; bir veya birkaç kavram yanılgısına cevap aramak için yazılmış olabileceği gibi anlaşılması zor ve çoklu gösterim ihtiyacı duyan konular için de hazırlanmış olabilir. ID içinde, aynı gösterim modu arasındaki geçişler "treatment" (geçiş) diye adlandırılırken, farklı temsil modları arası geçişler "conversion" (dönüştürme) olarak adlandırılabilmektedir. Öğrenci önce görselin statik görüntüsünden anlam çıkarır. Daha sonra ID ile etkileşimde bulunarak gösterim geçişleri ve gösterim özelliklerinden sistem analiz edilir. Tek tek parametrelerin sistemde nasıl değişiklikler yaptığı bulunmaya çalışılır. Bunun sayesinde de matematiksel bağlantılar –bağlantılı gösterim sistemleri- sentezlenerek bir sonuca ulaşır ve ortaya çıkan örüntüler – örüntü sonları ile birlikte araştırılır. Öğrenci, buradan elde edeceği öngörüyü farklı ama benzer konuyu hedefleyen ID ler de de kullanmak durumunda kalacaktır. Analitik geometri dersinde, "Uzayda doğrunun vektörel gösterimi" konusunun ardından ID ve onunla ilgili 9 açık uçlu soruyla ID nin uygun kullanımına dikkat çekilmiştir. Bu ödevden +5 bonus alacakları için bireysel yapmaları istenmiştir. 18 gönüllü öğrencinin cevap kâğıdı fenomonolojik içerik analizi yöntemiyle incelenmiştir. Özellikle farklı temsil modları arası olan dönüştürmelerin yönünün matematiksel düşünceyi nasıl etkilediği araştırılmıştır. Öğrenci sayısı kadar semiyotik gösterim desteklenmekle birlikte Instrumental Genesis konusunda ID yi çözmüş öğrencilerin daha başarılı cevaplar getirdikleri gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Etkileşimli diyagramlar, matematiksel düşünme, dönüştürmeler, geçişler

[1] Makale materyal Sempozyumunda 2018 bildiri olarak sunulmuştur.
[*] Sorumlu yazar

Geliş Tarihi: 03.09.2018 *Kabul Tarihi: 25.06.2019*

Interactive Diagrams and Mathematical Thinking: Direction of Conversions

Abstract

Different modes of thinking and reasoning with them is important. Interactive Diagrams (ID) are compact programs enabling multiple representations with translations between representational modes. IDs are all over the Internet, and covers one or more misconceptions and sometimes enables in-depth understanding. Inside an ID, same mod translations are named as “treatments” while different mod translations are named as “conversions”. Student, first deduce meaning from the static representation. Then, she or he interacts with the ID, meanwhile, translation types and representation modes are analyzed. Individual parameters are detected for their prospective effects on the system. This in turn leads to identification of mathematical relationships to be synthesized. Patterns are analyzed with pattern ends. Student, uses the insight that she /he receives from this example, on different but same topic IDs. In the analytical geometry course, after the topic; “vector representation of lines in the space”, 9 open-ended questions related to ID, were asked. Students were informed that they would get 5 points from this work in case they do it personally. From 18 volunteer students, answer sheets were analyzed with content analysis method. Specifically, the effect of the direction of conversions on the mathematical thinking was investigated. Even though, the idea that semiotic representation as much as student count is supported, students with a good understanding of Instrumental Genesis has a much higher degree of success in the process.

Keywords: Interactive diagrams, mathematical thinking, treatments, conversions.

Giriş

Günümüzde, görsel gösterimlerin bir bölümü olarak teknolojik gösterimler sağladıkları farklı bakış açıları nedeniyle ilgi görmektedir. Grafik hesap makineleri, bilgisayar animasyonları, appletler, program uygulamaları, Internet ve akıllı tahtalar; teknolojik gösterimleri içeren ortamlardır. Fakat bu ortamların yeteri kadar etkili kullanılabildiği pek söylenemez (Sedig & Liang, 2006). Gomez (2001) teknolojik gösterimler hem hız, hem de gösterim çeşitliliğini sağlamak açısından eşsizdirler ama sınıf içinde nasıl doğru kullanılacağı hakkında detaylı düşünme onları daha yararlı bir bilişsel araç haline dönüştürebilir, diye açıklamaktadır. Açığa çıkacak bilgi, bilişsel aracın yapısı kadar kullanımına da bağlıdır. Yani hem yapısı iyi anlaşılmalıdır, hem de kullanımının sağlayacağı faydalar tam olarak bilinmelidir. Örneğin, grafik hesap makinelerinde sembolik olarak fonksiyonu yazabilmek gibi, verilen veriye göre fonksiyonu çizebilmek de mümkündür. Öğretmen ise sınıfta uygun problemler hazırlayarak sözel gösterimi de destekleyebilir. Bir java appletin özelliği verilen fonksiyonun grafiğini çizmek olabilir, peki onu aynı işi yapacak bir grafik hesap makinesinden ayıracak özelliği nedir? Internetteki etkileşimli diyagramlarda, çoklu gösterimlerle karşılaşırız. Aynı anda hem sembolik, hem grafik, hem de numerik olarak fonksiyonu oluşturan noktalar görülebileceği gibi, hem de fonksiyonun anlık olarak türevini almak ta mümkün olabilir.

Etkileşimli diyagramlar

Etkileşimli diyagramlar anlık olarak parametre değişimlerinin gösterilmesine olanak sağlarlar. Sadece bu parametre değil, onun etkilediği diğer değişkenlerin değişimi de aynı şekilde anlık olarak gösterilebilmektedir. Farklı temsil yollarının bir arada verildiği etkileşimli diyagramlar (ID), sınırlı bir çerçeve içinde konuya özel Java, Multimedia Flash veya Html 5 ile yaratılmış küçük bilgisayar programlarıdır. Internet üzerinde ücretsiz olarak kullanılabilirler. Çoğu zaman sadece bir ek program veya çalıştırıcı bir ana programa ihtiyaç duyarlar. Aslında Geogebra ve Geometer's Sketchpad gibi yazılımların uygulamaları da bu sınıfta sayılabilir. Bu araçlar, programcıları tarafından, bir veya birkaç kavram yanılgısına cevap aramak için yazılabilirler. Bazen de anlaşılması zor ve gösterim ihtiyacı olan konular için de hazırlanabilir (Çezikturk, 2003).

Sedig & Liang' a (2006) göre, bilgisayar tabanlı matematiksel biliş araçları çoğunlukla etkileşimli görsel matematik gösterimlerini içerirler. Bunlara örnek olarak, geometrik yapıların 2 ve 3 boyut görselleştirmesi, örüntüler, grafikler ve şekiller sayılabilir. Sedig& Liang makalesi 12 etkileşim faktörünü içerir (2006). Etkileşim, statik gösterimlerin bilgi uzantısı gibidir. Bu şekildeki ID lerdeki etkileşimi etkileyen 12 faktör şunlardır. Mümkün kıldıkları, azalttığı bilişsel yükler, sınırlılıkları, nasıl çalıştığının anlaşıla bilirliğinin zorluğu derecesi, bilgiye ulaşmayı ne kadar desteklediği, verdiği dönütler, esnekliği, akışı, odağı, öğrencinin ID içeriğine ne kadar karışabildiği, etkileşim iskeleti ve görsel değişiklikleri nasıl aldığıdır. Bir ID yapabildiğini öğrenene açıkça anlatabilmelidir. Herhangi bir probleme eşdeğer bilgiye sahip bilgilere ulaşmak için bilişsel yükü azaltabilmelidir. Keşifle öğrenmenin öğrencinin etkileşimi ve keşifleri sınırlandığında daha fazla olduğu belirlenmiştir (Trudel & Payne'den aktaran Sedig & Liang, 2006). Öğrenci ne çok ulaşamayacağı ne de fazla kolay ulaşacağı çıkarımlarla karşılaşmamalıdır. Bir bilişsel probleme veya soruna uygun etkileşim önemlidir. Zamanlı Dönütler ID nin işleyişi sırasında, öğrencilerin yaptıkları hakkında sorumluluk almasına yol açar. O yüzden faydalıdır. Bir ID etkileşim seçenekleri dizisine sahip olmalıdır ki öğrenciye farklı şeyleri denemesine olanak sağlayabilsin. Etkileşim akışı sürekli veya ayrı ayrı kısımlardan ibaret olabilir. Bir ID de bu dört farklı şekilde cereyan edebilir: sürekli etki-ayrık tepki, sürekli etki-sürekli tepki, ayrık etki-ayrık tepki, ayrık etki-sürekli tepki. Çoğunlukla sürekliye sürekli ve ayrığa ayrık; gözlemlenen ID özellikleridir. Etkileşimin odağı kesintisiz dönüşümle bir şeyden başka bir şeye dönüşüyor olabilir ki buna "morphing" (başkalaşma) denmektedir. Örneğin bir dikdörtgen aslında uzatılmış bir kare olarak düşündürtülebilir ki zaten Japonca'da dikdörtgen kanjisi uzun ve kare kanjilerinin birlikte yazılması ile bulunur. ID ler öğrencilere ID içinde bir şeyleri değiştirebilme imkânı verdiklerinde daha faydalı olabilmektedirler. Örneğin Cabri yazılımı öğrencilere geometrik yapılar oluşturmalarına olanak tanır, Fractint öğrenenlerin getirdiği, keşfettiği farklı fraktal örneklerini de içerir. ID nin iskelet yapısına yardımcı yapıları içermesi de öğrenenlere yardımcı olabilir. Geçiş veya dönüştürmeleri nasıl gösterdiği önemlidir. Çünkü bir gösterim çoğunlukla başka bir gösterimin üzerine çekilir ve alttaki kaybolur. Bunların kayıt altına alınması veya öğrenene bunun için yol göstermesi ID i etkili kılar. Burada bir şeye dikkat etmek gerekir: etkileşim ve birbirini etkileme birbirlerine yakın kavramlar olmasına rağmen aynı şeyi göstermezler. Bir ID etkileşime sahip olabilir ama öğrenenin ID ile olan etkileşimi farklı boyutlarda bilişsel süreçler içerir (Sedig & Liang, 2006).

Bir hesap makinesi, bilişsel araç olmaktan da öte bir bilişsel ortak haline gelebilir ve gelmelidir de. Ekranda görülen nesnelerin gerçek ve somut nesne olmadığının fark edilmesi çok önemlidir. Aynı zamanda formal matematiksel dünyanın eseri de değildirler. Onlar somut nesneler dünyasını matematiğin kavramsal dünyasından ayıran ara yüzün betimlediği sanal nesnelerdir. Yani onlar bilgi araçlarıdır ama bilginin kendisi olmamalıdırlar. Aynı zamanda gösterim modları arası dönüştürmelere izin verdikleri için güçlü bir çalışma aracı olabilirler. Örneğin, bir grafik hesap makinesi elle çizilmesi imkânsız fonksiyonların gösteriminde, özelliklerin tahmininde ve görsel ispatlarda çok yardımcı olabilir. Dinamik görselleştirmeler yeni teknolojilerin sunduğu kolaylıklardandır ve bazı matematiksel nesne özelliklerini örüntüsel olarak ardışık değişimlerle görselleştirmeye imkân tanırlar.

Gösterim modları

Sözel, görsel, şekilsel gösterimlerini Duval (aktaran Gomez, 2001) gösterim modları diye adlandırmıştır. Gösterimler (temsil çeşitleri); fikirlerin, kavramların ve süreçlerin öğrenenler tarafından değiştirilebildiği fiziksel oluşumlardır (Lesh, Post & Behr, 1987, aktaran Akkuş & Çakıroğlu, 2006). Çoklu gösterim, birden fazla gösterim modunun bir arada kullanılması kadar, bir kavramın farklı gösterim modlarında gösterimini de kapsar (Even, 1998, aktaran, Akkuş & Çakıroğlu, 2006). Yerushalmy (1997, aktaran Akkuş ve Çakıroğlu, 2006) çoklu gösterimlerin sadece matematiği anlamak için araçlar olmasından öte yeni bir matematik yaratmak için kullanılabileceğine dikkat çeker. Çoklu gösterimler arası teknik iletişim kadar, öğrencinin kurduğu bağlar da önemlidir ve bunların sürekliliği ve hızı tanıtılan matematik nesnesini veya kavramını bir açıdan şekillendirir. Öğrencilere izin verildiğinde birden çok gösterim modunun bir arada kullanılmasını salık verir ama genelde tek bir gösterim modunu daha kolay bulduklarından onu kullanırlar. En çok tercih edilen gösterim modu “sembolik” gösterim olarak görülür. Tablo modu ve aritmetik mod da çekici gelmektedir. Şekilsel mod en az kullanılandır (Akkuş ve Çakıroğlu, 2006). Burada şekille gösterim modunun bir nebze modelleme olarak isimlendirilebileceğini ve modellemenin de öğrenciler için oldukça ileri derecede bir bilişsel anlayış getirdiğini belirtmekte fayda vardır.

Aynı mod içindeki süreçsel işleyişler geçiş (treatments) olarak adlandırılabileceği gibi, farklı gösterim modları arası geçişler dönüştürme (conversion) adını almaktadır. Sembolik olarak y ye bağlı bir gösterimden x e bağlı bir gösterime geçişten bahsederken, sembolik olarak verilen fonksiyonun grafiğini çizmek ise dönüştürme olarak isimlendirilir. Bunlardan dönüştürmenin geçişe oranla daha fazla kavram yanılgısına yol açtığı ve öğrenme zorluğu oluşturduğu bilinmektedir (Duval, 2006c) .

En çok görülen geçişler (treatment) grafikten grafiğe geçişlerdir ve algoritma işlemeleridir. İlkinde fonksiyonun tanım kümesi değişirse grafik çok değişebilir. Önceki bilgi de problemi bağlayabilir (Merger, 2010). En çok kullanılan dönüştürme (conversion) ise tablodan sembolik forma dönüştürmedir (Akkuş ve Çakıroğlu, 2006). Aritmetikten sembolik moda dönüştürme buna karşılık en az seçilendir. Ama burda problemin de etkisi olmuş olabilir. Öğrencilerin gösterim modu seçme hareketliliğine bakıldığında, grafik modu tanıyorlarsa onu, yok tablo gösterim modundan daha zevk alıyorlarsa onu seçtikleri gözlemlenmiştir. Duygusal bir faktör de ortaya çıkmıştır. Öğrenciler bazen bir gösterim modunu sevdilerse problemde işe yarasın ya da yaramasın kullanma eğiliminde oluşmaktadırlar (Akkuş ve Çakıroğlu, 2006). Öğrencilerle farklı gösterim modlarının artı ve eksileri paylaşılmalıdır. Gösterim modları hakkında tartışma derslerin azaltılamayan bir bölümü olmalıdır. Sembolik gösterim daha matematiksel bulunmaktadır (Akkuş & Çakıroğlu, 2006).

Gösterimlerdeki kaçınılamayan kavram yanılgıları

Kavram yanılgıları öğrencilerin öğrenme sırasında geçmesi gereken yolların içindeki engellerdir. Kavramların yanlış algılanması bazen kullanılan araçlar nedeniyle de olur. Bunlar öğretim süreçleri planlanırken ele alınmalı ve öngörülmelidir. Eğer kavram yanılgıları güçlü ve tutarlı bir kavram modeli yüzündense öğrenmeye zorluk teşkil edebilirler. Eğer zayıf; tutarlı olmayan bir kavram modeline bağlılarsa öğrenmeye engel teşkil etmeyebilirler (Duval, 2006). Duval (2006) ve D' Amore (2002) bilişsel bir paradoksa dikkat çekerler. Eğer öğrenenler matematiksel nesnelere sadece bir gösterim sayesinde ulaşabiliyorlarsa, matematiksel nesne ile gösterimi nasıl ayrımsayabilirler? Veya onu tam olarak gördüklerinde nasıl tanıyabilirler? Gösterim; nesnenin ister istemez her özelliğini değil bir veya birkaç önemli özelliğini taşıyacaktır ve bu da gerçek nesne hakkındaki matematiksel bilginin sınırlı kalmasına sebep olacaktır. Bunun farkında olan bir çocuk eğitimine devam edip gösterimleri arttırabilir ve nesne hakkındaki bilgisini yeni ve gerekli bilgilerle donatabilir ama bunun farkında olmayan bir çocuk eksik bilgi ve bazı durumlarda kavram yanılgılarıyla dolacaktır.

Berger (2010) e göre matematik yapmak ve matematik öğrenmek semiyotik bir paylaşımdır. Bilgisayar destekli öğretimler içinde Duval'in (2006) geçiş ve dönüştürme adını verdiği bilişsel aktivitelere dikkat çeker. Matematiksel nesnelerin farklı gösterimleri arası hareketinin kavramsal öngörü taşıdığını belirtir. Bunun ötesinde de bilgisayar cebir sistemlerinde kavramsal planlama ve problem çözmeye yardımcı olabileceğini iddia eder. Kişi ile teknolojinin tanışması iki yönlü bir ilişki haline dönüşürse, teknolojik aracın sınırlılıkları ve olasılıkları fark edilirse “instrumental genesis” (araçsal özyapı farkındalığı) oluşur (Drijvers ve Toruche, aktaran Berger, 2010, p.2). Sözdizim ile ilgili problemler eksik uygulama ve düşük düzeyde araçsal özyapı farkındalığı olabilir (Merger, 2010). Burada iki tarafın da birbirinin eksiklikleri ve farklılıklarını bildiği bir etkileşimden bahsederiz. Teknolojik bir araçla öğrenmeye çalışan bir öğrenciyi izleme aşamasındaki bir araştırmacının en çok farkında olması gereken şey: öğrencinin aklından geçenleri okuyamayacağıdır. Araştırmacı sadece kişinin simgeleri ne yaptığına, nasıl işlediğine bakabilir. Simgeler ise düşünce, anlama, akıl yürütme ve öğrenme araçlarıdır. Her simgenin üçlü yapısı vardır: bir nesne (fiziksel veya soyut), yerine geçtiği fikir ve yorumlayıcı bir bakış açısı gibi. (Peirce, aktaran Berger, 2010). Örnek olarak, türev matematiksel nesne ise, türevin sembolik, tanımsal ve grafik gösterimleri yerine geçtiği fikirler, türevin tanımındaki limit kavramıdır. Yorumlayıcı bakış açısı bu ilişkiyi görselleştiren bir program olabilir.

Semiyotik bakış açısıyla (Rotman,1993, alıntı Berger,2010) simgenin yerine geçtiği fikir ve matematiksel nesne birbirlerine tamamlarlar. Duval’ a (2017b) göre farklı mod gösterimlerindeki aynı nesnenin içeriği aynı olmaz. Aynı nesneye işaret edebilirler ama farklı modlar farklı karakteristiklere dikkat çekerler. Bilgisayar cebir sistemlerini kullanmak daha güçlü bir fikir anlattığı anlamına gelmez. Bu sistemleri etkin kullanmak söz dizim bilgisi, özgün matematik bilgisi hakkında da yeterli olmak gerektirir. Berger (2010) bu ortamın farklı dönüştürme süreçlerinin farklı bilişsel süreçleri içerdiğini savunur. Örneğin y=log x, grafiksel gösterimine logaritma fonksiyonunun genel bilgisi olmadan ulaşılmasına olanak sağlar. Bu problemle başa çıkabilmek için öğrenci kesinlikle, daha ileri dönüştürmeleri kullanması gerekecektir, bunları da öğretmen veya bir kitap rehberliğinde yapmalıdır (Duval, 2017a). Bu ileri dönüştürmeler matematiksel nesne ile semiyotik gösterim arasındaki bilişsel ayırımları içermelidir. Sembolikten grafiğe dönüştürme bilgisayar destekli eğitim yoluyla sağlandıysa, ek olarak numerik ve cebirsel mod gösterimleri kâğıt üzerinde verilebilir. Merger bu ortamlarda veri toplamayı, kasetlere sesli kayıt alarak, bilgisayarda klavye tuş vuruşlarını kayıt altına alarak ve bilgisayardan yazılı çıktılar alarak çözmüştür.

Geçişler (treatments) aynı gösterim modu içerisindeki mod değişimleridir. Dönüştürmeler ise (Conversions) farklı gösterim modları arası geçişlerdir. Geçişlere göre anlaşılması da uygulanması da daha zordur. Duval’a (2006) göre matematiksel anlamlandırmadaki öğrencilerin sıkışıklığı bunlardaki zorluktan kaynaklanabilir. Bir semiyotik gösterimi ilginç yapan şey başka bir semiyotik gösterime dönüşebilmesidir, yoksa gösterdiği nesne yüzünden değildir. Bu bağlamda semiyotik gösterimler sadece nesneler hakkında veya onlar ile işleyiş için yararlıdır (Duval, 2017a). Gerçekte onlar ile işleyiş derken ya gizlice ya da açıkça iki farklı gösterim arasında gel-gitler anlatılmış olur.

Pino-Fan, Guzman, Duval & Font (2015) Duval ‘in teorisini “Semiyotik Gösterimin Kaydı Teorisi” olarak isimlendirir. Duval (aktaran Pino-Fan vd. 2015) te bir bilginin hareketlenebilmesi için gösterime ihtiyaç vardır der. Duval’in teorisi 3 noktaya dikkat çeker:

- Aynı matematiksel nesnenin matematikte kullanılan semiyotik modları kadar çok semiyotik gösterimleri vardır
- Her farklı semiyotik gösterim nesnenin farklı bir özelliğini ortaya çıkarmak için vardır
- Semiyotik gösterimlerin içeriği gösterdikleri nesne ile kesinlikle karıştırılmamalıdır.

Her semiyotik gösterim hangi semiyotik modda üretildiyse ona dayandırılmalıdır. Geçişler ve dönüştürmeler iki bilişsel aktivitedir birincisi aynı mod içindeki gösterimleri ele alırken diğeri farklı modlar arası gösterim dönüştürmelerini ele alır. Pino vd. (2015) dönüştürmenin yarattığı zorluklar olarak şunlara dikkat çeker. Bazen kaynak gösterim modunun içeriği ile varış noktasının içeriği birbirine eşleşmeyebilir. Geçişte (treatment) de de sorunlar olabilir. Durum, öz dilin gösterim modunun kullanılmasıyla ve görselleştirmeye izin veren gösterim modlarının kullanılmasıyla karmaşıklaşabilir. Bir sistemin semiyotik sistem olarak adlandırılabilmesi için şu özelliklere sahip olması gerekir. 1) Nesnenin gösterim olarak adlandırılabilecek bir izinin veya izler toplamının olması, 2) Gösterimleri, öncül gösterimlere göre daha çok bilgi verebilecek sistemin tipik özelliklerine göre gösterimleri transform edebilme, 3)Gösterim sistemini başka sisteme çevirebilme öyle ki farklı anlam çıkarımlarına izin versin. Herhangi bir teorik bakışın iki şeye dikkat etmesi gerekir: matematiksel nesnelerin, süreçlerin, anlamların üzerinde ve gösterim modlarının üzerinde durulması gerekir (Pino vd. 2015).

Semiyotik gösterimlerdeki problemleri çözmek için

Semiyotik gösterimlerin özelliği başka semiyotik gösterimlere dönüşebilme kolaylıklarıdır. Duval (2017b) bir test önerir. Bu test iki soruya yanıt verebilmeyi gerektirir. A) Nesne ile gösterimlerini yan yana getirebiliyor muyuz? B) Farklı gösterimleri yan yana getirdiğimizde aynı nesnenin gösterimleri mi değil mi? Karar verebiliyor muyuz? Asıl soru şu noktaya gelmektedir: İki gösterimle karşılaştığımızda iki farklı şeyin iki farklı gösterimi mi? Yoksa aynı şey mi? Hele hele, içerik tamamen farklıysa buna karar vermek ne derece sıhhatli olabilir? Örneğin içerik olarak kelimeleri, sembolleri, bir boyutlu veya 2 boyutlu şekilleri kapsayan gösterimlerde buna karar vermek için ne lazım gelir? Duval (2017b) sayı doğrusu gösterimi ile sayı doğrusu nesnesinin öğrenilmesi arasında problemler ortaya koymaktadır. Analitik geometri derslerinde bazı öğrencilerin aynı eksen üzerindeki iki farklı işaretli sayı arası uzaklığı ölçmede sorun yaşamaları da bu sorunla bağdaşıktır. Ki bu da problemin büyüklüğünü net olarak göstermektedir. Duval (2017b) bu ikilemin yarattığı sorunsalı örnek gösterir. Ve probleme sıfır bariyeri adını verir. Bunların yanında gösterimdeki anlam birimlerinin ayrıştırılabilmesi ve iki farklı gösterimdeki anlam birimleri arasındaki birebir bağlantıya dikkat çekilmesi gereklidir.

Pratikte, kavramsal uygunlaştırma bir gösterimin şu fonksiyonlarıyla ayrıştırılabilir: sunduğumuz kavramın onu ayrıştıran özellikleri, geçişler (treatments) ve dönüştürmeler. (conversions) . Bu üçünün bir araya gelmesi sayesinde biz matematiksel bilgiyi oluştururuz ama ne kendiliğinden ne de kolayca ortaya çıkar. Yani bunlar matematik öğrenmenin önündeki engellerdir. Farklı gösterimler bir arada kullanıldığında, sosyal deneyimler göz önüne alındığında, birbirlerinin etkinliğini ve sınırlılıklarını destekler. Örneğin bir açının çiziminde açı yayının başlangıca olan uzaklığı yayın uzunluğunda fark ettireceğinden öğrencilerde daha büyük açı hissi oluşturmaktadır. Öğretmenlerin yanlış modelleri de bazen sorunları gereğinden büyük ve ulaşılmaz hale getirebilmektedir(Santi & Sbaragli, 2007). D'Amore (2002) nesnenin kavramsal edinirliğini noetik; bir gösterimin işaretlerle edinirliliğini de semiyotik diye adlandırmaktadır. Semiyotik ve noetiği aynı şey olarak bilen öğretmenler geçişler, dönüştürmeler veya onların genel adı gösterimler ile ilgilenmezler. Aslında en doğal ve kendiliğinden olması gereken semiotik mod en karmaşık hale gelir.

Lesh, Post, & Behr' e göre (1987), matematik öğrenme ve problem çözmede şu beş gösterim sistemleri görülür: gerçek dünya örnekleri, statik resimler, manipüle edilebilen modeller, semboller ve günlük dil. Dönüştürmelerdeki (conversions) problemler, hem matematik öğrenmeyi hem de problem çözme performansını etkileyen faktörlerdir. Bir öğrencinin bir fikri anlaması demek; a) farklı gösterim sistemlerinde aynı fikri tanıyabilmesidir, b)verilen sistem içinde fikri manipüle edebilmesidir, c)bir sistemden öbür sisteme fikri dönüştürebilmesidir (conversions). Dönüştürmeler aslında modelleme süreçleri ile de bağdaştırılabilir. Verilen durumu en basite indirgeyerek gerekli ve gereksiz faktörleri ayıklamak, orijinal durum ve model arasında bir bağıntı kurmak, modelin özelliklerini fark ederek durumu tahmin etmeye çalışmak, bu tahminleri orijinal duruma dönüştürmek ve en sonunda dönüştürülmüş tahminin yararlı / duyarlı olup olmadığına karar verebilmek. Dönüştürme cümleleri şunlar olabilir: "kendi kelimelerinizle anlatmayı deneyin", "durumu gösteren bir grafik çizmeye çalışın", "benzer durumdaki bir problemi tanımlayın", "gerçek nesnelerle düşünmeye çalışın", "bir dizi kelime problemini anlatan denklemler" yazın vs. Problem çözmede uzman bireyler, ilgili gösterim sistemlerini bulmada ve birinden diğerine geçmede usta olan kişilerdir. Gösterim (temsil) çoğunlukla verilen bir durumun belli kısımlarından farklı gösterim sistemlerine kısmi bağıntılar içerir. Her kısmi bağıntı aslen, problem durumunun sadece bir kesitini içerir, bütünden tek bir gösterim sistemine bir bağıntı yoktur.

ID ile matematiksel düşünce

Öğrenci önce görselin statik görüntüsünden anlam çıkarır. Daha sonra görselin gösterim modları arası bağlantılarından anlık statik anlamlar çıkarır. En son adımda bu adımlar anlamlı bir bütüne getirilmeye çalışılır, özellikle örüntü haline geldiklerinde bu anlam daha doğru olarak ortaya çıkar. Tek tek parametrelerin sistemde yaptıkları değişiklikler örüntü oluşturmaya ve sorgulamaya olanak sağlar. Bunun sonucunda da matematiksel bağlantılar – bağlantılı gösterim yolları sayesinde sentezlenerek örüntüler adlandırılır ve parametrelerin etkisi analiz edilir (Çeziktürk, 2003).

Duval (2017a) matematiksel aktivitenin kaynak sürecinin aynı nesneyi farklı semiyotik gösterimler arasından tanıyabilmektedir der ve burada iki gösterimin içeriğinin aynı olmaması gerektiğini de ekler. Hızlı ve dinamik gösterimlerin güzelliği endişeye ve şüpheye mahal vermeyecek şekilde hızlı oluşlarıdır. Düşünsek tereddüte düşeceğimiz yerlerde bir etkileşimli gösterim fonksiyon dizisi gösterebilir. Dönüştürme matematiksel kavramların anlaşılmasını kesinlikle sağlayamasa da matematiksel kavramlar anlaşıldığında dönüştürmeler de anlaşılır. Bu sorunsalı aşmak için 16 yaşına kadar öğrencilere her gösterim modlarının nasıl ilişkilendirildiğini fark ettirmemiz gerekmektedir (Duval, 2017 a).

Araştırmanın Amacı

Araştırma amacı özellikle belli bir etkileşimli diyagram (ID) seçilerek onun Duval' in gösterim dönüştürme süreçlerinden dönüşüm ve geçişler açısından incelenmesi ve kullanılacak etkileşimli diyagramlarda öğretmenlere bir bilişsel süreç analizi yolu sunmaktır. Öğretmenler her geçen gün daha fazla ID lere internetten ulaşmakta fakat ders ortamında nasıl verimli kullanacaklarını bilmemektedirler. ID lerin özellikle dönüşüm ve geçişler açısından zengin olanlarının seçilmesi ve buradaki bilişsel süreçlerin desteklenmesi oldukça önem kazanmaktadır. Bu bağlamda araştırma örnek teşkil edecektir ve matematik öğretmenlerine bir yol gösterecektir. Bir diğer deyişle, Bu çalışmanın amacı çoklu gösterime sahip bir ID örneğinden hareketle, dönüştürme yönünün konunun anlaşılmasına etkisini anlamaya yöneliktir. Analitik geometri konusunda var olan bir ID kullanılarak grafikten semboliğe ve numerikten grafiğe dönüşümlerinin ID yi ve R^3 uzayında bir doğrunun vektörel gösteriminin anlaşılmasına etkisini incelemeye çalışılmıştır. Burada grafikten semboliğe dönüştürme önsezi karşıtı alınmıştır.

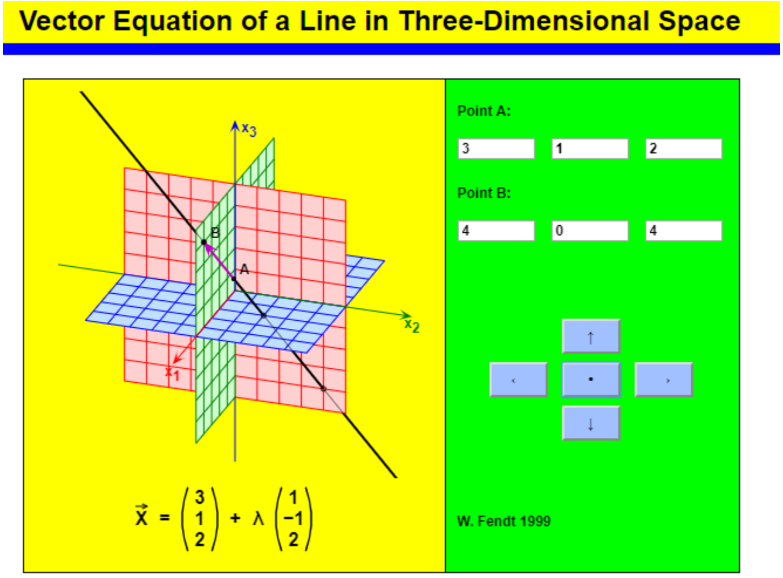
Yöntem

Araştırmada sosyal bilimlerdeki nitel araştırma yöntemlerinden fenomonolojik araştırma modeli uygulanmıştır. Bu araştırma modelinde (Groenewald aktaran Abakpa, Agbo-Egwu, & Abah, 2017); araştırmacı, bir olayı, durumu, bir süreci aydınlatmak için veri toplar. Amacı olaya yorum katmak değildir sadece deneyimi tüm gerçekliği ve sadeliğiyle açıklamaktan ibarettir. Fenomenin sadece önemli ve gerekli özellikleri verilmelidir. Fenomonolojik bir araştırmanın 4 evresi vardır: metafizik, metot, kalite sağlama ve etik. Kalite sağlama nicel araştırmalardaki geçerlilik ve güvenirlik yerine düşünülebilir. Kalite sağlamanın boyutları ise inanılırlık, aktarıla bilirlik, olayın en yalın halinin verilmesi ve en son olarak yenilene bilirliktir. Bu araştırmada inanılırlık için, içinde farklı gösterim şekilleri olan, uzun zamandır test edilmiş ve kullanılmış ve konu olarak çok zor bir konuya tekabül etmeyen bir ID seçilmiştir. Öğrencilerin bu ID ile olan etkileşimi için mülakat ile veri toplanılmamıştır fakat bunun yerine kendi içlerinde bu ID ile verilen sorulara verdikleri cevaplarda olayı tamamen öğrencilerin kendi bakış açıları ile verilen sorular çerçevesinde ve kendi kelimeleri ile açıklamaları istenmiştir. Veri toplama süreci ve veri toplama araçları detaylıca tanıtıldığından, farklı ID lerle de ve farklı konulara ait ödev sorularıyla da araştırma rahatlıkla tekrarlanabilir olduğu düşünülmektedir. ID bir matematik nesnesidir ve bu yapısı itibarı ile konuya özeldir. Bu özelliği dikkate alınarak, ID nin yapısal özellikleri bir çerçeve içinde çizilmeye çalışılmıştır. Aynı inceleme bütün ID lerde yapıla bilinir. Olayın en yalın halinin verilebilmesi için öğrenci cevapları kelimesi kelimesine analizde verilmiştir. Gene kendi cevapları içindeki açıklamalar kullanılarak detaylara erişilmeye çalışılmıştır. Kullanılan ödev sorularında çok yorum istemeyen oldukça net değişkenlerin sonuçları istenmiştir. Değişkenlerin birbirleriyle olan iletişimine dikkat edilmiştir. Öğrenci cevaplarına hiçbir koşulda müdahale edilmemiştir. Ödevi yaparken sordukları sorularda bile cevapları kendi düşünce yolları ile bulmalarına önem verilmiştir. Araştırmanın oldukça yenilenebilir olduğu düşünülmektedir, çünkü bu makalede verilen sistematik bütün ID lerde (özellikle çoklu gösterime sahip olanlarda) rahatlıkla uygulanabilir ve ID nin yapısal özellikleri incelenerek ID nin öğrencinin konuyu anlamasına ne kadar yardımcı olabildiği veya varsa hangi boyutlarda zorluk çıkaracağı belirlenmeye çalışılabilir.

Çalışma grubu

Veri, analitik geometri dersini alan 1. Sınıf orta öğretim matematik aday öğretmenlerinden gönüllük esası ile toplanmıştır. Bu ders ortaöğretim matematik öğretmenliği öğrencilerine 1. Sınıfta iki dönem halinde verilmektedir. Bu aday öğretmenler İstanbul ili sınırları içindeki bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesi içindeki öğrencilerdir. Sınıf mevcudu 30 kişi olmasına rağmen dönen cevaplar 18 (14 Kız, 4 E) tane olmuştur.Öğrenciler ödev konusunda tamamen kendi isteklerine ve ilgilerine bırakılmıştır. Öğrenciler veri toplanırken veya araştırma yapılırken öğrenci numaraları ile ayrılmıştır, tanıdık tanımadık öğrenci etkisi en aza indirilmeye çalışılmıştır. Bireysellikten uzak durulmaya çalışılmıştır.

Veri toplama araçları



Şekil 1. William Fendt' in 2015 son kez düzeltmeler yaptığı interaktif diyagram

Aday öğretmenlerin sorulara verdikleri cevaplar ile Fendt' in 1999 da ilk kez oluşturduğu ve 2015 te son düzeltmelerini yaptığı HTML 5 programı ile oluşturulmuş ID (Etkileşimli diyagram) (şekil1) la olan öğrenme deneyiminin çerçevesi çizilmeye çalışılmıştır. ID, etkileşimli bir diyagram olup bu makalede sadece onun varsayılan olarak kullandığı değerlere göre statik bir fotoğrafıdır. Araştırmada Fendt'den izin alınmıştır ve sadece ID nin araştırma amaçları sebebiyle kullanılacağına dair söz verilmiştir. Araştırma için bu ID nin seçilme sebebine gelince, basit düzeyde geçiş ve dönüştürmeleri aynı anda içermesi ve bu dönüşümleri çok ta karmaşık hale getirmeyişi yüzündendir. Bir diğer sebep de analitik geometri dersinde işlenen konuyla bağdaşıklık göstermesidir. Bunun için toplanan cevap kâğıtları (zaman sınırı olmadan 18 tane dönüş oldu), içerik analizi yöntemine tabii tutulmuştur.

ID ile ilgili sorular

Analitik geometri I dersini alan ortaöğretim aday matematik öğretmenliği öğrencilerine üstteki etkileşimli diyagramın (ID) adresi verilmiştir ve alttaki sorulara cevap vermeleri ve mümkün olduğunca açık davranmaları beklenmiştir. Hatta mümkünse düşündükleri her şeyi yazmaları istenmiştir. Sorular daha sayısaldır fakat bu araştırma için aşağıda tam olarak ne öğrenilmek istendiyse o belirtilmiştir. Bu sorular hazırlanırken uzman görüşüne başvurulmuştur.

1. Verilen A ve B noktasından geçen grafiği çizdiriniz, doğru denklemini yazınız, doğrunun geçtiği iki nokta daha belirleyiniz. : Bu ID, doğru denklemini sol altta vektörel denklem şeklinde gösterir. Bu soruyla bu özelliği kullanıp kullanamadıkları anlaşılmaya çalışılmıştır. Sorunun ikinci kısmı ile ise ya grafiği çevirmek suretiyle farklı

noktalar belirleyeceklerdir ya da denklemi kullanarak belirleyeceklerdir. Bu seçim kendilerine bırakılmıştır.

2. Doğrultman vektör grafikte var mı? Vektörel doğru denklemi içinde yer alan doğrultman vektörünü tanımaları beklenmiştir.

3-4. Vektörel İfadesi verilen doğruları çiziniz. Doğru denkleminden yola çıkarak doğrultman ve üzerindeki noktayı bulmaları beklenmiştir, böylece doğruyu çizdirebilecek olan noktaları bulacaklardır.

5. Y eksenine paralel bir doğru çiziniz: Özellikle doğru kavramının içine nelerin girip girmediğini anlamaları için sorulmuştur. Noktalarda x i farklı y si aynı noktalar seçmeleri gerekir.

6. Xz düzlemi üzerinde bir doğru bulunuz. Analitikte düzlem ve eksen kavramları birbirine karıştırıldığından bu soru sorulmuştur. ID yi kullanırken, xz düzleminin yeşille belirlenen düzlem olduğunu ayırt etmeleri gerekmiştir.

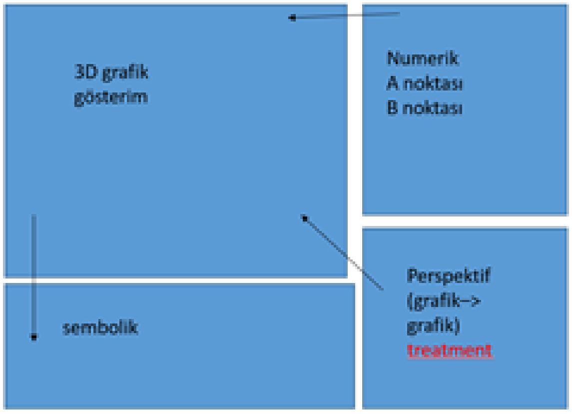
7. Grafiğini bildiğiniz bir doğrunun üzerindeki noktaları belirleyebilir misiniz? ID iki noktadan doğru grafiğine ve oradan da denklemine gittiği için, burada tersten düşünmeleri gerekmiştir. Aday öğretmenler burada Id den yeterince faydalanmamışlardır. Aday öğretmenler bu soruda ID yi sadece sağlama yapmak için kullanabilmişlerdir.

8. Denklemini bildiğiniz bir doğrunun üzerindeki noktaları belirleyebilir misiniz? Bu dönüştürme ID tarafından desteklenmemektedir. Gene sağlama için kullanabilmişlerdir.

9. ID nin sağ alt köşesindeki bölüm ne işe yarıyor? Bu bolum grafiğe farklı açılardan bakabilmemize olanak sağlar. Diğer bölgelerdeki noktaları fark edebiliriz.

Bu sorulardan sadece 7. ve 8. Sorulara alınan cevaplar bu çalışma bazında incelenmiştir. Diğer sorular başka bir çalışmada incelenmiştir. Özellikle 7. ve 8. Soruların bu çalışma için seçilmesinin sebebi bu soruların dönüştürme sürecine izin veriyor olmasıdır. Diğer sorular da bu soruların cevabı için gerekli olan genel bilginin olup olmadığına bakılmıştır. Herhangi bir ID ile matematiksel düşünme ayrıştırılacaksa önce bu ID nin yapısının ve nasıl çalıştığının iyice anlaşılması gerekir. Bunun için önce ID deki geçiş (treatments) ve dönüştürmeler (conversions) belirlenmiş ve yapısal olarak bağlantılar ortaya konmuştur.

ID nin uzman görüşüyle incelenmesi



Şekil 2. ID deki geçiş ve dönüştürmelerin yönü ve varlığı

Araştırmanın sınırlılıklarından birisi olarak veri toplama aracı olan ID sadece yazarın uzman görüşü altında incelenmiştir. Burada konu hakkında çalışan uzman sayısının azlığı cevap olabilir. Gene de mümkün olduğunca ID nin varsayılan özelliklerine dikkat çekilmiştir ve yoruma açık inceleme yapmaktan kaçınılmıştır. Herhangi bir matematiksel gösterim iki dünya etrafında gezinir: sunulan evren ve sunan evren (Janvier, 1987). Buradaki örnekte amaç verilen iki R^3 noktasından geçen bir doğrunun 3 boyutta çizilmesidir ve bu doğrunun aynı anda hem vektörel denklemi verilir hem de farklı perspektiflerden görünümü verilir. Üstteki ID sistematiğine bakıldığında görülmektedir ki, ID iki dönüştürme (conversions) ve bir geçiş dönüşümlerine (treatment) izin vermektedir. Dönüştürmeler verilen noktalardan grafiğe dönüşümde ve grafik gösterimden sembolik doğrunun vektörel denkleminin bulunmasında yararlanılmaktadır. Geçiş (treatment) ise grafiğin verilen oklar aracılığıyla döndürülmesiyle grafik gösterimin farklı açılardan halinin ekrana daha net yansıtılması şeklinde olmaktadır. Van Hiele lere (1986) göre önsezisiyle hareket eden bir kişi belli bir yapıya göre hareket eder rasgele bir mantığa göre hareket etmez. O zaman ID yi kullanacak bir öğrencinin önce ID nin yapısını iyice çözmesi gerekir. Öğretmenin amacı ise, uzaydaki bir doğrunun vektörel gösterimi yapısının anlaşılması, örüntüsünün algılanması ve bu örüntü bağlamında öğrencilerde önsezinin oluşmasıdır. Yani ID nin görevlerinden biri direkt bu olanağı geçiş veya dönüştürmelerle sağlayamasa da, verilen dönüştürmelere ters yönde dönüştürme oluşturmak ta olabilir. Bir şekilde öğrencide bununla ilgili bağlantıların da oluşması beklenmektedir. ID nin yapısındaki düz oklar kadar ters oklar da öğretmektedir. Öğretmenin görevi bu ID yi kullanırken ID nin eksik olduğu yanlara da dikkat çekip o açıdan da kullanılabilmesini sağlamaktır. Cheng' e (1999) göre eğer ID örüntüsü (yapısı) bağlantılı matematiksel kavramların topolojisini yansıtıyorsa konuya özel kavramların nereye düştüğü kolayca anlaşılır. Burada numerikten grafiğe gösterim geleneksel matematiksel yapıyı da canlandırdığından Cheng'in söylediği doğru olabilir ama grafikten semboliğe gidiş derslerde hiç gösterilmediği için öğrenci her koşulda zorluk çekecektir.

Verilerin analizi

Öğrenci ID deki gösterimin doğruluğuna karar verirken, ID nin sınırlılıklarını da göz önüne alır ve böylece uygun ve doğru genellemeler yapar. Schoenfeld (2016) ve Devlin (2012) genellemelerin matematiksel düşünmenin önemli boyutlarından biri olarak listelerler.

Sembolik gösterimde üzerindeki noktalardan biri (5,0,1) görünürken, öbürü doğrultmanın içinde yer almaktadır. Öğrenci bu bilginin farkındaysa, ID amacına erişmektedir. Fakat iki noktadan geçen doğru önce çizilmekte sonra denklem ona göre altta yazılmaktadır. Derste ise önce denklem sonra grafik gösterilmektedir. Buna rağmen, uzayda, iki noktadan geçen doğrunun denklemi nedir sorusu neredeyse sınıflarda hiç işlenmemektedir. ID bu gösterim yönüne dikkat çekmektedir. ID yi derste kullanacak öğretmen eğer bu dönüşümün yönüne dikkat çekmek isterse öğretim adımlarının arasını kısaltabilir. Yani her durumda bir noktayı değiştirip sonucu görmesini sağlamak faydalı olabilir.

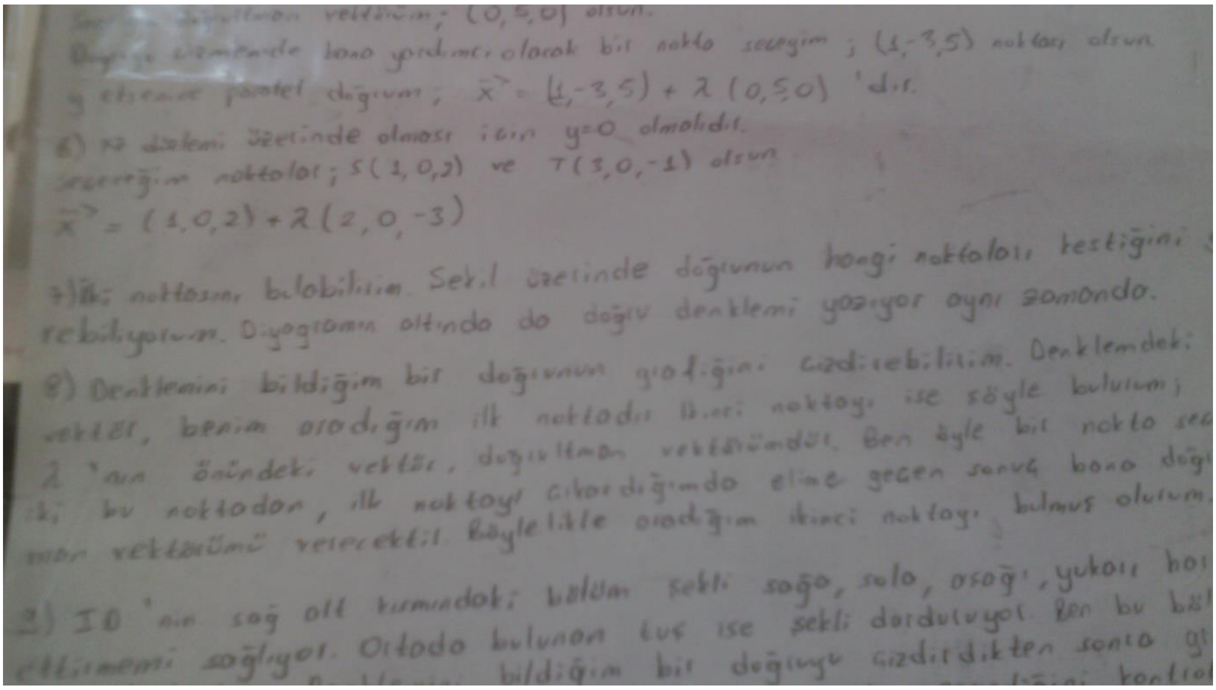
Bazı gösterimlerin birbirine dönüşümü önseziye uygun iken, bazıları önseziye ters düştüğünden anlamayı ve deneyimi zorlaştırmaktadır (Cezikturk, 2003). Bu durumda ID ye düşen görev birden çok gösterimi bir arada vermesinden çok bu gösterim değişimi yönünü öğrenciye açıklamak olabilir. Yani ID bu konuya özel kavram yanılgısıyla başa çıkmak için tasarlanabilir. ID yi yeniden tasarlamak yerine kullanıcı öğretmen problemleri durumu tetikleyici hale getirebilir.

Bulgular

Veri analizinde diğer sorular daha rutin problemler olduğu için ve 7 & 8 dönüştürme ile ilgili olduğundan özellikle 7 ve 8. soruların cevapları incelenmiştir.(Tablo 1). Aslında ID direk dönüştürme içermemektedir ama ID yi kullanımını ve konu bilgisini birleştirerek dönüştürmeyi açıklamak mümkündür. 7. Soruda grafiği bilinen bir doğrunun iki noktasını bulmak sorulmuştur, , 8. Soruda ise denklemi bilinen bir doğrunun üzerindeki noktaların belirlenip belirlenemeyeceği sorulmuştur. Her iki soruda da “ID yi kullanarak” ibaresi özellikle eklenmiştir. Tablo 2 de öğrencilerin 7 ve 8. Soruları cevaplamakta kullandıkları gösterim modları listelenmiştir. Örneğin hem 7 ye hem de 8 e sadece sözel yolla cevap veren bir öğrenci cevabı şekil 3 te görülebilir. Konuyu iyi anlamış ve ID yi kullanmakta da sorunu olmayan bir öğrencinin cevabı görülmektedir.

Tablo 1. 7. Ve 8. Sorulara öğrencilerin verdiği genel cevaplar

7. ve 8. Sorulara verilen cevaplar	f
O soruları atlamayı tercih (Bu konuda zorluk yaşadıkları düşünülebilir.)	3
Evet, bulabilirim deyip ID i kullanmayacağını açıklayan	1
Soruları birbirine karıştıran	1
Her iki soruya da sözel cevap veren	4
Sembolik gösterimle diyagram gösterimini (ID'nin statik fotolarını) tercih	3
Hem sözel hem sembolik kullanan	3
Sözel gösterimle diyagram gösterimini (ID'nin statik fotolarını) tercih	3

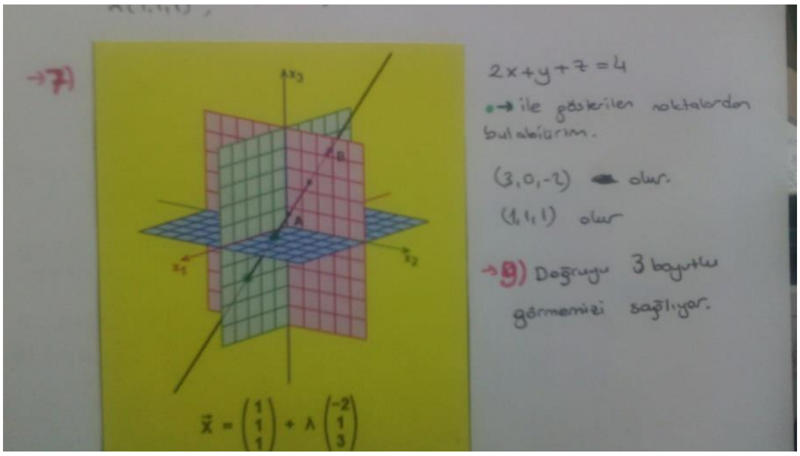


Şekil 3. +İki soruya da sözel cevap veren bir öğrenci

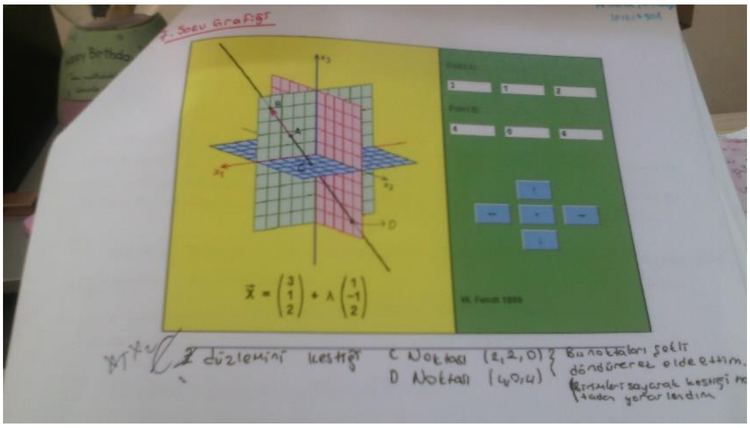
Tablo2. 7. Ve 8. Sorularda kullanılan gösterim modu çeşitliliği

Öğrenci#	Cinsiyet	7.soru	8.soru
1	Erkek	sözel	sembolik
3	Erkek	sözel	sözel
6	Kız	sembolik	statik diyagram
7	Kız	sembolik	statik diyagram
8	Kız	sözel	statik diyagram
9	Kız	sözel	statik diyagram
10	Kız	sözel	statik diyagram
11	Kız	sembolik	statik diyagram
12	Kız	sözel	sözel
14	Kız	sözel	sözel
16	Kız	sözel	sembolik
17	Kız	sözel	sözel
18	Kız	sözel	sembolik

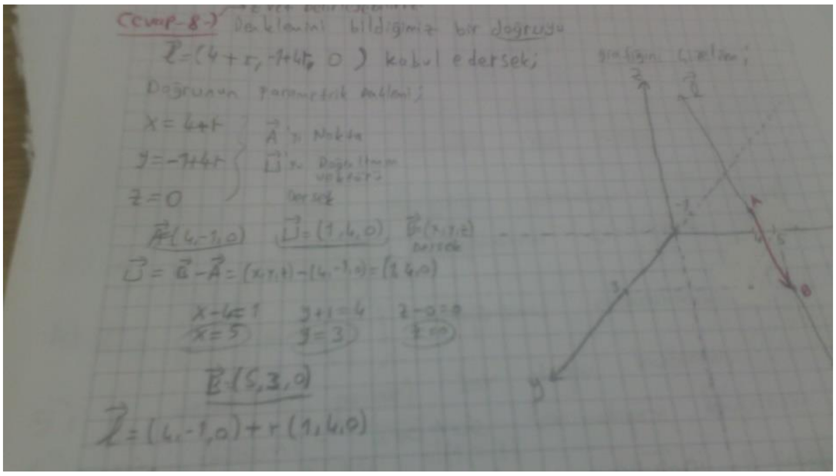
Öğrencilerin büyük çoğunluğunda düzlem denklemi ile 3 boyutlu uzaydaki doğru denkleminin karıştırıldığı fark edilmiştir. Örneğin 2x+y+z=4 un bir doğru gösterdiğini belirtmişlerdir(şekil4). Ve soruları ona göre çözmüşlerdir. (5 öğrenci). Buna bağlı olarak, ikinci büyük kavram yanılgısının 3 boyutta birbirine dik düzlemler olan xz, xy ve yz düzlemleri ile x,y,z, eksenleri arasında olduğu belirlenmiştir(1 öğrenci)(şekil5). Öğrencilerden sadece 1 tanesi ID nin statik diyagramını eklerken siyah beyaz foto eklemiştir. Diğerleri renklerin de önemli olduğunun farkında olmuştur. Birkaç tanesi ID ile çalışırlarken ID nin sınırlarının her soruyu çözmediğini belirtmişler ve ID grafik çerçevesinin bir x,y,z, sınırlılığı olduğunu fark etmişlerdir. 8. Soruya cevap verirken ID yi denklem vererek noktaları buldurmada da kullanabileceklerini belirtmişler ama önce gene nokta verdikleri tespit edilmiştir. Şekil 6 ve 7 de sırasıyla ID yi dönüştürmeyi açıklamak için kullanmayan ve ID yi kullanan iki öğrencinin cevabı karşılaştırılabilir.



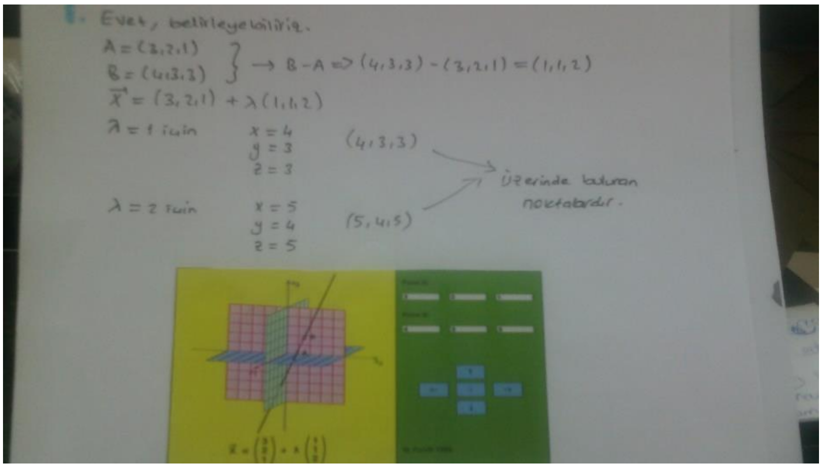
Şekil 4. Doğru denklemi ile düzlemi karıştıran öğrencilere örnek



Şekil 5. x_1x_2 düzlemi yerine z düzlemi yazan öğrenci



Şekil 6. ID nin grafiksel artılarından faydalanmamakta ısrar eden bir öğrenci



Şekil 7. Dönüştürmeyi ID nin artısını da kullanarak açıklayan bir öğrenci

Öğrenci sözel cevapları

Bu cevaplar incelenirken öğrencilerin % 100 ünün diğer rutin soruları gayet kolaylıkla yapabildiği ve bunları yaparken de statik cevaplar kullandığını görülmüştür. Yani gene ID yi net olarak kullanmaktan kaçınmışlardır.

- Ö3: «Bu diyagram yardımıyla grafiğini bildiğimiz bir doğrunun 2 noktasını bulabiliriz. Çünkü denklemi altında yazmaktadır. Yani burada ilk nokta belirlidir. Grafiğin denkleminden bulunur. İkinci noktayı bulmak için de bu nokta ile doğrultman vektörünü toplamamız gerekir.»

Cevabını tamamen sözel gösterimle yazan bir arkadaşın cevabıdır. Net ve doğru bir cevaptır. Bu da ID nin özelliklerinin kullanılıp kullanılmadığı hakkında ne yazık ki tam bir bilgi vermemektedir. Öğrenci konuyu tam olarak anlamış ta olabilir. ID öğrenciye bir şey katmamış ta olabilir ama öğrencinin ID kullanımından bir kavram yanılgısına da düşmediği açıkça görülmektedir.

- Ö6: « x=(a,b,c) +λ(d,e,f)'nin grafiğini oluşturduğumuzu düşünelim. Birinci noktamız bellidir. A =(a,b,c). İkinci noktamızı doğrultman yardımıyla bulabiliriz. B-A işlemini yapalım. B-(a,b,c)=(d,e,f) dir. B=(a+d, b+e, c+f) tir. »

Şimdi tamamen sembolik bir cevap görmekteyiz. Gene öğrencinin rahat hissettiği için seçtiği bir gösterim olabilir. ID bu gösterimin sadece denklem kısmını vermektedir, doğrultman vektörü açmamaktadır. Öğrencinin konuyu anladığı sembolik gösterimi doğru kullanmasından bellidir diyebiliriz.

- Ö8: «Grafiğini bildiğim doğrunun iki noktasını bulabilirim. Ya eksenleri kestiği noktalara bakarım ya da doğrultman vektöründen bulurum. »

İşlemi yapmadan bulabilirim diyen öbür öğrenciden farkı bulma yolunu da sözel olarak vermesidir. Bir matematik öğretmeninin sembolik gösterim kadar matematiksel bulmayacağını söyleyebiliriz. Aslında ID tam olarak bu dediğini yapmasına izin vermemektedir ama öğrenci matematiksel bağlantılardan yola çıkarak ID ile bunu yapabileceğine karar vermiştir.

- Ö9: « Diyagramda yön tuşlarını kullanarak noktalara karar verebiliriz.»

Bu ID nin geçiş (treatment) içerdiği noktaya dikkat çekmektedir. Diğer sorularda statik diyagram gösterimini sorunsuz kullanabildiği fark edilmiştir.

- Ö10: «Diyagramda yön tuşlarıyla noktaları bulabiliriz. BULAMADIM.»

Bir önceki öğrenci gibi ID nin geçiş (treatment) sürecini içeren özelliğine dikkat çekmektedir ama kullanmaya karar verdiğinde sonuca ulaşamadığını fark etmiştir. Bu geçiş sürecinin zorluk içerdiği hallere bir örnektir. Çünkü soru önseziye aykırı bir şekilde verilmiştir. Sorunun yapısı ile ID nin yapısı ters düştüğü için soruda ID yi nasıl kullanabileceğine karar vermesine rağmen uygulamada zorlanmıştır. Hatta yapamamıştır.

- Ö12: «Doğrunun doğrultmanının eksenlere olan uzaklığı bize iki noktayı da verir… Denklemi oluşturan noktaları bulup grafiğini çizdiririz ve oluşan grafiğin doğrultmanından iki noktayı da eksenlere olan uzaklıktan buluruz»

Eksenlere olan uzaklık iki boyut üzerinde bir doğruyu çizmek için kullanılan yöntemden hatırlanmaktadır. 3 boyutta bunun akıl karıştıracağı ve algoritmik bir dizi geçiş sergilemesi gerektiğini fark ettiğinden midir bilinmez soruda cevabı sadece sözel bırakmıştır.

- Ö14: « Grafiğini bildiğim bir doğruyu bu diyagramda üç boyutlu inceleyerek eksenleri kestiği noktalar da dâhil olmak üzere birçok noktasını bulabilirim… Denklemini bildiğimiz doğrunun denkleminden doğrultman vektörünü ve içinde barındırdığı bir noktayı belirleyip bu diyagramda çizdirebiliriz. Grafikten yola çıkarak da birçok noktasını ayrıca denklemde λ ya değer vererek birçok noktasını bulabiliriz. »

12 no lu öğrencinin zorlandığı konuda bu öğrenciyi 1 adım ileride görülmektedir. Eksenlere uzaklık terimi yerine eksenleri kestiği yerlerden yararlanarak noktalarımı arttırabilirim demektedir. 2. Boyuttan 3 boyuta doğru çizmenin ana hatlarını aktardığını görmekteyiz. Öğrenci konuyu anladığı gibi ID yi uygun kullanım yollarını bulmuştur, ID nin özelliklerinin kafasını karıştırmadığı görülmektedir.

- Ö16: «Öncelikle xz düzlemi üzerinde bulunan bir nokta aldım sonra xy ve xz düzlemine bakarak bildiğimiz x ve z noktasına denk gelen y değerini buldum. S+r(t-s) denklemini kullanarak t noktalarını buluruz. S noktası belli olduğu için Point A ve Point B kısmını elde ettiğimiz noktaları girerek grafiği çizdiririz. Grafiğin üzerindeki noktaları da 7. Soruda anlattığım gibi bulabiliriz»

Sembolik gösterimde tamamen doğru cevap veren bir arkadaş görülmektedir. Öğrencilerin literatürde belirtildiği gibi rahat hissettikleri veya en çok bildikleri gösterim türü ile soru cevabını vermeye çalıştıkları duruma bir örnek olabilir.

- Ö17: « Denklemini bildiğim bir doğrunun grafiğini çizdirebilirim. Denklemdeki ilk vektör benim aradığım ilk noktadır. İkinci noktayı ise şöyle bulurum. λ nın önündeki vektör, doğrultman vektörümdür. Ben öyle bir nokta seçerim ki, bu noktadan ilk noktayı çıkardığımda elime doğrultman vektörü geçer. Böylelikle ikinci noktayı bulmuş olurum... ID nin sağ alt kısmındaki bölüm şekli sağa, sola, aşağı, yukarı hareket ettirmemi sağlıyor. Ortada bulunan tuş ise şekli döndürüyor. Ben bu bölümü şöyle kullandım. Denklemini bildiğim bir doğruyu çizdirdikten sonra grafiğimin gerçekten bana verdiği noktadan geçip geçmediğini kontrol ettim. Veyahut y eksenine paralel bir doğru çizdirdiğimde, bu grafiğin gerçekten de y eksenine paralel olup olmadığını şekli 360 derece döndürerek doğruladım.»

Bu öğrenci ödevi en son getiren öğrencidir. Zamanının en fazla olduğu düşünüldüğünde verdiği cevabın doğruluğu anlaşılabilir. Bu öğrencinin aynı zamanda ID nin araçsal öz yapı farkındalığının (instrumental genesis) ileri derecede olduğunu görmekteyiz. Diğer birçok öğrencinin aksine ID nin grafikten grafiğe geçiş (treatment) süreçlerine dikkat çektiği gibi (şekli 360 derece döndürmesi...), denklemini bildiği bir doğruyu çizdirdiğini söyleyerek ID nin dönüştürme (conversion) dönüşümüne dikkat çekmektedir. Kâğıt üzerinde yapacakları ile ID nin özelliklerini birleştirerek (yanyana koyarak) birbirlerini tamamlayacak hale gelmelerini sağlamaktadır. Ve ID den maksimum derecede faydalanmaktadır. Bu bağlamda ID nin önseziye karşıt dönüştürmesi de yani grafikten denkleme dönüştürmesi ona zorluk getirmemektedir. Öyleyse, öğretmenler öğrencilerine verilen bir Etkileşimli Diyagramın tam olarak keşfedilmesi için zaman tanımalıdırlar. Konuyu tam olarak anlatmayabileceği, ama konunun bazı özelliklerini dönüştürmeler ve geçişler yolu ile verebileceğinden öğretmenin bahsetmesi veya uygun sorular yardımı ile öğrencilerin kendilerinin bulmaları sağlanabilir. Sonuçta ID nin kendi içinde tutarlı bir yapı olduğu ama bir semiyotik gösterimden ibaret olduğuna dikkat çekilmelidir.

- Ö18: «Grafikten faydalanarak x,y,z koordinatları sayesinde geçtiği iki noktanın koordinatlarını bulabilirim. .»

Çok açık uçlu bir cevap görmekteyiz. Bir dönüştürmeye dikkat çekmektedir ama nasıl kullanacağına açıklama getirmemektedir. Bu da bazı öğrenciler için ID lerin probleme çözülmesini zorlaştırıcı bir ek ekleme olarak almalarına sebep oluyor da olabilir.

Tartışma ve Sonuç

Dinamik gösterimler öğrencilerin çok ilgisini çekiyor ama bunu nasıl bir problem çözümünde kullanabilecekleri konusunda ellerinde statik anlık fotoğraflardan başkası yok gibidir. Bu da dönüştürmeler kadar geçiş süreçlerinde de anlasalar bile anlatmakta zorluk yaşadıklarını düşünmemize yol açabilir. Yeterli zaman verildiğinde instrumental genesis (araçsal öz yapı farkındalığı) konusunda ilerleme kaydedebilmektedirler. Bu da Merger in 2010 makalesinde belirttiği noktanın önemine dikkat çekmektedir. Öğretmenler ID leri açıklamaya daha fazla zaman ayırmalıdır. Özellikle dinamik özellikleri ve geçiş/dönüştürme süreç kolaylıkları öğrencilerle paylaşılmalıdır. Sınırlılıklarını, yapabildiklerini çözebilmektedirler. Öğrenciler belli gösterimleri diğerlerine tercih etmektedirler. Duval' in 2017a makalesinde belirttiği gibi bu gösterim tercihleri konunun anlaşılmasını veya anlaşılamamasını doğurabilmektedir. Belki de öğretmene düşen farklı gösterimlerin farklı açıdan konuyu irdeleyebileceğine dikkat çekmektir. ID lerin sınırlılıkları da önemle üzerinde durulması gereken bir konudur. Fazla genellemeler (Schoenfeld, 2016 & Devlin, 2012) öğrencilerde eksen ve düzlem kavramının karıştırılmasına sebep olabilmektedir. Tamamen sözel, tamamen sembolik cevap verenler olmuştur. Burada ID nin etkili olduğu söylenemez. Daha çok ilgi, önceki bilgi ve deneyim etkili olmuş olabilir. ID nin statik anlarının birbirine dönüşebilmesi artısı olmasına rağmen bu konuda öğrenciler temkinli davranıp farklı sorular üretmemişlerdir. Bazı öğrencilerin ID nin sistematiğini tam anlamadan soruları çözmeye çalıştıkları, bunu da yön tuşlarıyla çözebilirim ama "Bulamadım" derken fark edilmektedirler. Semiyotik gösterimlerin gerçek nesneden ne kadar ayrıldığı konusunda (Pino v.d., 2015) net olmadıkları gözükmektedirler. Ama dönüştürme ve geçişleri bir arada anlayan öğrencilerin (az da olsalar) bu ayrımı yakalayabildiğini fark etmekteyiz. Problemi önce çözüp sonra ID yi duruma dâhil ettikleri belirlenmiştir. Bu da önseziye (van Hiele, 1986) aykırı dönüştürme ve geçişlerde başa çıkabilme kaygısıyla açıklanabilir**.**

Var olan literatürde görüldüğü gibi belli gösterimlerin diğerlerine oranla tercih edildiği gözlemlenmiştir. Burada öğrencilerin kendilerini rahat hissettiği gösterim şekli kadar ID ile verilmiş olan ve konuyu açıklamakta bir adım öteye girmiş olan bir gösterim şeklini diğerlerine tercih ettikleri de gözlemlenmiştir. Fakat yine de aynı literatürde belirtildiği gibi öğrenciler nedense bazı gösterim şekillerine diğerlerine oranla daha yakın olabiliyorlar gibi görülmüştür(Duval, 2017a). ID ile geçirilen verimli zamanın anlamaya yönelik mesnetli tarafları olduğu görülmüştür. Verimli zaman konusuna öğretmen yol gösterici özelliğini korusa da asıl görevin öğrenciye düştüğü belirlenmiştir.

Dönüştürmelerin geçişlere göre anlaşılması daha zor olduğu öğrencilerin açıklamalarında geçişleri kullanmaya eğilimli olmasından anlaşılabilir. Dönüştürmelerin yönünde ise önseziye aykırı örnekler de öğrencilerin zorluk çektiği fark edilmiştir.

Semiyotik (Pino v.d., 2015) ID nin şekilsel yapısına dikkat çeker ve öğrencinin ID nin özelliklerini anlamasında ve hatta araçsal öz yapı farkındalığının oluşmasında (instrumental genesis)(Meyers, 2010) çok önemli olduğu görülür. ID yapısını çözen öğrenciler sorulara da net cevaplar vermiştir. ID nin yapısını tam olarak anlamadan genel bir kanı çıkarmaya yönelik çalışan aday öğretmenlerin ise zorlandığı görülmüştür.

Araştırmanın sadece bir ID ile ve tek bir konuda derinlemesine inceleme olduğu düşünülürse, böyle çalışmaların arttırılması beklenmelidir. Özellikle küçük sınıflarda öğrencilerin bu dönüşümler karşısında ne yapabileceği konusunda bilgi verilmelidir. Zira aday öğretmenlerin bile analitik geometrinin zorluk teşkil etmeyen konularından birisinde ID nin etkisiyle veya değil bazı kavram yanılgılarına düştükleri gözlenmiştir. Dinamik gösterimlerin örüntüsel yapısı ve öğrencilere sunabileceği farklı soru çeşitleri konusunda öğrenciler kadar aday öğretmenler de bilgilendirilmelidir.

Kaynakça

Abakpa, B. Agbo-Egwu, A.O. & Abah, J. (2017). Emphasizing phenomenology as a research paradigm for interpreting growth and development in mathematics education, Abacus; The Mathematical Association of Nigeria, *Mathematics Education Series*, *42(1)*, 391-405.

Akkuş, O. & Çakıroğlu, E. (2006). Seventh grade students' use of multiple representations in pattern related algebra tasks, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (31),* 13-24.

Berger, M. (2010). A semiotic view of mathematical activity with a computer algebra system, *Relime (13),* 2, 159-186.

Cezikturk, O. (2003). *The effect of interactive diagrams on secondary students' understandings of selected mathematical representations based on van Hiele Theory and Representation Theory*, Unpublished doctoral dissertation, University at Albany, SUNY, listed in UMI Dissertation Abstracts

Cheng, P.C.H. (1999). Interactive law encoding diagrams for learning and instruction, *Learning and Instruction,9(4)*, 309-326.

D'Amore, B. (2002). *Conceptualization, registers of semiotic representations and noetic in mathematics education*, http://math.math.unipa.it/~grim/Jdamoreingl.pdf adresinden 1 Ocak 2016 tarihinde alınmıştır.

Devlin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking*, http://profkeithdevlin.com adresinden 15 Nisan 2017 de alınmıştır.

Duval, R. (2017a). How to learn to understand Mathematics? *JIEEM (10)*, 2, 114-122.

Duval, R.(2017b). Mathematical activity and the transformations of semiotic representations, In (Ed.R. Duval) *Understanding the Mathematical Way of Thinking-The registers of semiotic representations,*(pp. 21-43)Springer International Publishing. DOI 10.1007/978-3-319-56910-9_2

Duval, R. (2006c). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics (61)*, 103-131.

Fendt, W. (2015). Vector equation of a line in three-dimensional space, ID in HTML-5 app, http://www.walter-fendt.de/html5/men/line3d_en.htm adresinden 1Mart 2018 tarihinde alınmıştır.

Gomez, J.L.L. (2001). *Technology and semiotic representations in learning Mathematics*, http://funes.uniandes.edu.co/588/1/LupiannezJ01-2698.pdf adresinden 10 ocak 2018 tarihinde alınmıştır.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T.& Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in Mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of Mathematics (pp.33-40)*.Hillsdale,NJ: Lawrance Erlbaum.

Pino-Fan, L.R., Guzman, I., Duval, R. & Font, V. (2015). *The theory of registers of semiotic representation andthe onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: Linking looks fort he stduy of mathematical understanding*. In Beswick, K., Muir,T.,& wells,J. Eds.). Proceedings of the 39th Psychologyof Mathematics Education Conference, 4, 33-40.Hobart, Australia: PME.

Santi, G., Sbaragil, S. (2007). Semiotic representations, "avoidable" and "unavoidable" misconceptions, *La matematica e la sua didattica (21),* 1, 105-110.

Schoenfeld, A. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (reprint*) Journal of Education* (196), 2,1-39.

Sedig, K. & Liang, H-N. (2006). Interactivity of visual mathematical representations: factors affecting learning and cognitive processes, *Journal of Interactive Research, 17(2)*, 179-212.

Van Hiele, P. (1986*). Structure and insight, A theory of Mathematics education*, Orlando, FL: Academic Press.lbaladejo, I. M. R., Garcia, M., & Codina, A., (2015). Developing mathmatical compedenciesin secondary students by introducing dynamic geometry systems in the classroom. *Education and Science, 40*(177), 43-58.

Extended Abstract

Introduction

Interactive Diagrams (ID) are compact programs enabling multiple representations with translations between representational modes. IDs have examples all over the Internet, and covers one or more misconceptions and sometimes enables in-depth understanding. To extent whether it highlights the functional relationships and concept formation ideas, students can be benefited from them in mathematics learning. They cover mostly more than one representational mode and they enable the concepts to be seen and identified from different perspectives. Different modes of thinking and reasoning with them is important. Since, they are compact, they mostly do not carry cognitive overload problem. In the prescribed frame, specifics of the ID are drawn within predefined limits. Particular essences of the topic are touched via graphics or symbolic or verbal statements.

Understanding mathematics passes through proper functioning with the representations. Transformation of ideas within a representation mode is called treatment and transformation of ideas between different representations types are conversions. Inside an ID, same mod translations such as showing graphics from different viewpoints are named as "treatments" while different mod translations such as showing graphics of a symbolic expression are named as "conversions". Student, first deduce meaning from the static representation. Then, she or he interacts with the ID, meanwhile, translation types and representation modes are analyzed. Individual parameters are detected for their prospective effects on the system. This in turn leads to identification of mathematical relationships to be synthesized. Patterns are analyzed with pattern ends. Student uses the insight that she /he receives from this example, on different but same topic IDs.

Method

In the Analytical Geometry course, after the topic; "vector representation of lines in the space", 9 open-ended questions related to ID, were asked. Students were informed that they would get 5 points from this work in case they do it personally. This ID was specifically designed for visualization of lines passing through two points in R3. Two points can be specified; line is drawn in 3D. Meanwhile, line expression is written. At the end, students can move the 3D graph to see other special points of the line graph. From 18 volunteer students, answer sheets were analyzed with content analysis method. Study method was phenomenology of qualitative studies. This type of study tries to uncover an experience without really interpreting it. Specifically, the effect of the direction of conversions on the mathematical thinking was investigated. Here, a qualitative study of analysis and data collection is chosen since, this ID is only an example of many others specifically designed for this topic. In the structure of the ID, there are four different treatment and conversions. Exactly, there is only one treatment in which graphic to graphic conversion is made through the direction (perspective) buttons of the graphics. Here, one can visualize the graphics from many different sides to visualize the many intersection points of line graph with the axes and with the special planes and within special areas (x,y,z, all positive; xyz all negative, etc.)

Results and Discussion

Results show that students yet have problems in solving dynamism of IDs without static scenes from them. This shows that students have problems in identifying the real uses of dynamic representations of IDs. They choose some representation modes over others but this choice has nothing to do with the ID structure. It is mostly related to the prior learning, ease of use, and attitudes at the time of the study. It is very difficult for them to understand semiotic representations from the real mathematical object. But only students who can act with the conversions, seem to have the necessary ability to solve this problem. Besides this time is found to be important. If necessary time is allotted to the student, she or he can solve the treatment and conversions of the ID properly. Conversions are more difficult than treatments. Especially the direction of the conversion may make the problem unsolvable. If the conversion direction is opposite to the intuitive direction of algorithmic understanding, understanding problems occur. Some problems may even result in misconceptions. Hence, teachers should direct ID use. But sometimes, IDs may help in solving misconceptions problems if ID is specifically designed for it.

Some teachers state that for one ID, to cover this much is cumbersome. However, real course design covers this much preplanning and understanding by the teacher and by the student. Hence, this is really not that much and in the end we may even cover some misconceptions from happening. If searched properly, IDs may be a good source of studying treatments, conversions an even the direction of conversions.